

Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана
Факультет “Фундаментальные науки”
Кафедра “Высшая математика”

Математический анализ

Модуль 4

Приложения дифференциального исчисления

Лекция 4.5

для ГУИМЦ, 2026

Койфман К.Г., Семакин А.Н.

Кривая и ее длина



Кривая и ее длина

Пусть геометрические векторы $\vec{r}(t)$ при всех значениях переменной t прикреплены к точке O , которая является началом декартовой системы координат.



Кривая и ее длина

Пусть геометрические векторы $\vec{r}(t)$ при всех значениях переменной t прикреплены к точке O , которая является **началом декартовой системы координат**.

Вектор $\vec{r}(t)$ соединяет точку O с некоторой точкой M .



Кривая и ее длина

Пусть геометрические векторы $\vec{r}(t)$ при всех значениях переменной t прикреплены к точке O , которая является **началом декартовой системы координат**.

Вектор $\vec{r}(t)$ соединяет точку O с некоторой точкой M . Соответственно, $\vec{r}(t)$ является радиус-вектором точки M .



Кривая и ее длина

Пусть геометрические векторы $\vec{r}(t)$ при всех значениях переменной t прикреплены к точке O , которая является **началом декартовой системы координат**.

Вектор $\vec{r}(t)$ соединяет точку O с некоторой точкой M . Соответственно, $\vec{r}(t)$ является радиус-вектором точки M . Тогда **за координаты точки M принимаются координаты вектора $\vec{r}(t)$** .



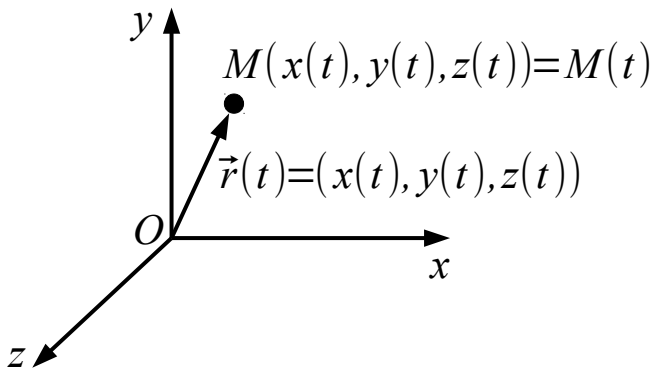
Кривая и ее длина

Иллюстрация:



Кривая и ее длина

Иллюстрация:



Определение

Непрерывное отображение отрезка $[a, b]$ числовой прямой в трехмерное арифметическое пространство R^3 называется **кривой** и обозначается Γ .



Способы задания кривой:



Способы задания кривой:

1. $\Gamma = \{M(t) \mid a \leq t \leq b\}$ – **точечное представление**. Кривая Γ задается как отображение $M(t)$, ставящее в соответствие числу t точку M пространства.



Способы задания кривой:

2. $\Gamma = \{O + \vec{r}(t) \mid a \leq t \leq b\}$ – векторное представление. Кривая Γ задается в виде векторной функции $\vec{r}(t)$, ставящей в соответствие числу t радиус-вектор $\vec{r}$ точки пространства. Символ $(+)$ означает операцию сдвига из точки на вектор, что дает новую точку.



Способы задания кривой:

3. $\Gamma = \{x(t), y(t), z(t) \mid a \leq t \leq b\}$ – **координатное представление**. Кривая Γ задается в виде трех скалярных функций, представляющих собой координаты точки в заданной декартовой системе координат.



Определение

Множество точек трехмерного пространства R^3 , на которое отображается отрезок $[a, b]$, называется **носителем кривой Γ** .



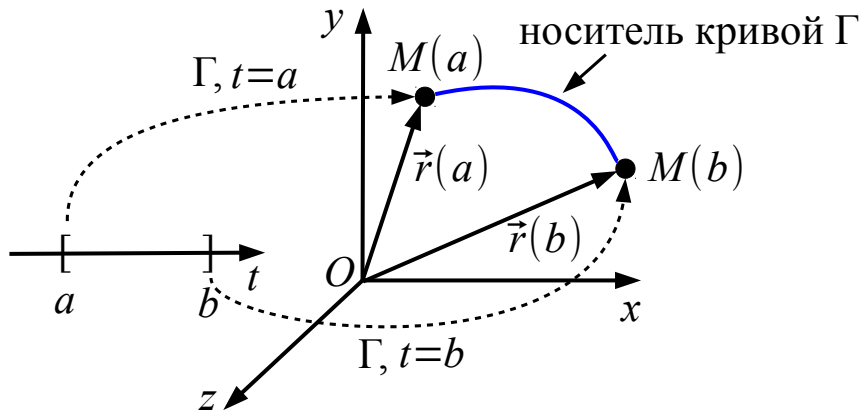
Кривая и ее длина

Иллюстрация:



Кривая и ее длина

Иллюстрация:



Кривая и ее длина

Определение

Если носитель кривой лежит в некоторой плоскости, то кривая называется **плоской**.



Замечание



Замечание

В дальнейшем под словом кривая мы будем понимать как саму кривую (**отображение**), так и ее **носитель** в зависимости от контекста.



Кривая и ее длина



Кривая и ее длина

Поставим целью сформулировать определение длины произвольной кривой. Все, что мы знаем на настоящий момент – как определить длину ломаной.



Кривая и ее длина

Поставим целью сформулировать определение длины произвольной кривой. Все, что мы знаем на настоящий момент – как определить длину ломаной.

Идея: «приближать» кривую ломаными, которые все плотнее и плотнее вписываются в нее.



Определение

Последовательность точек $t_0, t_1, \dots, t_n$, удовлетворяющая условию

$a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$, называется **разбиением отрезка $[a, b]$** .



Определение

Последовательность точек кривой

$M_0, M_1, \dots, M_n$, соответствующая значениям

$t_0, t_1, \dots, t_n$, называется **разбиением**
кривой Γ .



Определение

Последовательность точек кривой $M_0, M_1, \dots, M_n$, соответствующая значениям $t_0, t_1, \dots, t_n$, называется **разбиением кривой Γ** .

Соединив точки $M_0, M_1, \dots, M_n$ отрезками, получим ломаную P_n , которая называется **вписанной в кривую Γ** .



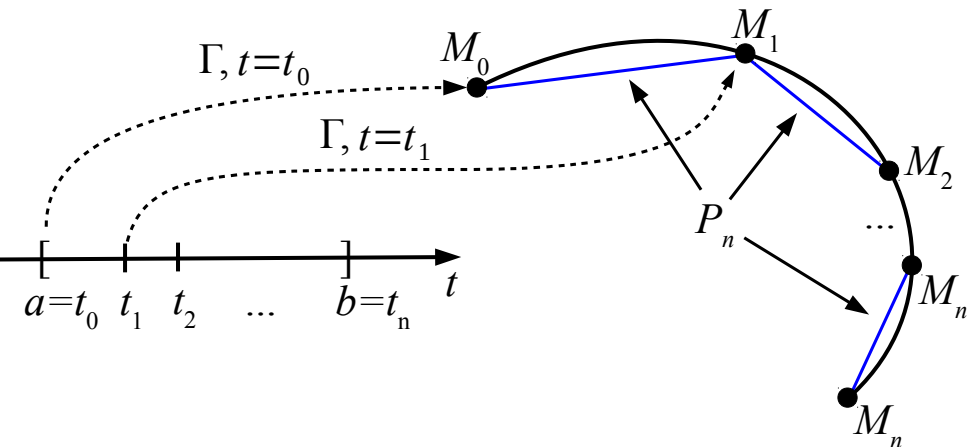
Кривая и ее длина

Иллюстрация:



Кривая и ее длина

Иллюстрация:



Кривая и ее длина

Длина каждого отрезка $\overline{M_{k-1}M_k}$ равна $|\vec{r}(t_k) - \vec{r}(t_{k-1})|$.



Кривая и ее длина

Длина каждого отрезка $\overline{M_{k-1}M_k}$ равна $|\vec{r}(t_k) - \vec{r}(t_{k-1})|$. Следовательно, длина σ_n всей ломаной P_n равна сумме таких длин:

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^n |\vec{r}(t_k) - \vec{r}(t_{k-1})|.$$



Определение

Длиной кривой Γ называется точная верхняя грань длин всевозможных ломаных P_n , т.е.

$$L_\Gamma = \sup \sigma_n.$$



Кривая и ее длина

Выделим класс кривых, для которых существует длина в указанном смысле.



Кривая и ее длина

Выделим класс кривых, для которых существует длина в указанном смысле.

Определение

Если производная $\vec{r}'(t)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то кривая Γ называется **непрерывно дифференцируемой**.



Кривая и ее длина

Теорема (о переменной длине дуги)



Теорема (о переменной длине дуги)

Пусть кривая Γ непрерывно дифференцируема.



Кривая и ее длина

Теорема (о переменной длине дуги)

Пусть кривая Γ непрерывно дифференцируема. Тогда переменная длина дуги l , отсчитываемая от начала $\vec{r}(a)$ кривой Γ , является возрастающей непрерывно дифференцируемой функцией переменной t .



Кривая и ее длина

Теорема (о переменной длине дуги)

Пусть кривая Γ непрерывно дифференцируема. Тогда переменная длина дуги l , отсчитываемая от начала $\vec{r}(a)$ кривой Γ , является возрастающей непрерывно дифференцируемой функцией переменной t . При этом

$$\frac{dl}{dt} = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} = \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right|.$$



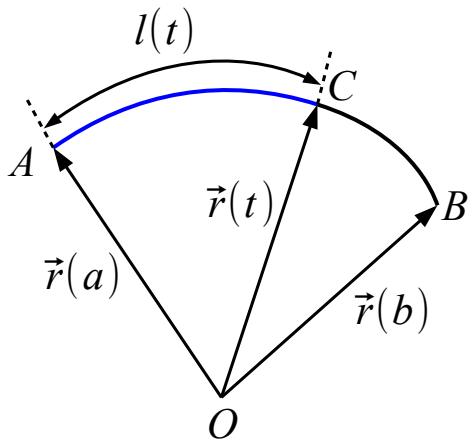
Кривая и ее длина

Иллюстрация:



Кривая и ее длина

Иллюстрация:



На рисунке $l(t)$ –
длина
участка AC
кривой AB ,
причем $l(a) = 0$.



Замечание



Замечание

В интегральном исчислении доказывается, что длина кривой может быть вычислена по формуле

$$I = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt.$$

Справа – интеграл Римана на отрезке $[a, b]$.



Кривая и ее длина

Рассмотрим плоскую кривую

$\Gamma = \{x(t), y(t) \mid a \leq t \leq b\}$. Тогда

$$\frac{dl}{dt} = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$$



$$dl = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

или $(dl)^2 = (x'dt)^2 + (y'dt)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$.

Здесь dl – дифференциал длины дуги $l = l(t)$ плоской кривой Γ .



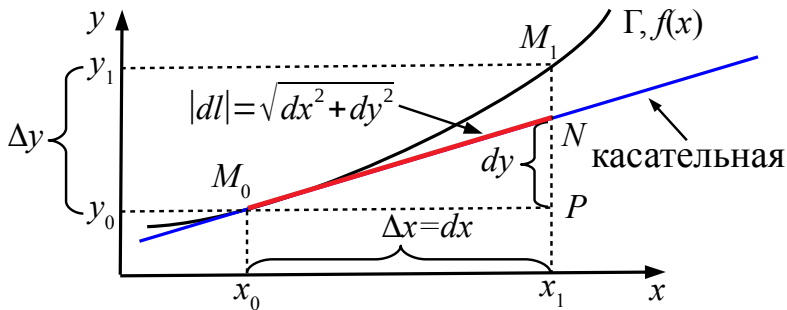
Кривая и ее длина

Геометрический смысл дифференциала dl :



Кривая и ее длина

Геометрический смысл дифференциала dl :



Кривая и ее длина

Пусть кривая Γ в окрестности точки x_0 совпадает с графиком функции $y = f(x)$.



Кривая и ее длина

Пусть кривая Γ в окрестности точки x_0 совпадает с графиком функции $y = f(x)$.

Тогда кривую Γ можно задать в виде:

$$\Gamma = \{x, f(x) \mid x \in U(x_0)\},$$

беря в качестве независимой переменной t переменную x : $t = x$.



Кривая и ее длина

Рассмотрим на кривой Γ дугу M_0M_1 длины $\Delta l = l(x_1) - l(x_0)$. Тогда



Кривая и ее длина

Рассмотрим на кривой Γ дугу M_0M_1 длины $\Delta l = l(x_1) - l(x_0)$. Тогда

– отрезок $M_0P = \Delta x = dx = x_1 - x_0$ – приращение аргумента x функции $f(x)$ при переходе от точки x_0 к точке x_1 .



Кривая и ее длина

Рассмотрим на кривой Γ дугу M_0M_1 длины $\Delta l = l(x_1) - l(x_0)$. Тогда

– отрезок $\Delta y = y_1 - y_0$ – приращение значения функции $f(x)$ при переходе от точки x_0 к точке x_1 .



Кривая и ее длина

Рассмотрим на кривой Γ дугу M_0M_1 длины $\Delta l = l(x_1) - l(x_0)$. Тогда

– отрезок $PN = dy = f'(x_0)dx$ – приращение ординаты касательной к графику функции $f(x)$ в точке x_0 при переходе от точки x_0 к точке x_1 .



Кривая и ее длина

Поскольку ΔM_0PN – прямоугольный, то

$$M_0N^2 = M_0P^2 + PN^2 = (dx)^2 + (dy)^2 = (dl)^2.$$


$$|dl| = M_0N.$$

Отсюда получаем, что дифференциал длины дуги dl по абсолютной величине равен длине участка касательной, заключенного между точками x_0 и x_1 .



Кривизна и радиус кривизны плоской кривой



Кривизна и радиус кривизны плоской кривой

Рассмотрим на плоской кривой Γ точки M_0 и M_1 . Проведем через эти точки касательные. При переходе от точки M_0 к точке M_1 касательная поворачивается на угол $\Delta\varphi$.



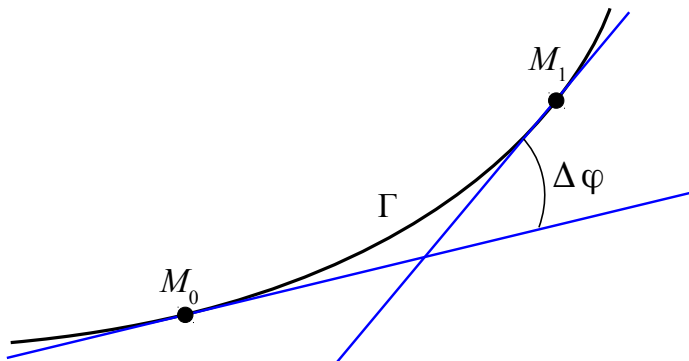
Кривизна и радиус кривизны плоской кривой

Иллюстрация:



Кривизна и радиус кривизны плоской кривой

Иллюстрация:



Кривизна и радиус кривизны плоской кривой

Определение

Отношение угла $\Delta\varphi$ к длине Δl дуги, заключенной между точками M_0 и M_1 , называется **средней кривизной дуги**:

$$K_{\text{ср}} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta l}.$$



Кривизна и радиус кривизны плоской кривой

Величина $K_{\text{ср}}$ характеризует среднюю изогнутость кривой. Чем меньше $K_{\text{ср}}$, тем ближе кривая к прямой.



Кривизна и радиус кривизны плоской кривой

Определение

Кривизной кривой Γ в точке M_0
называется предел

$$K = \lim_{M_1 \rightarrow M_0} K_{\text{ср.}}$$



Кривизна и радиус кривизны плоской кривой

Определение

Величина, обратная кривизне, называется **радиусом кривизны**.

Обозначение: $R = \frac{1}{K}$.



Кривизна и радиус кривизны плоской кривой

Проведем к кривой Γ в точке M нормаль и отложим на этой нормали в сторону вогнутости кривой отрезок MN с длиной, равной R .



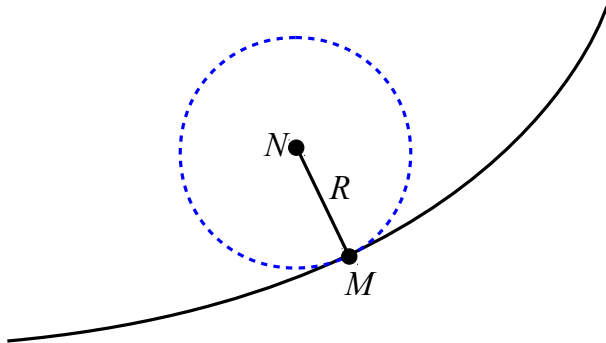
Кривизна и радиус кривизны плоской кривой

Иллюстрация:



Кривизна и радиус кривизны плоской кривой

Иллюстрация:



Кривизна и радиус кривизны плоской кривой

Определение

Точка N называется **центром кривизны**, а окружность с центром в точке N и радиусом R – **окружностью кривизны** плоской кривой в точке M .

