

Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана
Факультет “Фундаментальные науки”
Кафедра “Высшая математика”

Математический анализ

Модуль 4

Приложения дифференциального исчисления

Лекция 4.4

для ГУИМЦ, 2026

Койфман К.Г., Семакин А.Н.

Векторная функция скалярного аргумента



Векторная функция скалярного аргумента

Определение

Пусть задан числовой промежуток $D \subset \mathbb{R}$.



Векторная функция скалярного аргумента

Определение

Пусть задан числовой промежуток $D \subset \mathbb{R}$.
Если каждому действительному числу $t \in D$
по некоторому правилу поставлен в
соответствие определенный геометрический
вектор $\vec{r}$, то говорят, что на промежутке D
задана **векторная функция скалярного
аргумента** или просто **вектор-функция**.



Векторная функция скалярного аргумента

Определение

Пусть задан числовой промежуток $D \subset \mathbb{R}$.
Если каждому действительному числу $t \in D$
по некоторому правилу поставлен в
соответствие определенный геометрический
вектор $\vec{r}$, то говорят, что на промежутке D
задана **векторная функция скалярного
аргумента** или просто **вектор-функция**.
Обозначение: $\vec{r} = \vec{r}(t)$ или



Векторная функция скалярного аргумента

Определение

Пусть задан числовой промежуток $D \subset \mathbb{R}$.
Если каждому действительному числу $t \in D$ по некоторому правилу поставлен в соответствие определенный геометрический вектор $\vec{r}$, то говорят, что на промежутке D задана **векторная функция скалярного аргумента** или просто **вектор-функция**.
Обозначение: $\vec{r} = \vec{r}(t)$ или $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ (последнее часто используется в учебниках).



Векторная функция скалярного аргумента

Замечание



Векторная функция скалярного аргумента

Замечание

Как правило, вектор-функции рассматриваются в трехмерном или двумерном пространствах геометрических векторов, что обусловлено потребностями классической физики.



Замечание

Как правило, вектор-функции рассматриваются в трехмерном или двумерном пространствах геометрических векторов, что обусловлено потребностями классической физики. Вместе с тем, точно также можно говорить о вектор-функциях в линейном пространстве произвольной размерности.



Векторная функция скалярного аргумента

В соответствии с утверждениями аналитической геометрии, в трехмерном пространстве векторная функция задается с помощью трех скалярных функций, являющихся ее координатами в ортонормированном базисе:



Векторная функция скалярного аргумента

В соответствии с утверждениями аналитической геометрии, в трехмерном пространстве векторная функция задается с помощью трех скалярных функций, являющихся ее координатами в ортонормированном базисе:

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)).$$



Векторная функция скалярного аргумента

В соответствии с утверждениями аналитической геометрии, в трехмерном пространстве векторная функция задается с помощью трех скалярных функций, являющихся ее координатами в ортонормированном базисе:

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)).$$

Если $z(t) = 0 \ \forall t$ (плоский случай), то пишут:



Векторная функция скалярного аргумента

В соответствии с утверждениями аналитической геометрии, в трехмерном пространстве векторная функция задается с помощью трех скалярных функций, являющихся ее координатами в ортонормированном базисе:

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)).$$

Если $z(t) = 0 \ \forall t$ (плоский случай), то пишут:

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t)).$$



Векторная функция скалярного аргумента

Поскольку геометрический вектор является свободным вектором, его можно переносить в любую точку пространства параллельно самому себе.



Векторная функция скалярного аргумента

Поскольку геометрический вектор является свободным вектором, его можно переносить в любую точку пространства параллельно самому себе. В частности, векторы можно откладывать из фиксированной точки.



Векторная функция скалярного аргумента

Определение

Пусть все векторы, являющиеся значениями векторной функции $\vec{r}(t)$, приложены к одной точке O .



Векторная функция скалярного аргумента

Определение

Пусть все векторы, являющиеся значениями векторной функции $\vec{r}(t)$, приложены к одной точке O . Тогда линия, описываемая в пространстве концом вектора $\vec{r}(t)$ при непрерывном изменении t , называется **годографом** функции $\vec{r}(t)$.



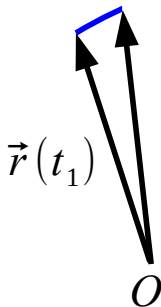
Векторная функция скалярного аргумента

Иллюстрация:



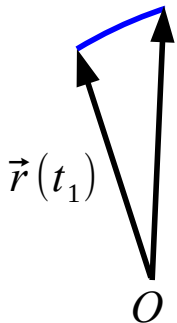
Векторная функция скалярного аргумента

Иллюстрация:



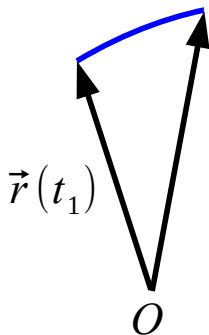
Векторная функция скалярного аргумента

Иллюстрация:



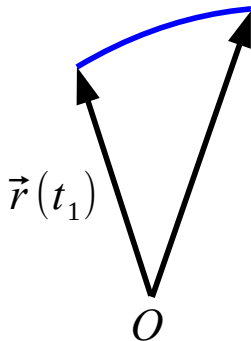
Векторная функция скалярного аргумента

Иллюстрация:



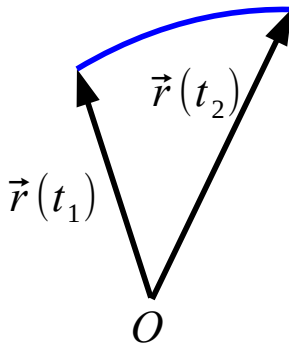
Векторная функция скалярного аргумента

Иллюстрация:



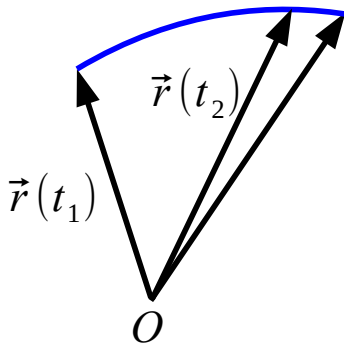
Векторная функция скалярного аргумента

Иллюстрация:



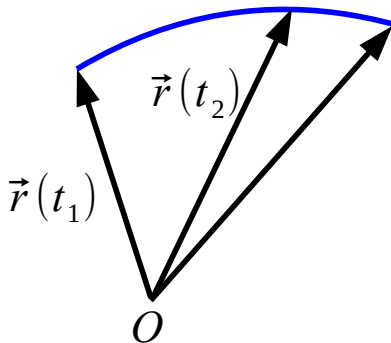
Векторная функция скалярного аргумента

Иллюстрация:



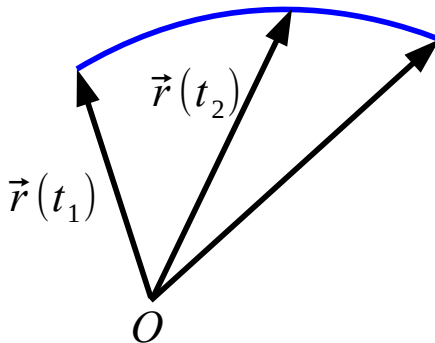
Векторная функция скалярного аргумента

Иллюстрация:



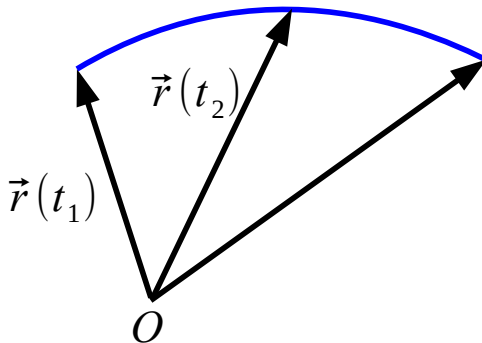
Векторная функция скалярного аргумента

Иллюстрация:



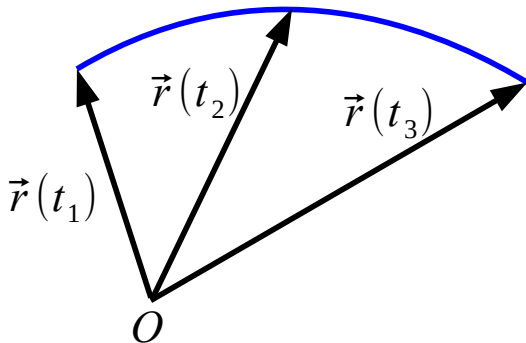
Векторная функция скалярного аргумента

Иллюстрация:



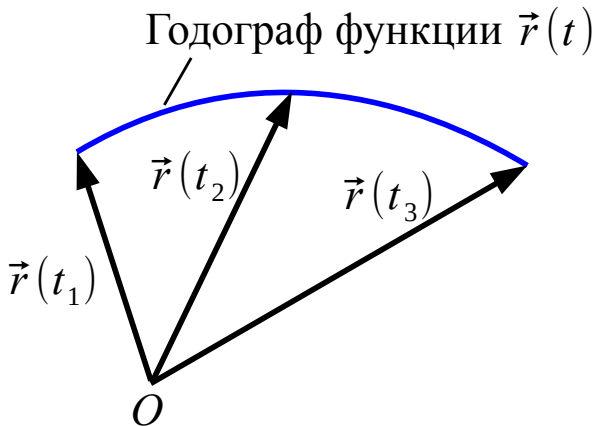
Векторная функция скалярного аргумента

Иллюстрация:



Векторная функция скалярного аргумента

Иллюстрация:



Векторная функция скалярного аргумента

Годограф используется для наглядного представления вектор-функции и выступает аналогом графика обычной числовой функции.



Векторная функция скалярного аргумента

Годограф используется для наглядного представления вектор-функции и выступает аналогом графика обычной числовой функции.

С физической точки зрения годограф вектор-функции можно рассматривать как траекторию движения в пространстве материальной точки, положение которой в момент времени t задается вектором $\vec{r}(t)$ относительно точки O .



Векторная функция скалярного аргумента

Расположим начало декартовой системы координат в точке O .



Векторная функция скалярного аргумента

Расположим начало декартовой системы координат в точке O . Тогда в этой системе координат годограф задается системой функций:



Векторная функция скалярного аргумента

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad - \text{ в пространстве}$$



Векторная функция скалярного аргумента

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad - \text{ в пространстве}$$

или

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad - \text{ на плоскости,}$$



Векторная функция скалярного аргумента

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad - \text{ в пространстве}$$

или

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad - \text{ на плоскости,}$$

где $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ – координаты векторной функции $\vec{r}(t)$ в фиксированном ортонормированном базисе.



Предел и непрерывность



Предел и непрерывность

Пусть вектор-функция $\vec{r} = \vec{r}(t)$ определена в проколотой окрестности точки t_0 .



Предел и непрерывность

Пусть вектор-функция $\vec{r} = \vec{r}(t)$ определена в проколотой окрестности точки t_0 .

Определение

Вектор $\vec{a}$ называется **пределом** векторной функции $\vec{r}(t)$ при $t \rightarrow t_0$, если

$$\lim_{t \rightarrow t_0} |\vec{r}(t) - \vec{a}| = 0.$$



Предел и непрерывность

Пусть вектор-функция $\vec{r} = \vec{r}(t)$ определена в проколотовой окрестности точки t_0 .

Определение

Вектор $\vec{a}$ называется **пределом** векторной функции $\vec{r}(t)$ при $t \rightarrow t_0$, если

$$\lim_{t \rightarrow t_0} |\vec{r}(t) - \vec{a}| = 0.$$

Обозначение:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{r}(t) = \vec{a}.$$



Предел и непрерывность

Здесь $|\vec{r}(t) - \vec{a}|$ – модуль вектора,



Предел и непрерывность

Здесь $|\vec{r}(t) - \vec{a}|$ – модуль вектора,

$$|\vec{r}(t) - \vec{a}| =$$



Предел и непрерывность

Здесь $|\vec{r}(t) - \vec{a}|$ – модуль вектора,

$$\begin{aligned} |\vec{r}(t) - \vec{a}| &= \\ &= \sqrt{(x(t) - a_x)^2 + (y(t) - a_y)^2 + (z(t) - a_z)^2}, \\ \text{где } \vec{a} &= (a_x, a_y, a_z). \end{aligned}$$



Предел и непрерывность

Таким образом, предел векторной функции $\vec{r} = \vec{r}(t)$ сводится к пределу скалярной функции $f(t) = |\vec{r}(t) - \vec{a}|$, $t \rightarrow t_0$, который понимается в смысле определений предыдущего семестра (по Гейне или по Коши).



Предел и непрерывность

Таким образом, предел векторной функции $\vec{r} = \vec{r}(t)$ сводится к пределу скалярной функции $f(t) = |\vec{r}(t) - \vec{a}|$, $t \rightarrow t_0$, который понимается в смысле определений предыдущего семестра (по Гейне или по Коши). Эта скалярная функция должна быть бесконечно малой.



Предел и непрерывность

При $t \rightarrow t_0$ вектор $\vec{r}(t) - \vec{a}$ переходит в нулевой вектор $\vec{0}$, что соответствует переходу вектора $\vec{r}(t)$ в вектор $\vec{a}$.



Предел и непрерывность

При $t \rightarrow t_0$ вектор $\vec{r}(t) - \vec{a}$ переходит в нулевой вектор $\vec{0}$, что соответствует переходу вектора $\vec{r}(t)$ в вектор $\vec{a}$.

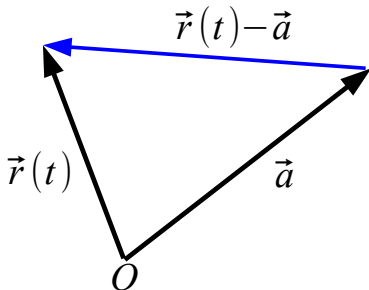
Иллюстрация:



Предел и непрерывность

При $t \rightarrow t_0$ вектор $\vec{r}(t) - \vec{a}$ переходит в нулевой вектор $\vec{0}$, что соответствует переходу вектора $\vec{r}(t)$ в вектор $\vec{a}$.

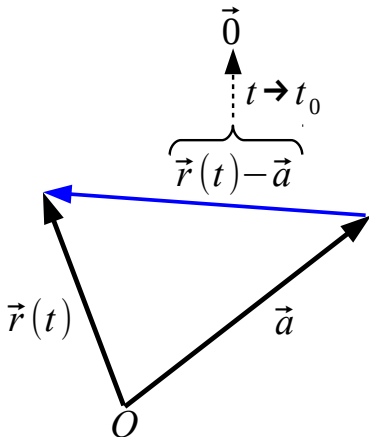
Иллюстрация:



Предел и непрерывность

При $t \rightarrow t_0$ вектор $\vec{r}(t) - \vec{a}$ переходит в нулевой вектор $\vec{0}$, что соответствует переходу вектора $\vec{r}(t)$ в вектор $\vec{a}$.

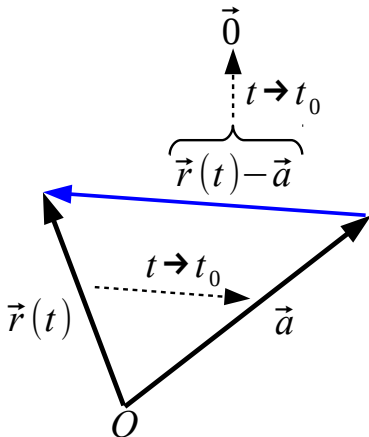
Иллюстрация:



Предел и непрерывность

При $t \rightarrow t_0$ вектор $\vec{r}(t) - \vec{a}$ переходит в нулевой вектор $\vec{0}$, что соответствует переходу вектора $\vec{r}(t)$ в вектор $\vec{a}$.

Иллюстрация:



Предел векторной функции равносителен трем пределам соответствующих координатных функций:



Предел и непрерывность

Теорема (о пределе в координатной форме)



Теорема (о пределе в координатной форме)

Пусть $\vec{r} = \vec{r}(t)$ — вектор-функция, определенная в проколоте окрестности точки t_0 , и $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Тогда



Предел и непрерывность

Теорема (о пределе в координатной форме)

Пусть $\vec{r} = \vec{r}(t)$ — вектор-функция, определенная в проколоте окрестности точки t_0 , и $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Тогда

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow t_0} x(t) &= a_x, \\ \lim_{t \rightarrow t_0} \vec{r}(t) = \vec{a} &\Leftrightarrow \begin{aligned} \lim_{t \rightarrow t_0} y(t) &= a_y, \\ \lim_{t \rightarrow t_0} z(t) &= a_z, \end{aligned} \end{aligned}$$

где $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$.



Предел и непрерывность

Теперь мы можем сформулировать понятие непрерывной вектор-функции.



Предел и непрерывность

Теперь мы можем сформулировать понятие непрерывной вектор-функции. Пусть вектор-функция $\vec{r} = \vec{r}(t)$ определена в окрестности точки t_0 .



Предел и непрерывность

Теперь мы можем сформулировать понятие непрерывной вектор-функции. Пусть вектор-функция $\vec{r} = \vec{r}(t)$ определена в окрестности точки t_0 .

Определение

Векторная функция $\vec{r}(t)$ называется **непрерывной** в точке t_0 , если

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0).$$



Предел и непрерывность

Теперь мы можем сформулировать понятие непрерывной вектор-функции. Пусть вектор-функция $\vec{r} = \vec{r}(t)$ определена в окрестности точки t_0 .

Определение

Векторная функция $\vec{r}(t)$ называется **непрерывной** в точке t_0 , если

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0).$$

Обозначение: $\vec{r}(t) \in C(t_0)$.



Теорема (о непрерывности в координатной форме)



Теорема (о непрерывности в координатной форме)

$$\vec{r}(t) \in C(t_0) \Leftrightarrow \begin{aligned} x(t) &\in C(t_0), \\ y(t) &\in C(t_0), \\ z(t) &\in C(t_0), \end{aligned}$$

где $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$.



Предел и непрерывность

Свойства пределов векторных функций:



Предел и непрерывность

Свойства пределов векторных функций:

1) если $\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{r}(t) = \vec{a}$, то $\lim_{t \rightarrow t_0} |\vec{r}(t)| = |\vec{a}|$,



Свойства пределов векторных функций:

1) если $\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{r}(t) = \vec{a}$, то $\lim_{t \rightarrow t_0} |\vec{r}(t)| = |\vec{a}|$,

2) $\lim_{t \rightarrow t_0} (\vec{r}_1(t) + \vec{r}_2(t)) = \lim_{t \rightarrow t_0} \vec{r}_1(t) + \lim_{t \rightarrow t_0} \vec{r}_2(t)$,



Свойства пределов векторных функций:

- 1) если $\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{r}(t) = \vec{a}$, то $\lim_{t \rightarrow t_0} |\vec{r}(t)| = |\vec{a}|$,
- 2) $\lim_{t \rightarrow t_0} (\vec{r}_1(t) + \vec{r}_2(t)) = \lim_{t \rightarrow t_0} \vec{r}_1(t) + \lim_{t \rightarrow t_0} \vec{r}_2(t)$,
- 3) $\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) \vec{r}(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} f(t) \lim_{t \rightarrow t_0} \vec{r}(t)$,



Свойства пределов векторных функций:

- 1) если $\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{r}(t) = \vec{a}$, то $\lim_{t \rightarrow t_0} |\vec{r}(t)| = |\vec{a}|$,
- 2) $\lim_{t \rightarrow t_0} (\vec{r}_1(t) + \vec{r}_2(t)) = \lim_{t \rightarrow t_0} \vec{r}_1(t) + \lim_{t \rightarrow t_0} \vec{r}_2(t)$,
- 3) $\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) \vec{r}(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} f(t) \lim_{t \rightarrow t_0} \vec{r}(t)$,
- 4) $\lim_{t \rightarrow t_0} (\vec{r}_1(t) \cdot \vec{r}_2(t)) = \lim_{t \rightarrow t_0} \vec{r}_1(t) \cdot \lim_{t \rightarrow t_0} \vec{r}_2(t)$,



Свойства пределов векторных функций:

$$1) \text{ если } \lim_{t \rightarrow t_0} \vec{r}(t) = \vec{a}, \text{ то } \lim_{t \rightarrow t_0} |\vec{r}(t)| = |\vec{a}|,$$

$$2) \lim_{t \rightarrow t_0} (\vec{r}_1(t) + \vec{r}_2(t)) = \lim_{t \rightarrow t_0} \vec{r}_1(t) + \lim_{t \rightarrow t_0} \vec{r}_2(t),$$

$$3) \lim_{t \rightarrow t_0} f(t) \vec{r}(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} f(t) \lim_{t \rightarrow t_0} \vec{r}(t),$$

$$4) \lim_{t \rightarrow t_0} (\vec{r}_1(t) \cdot \vec{r}_2(t)) = \lim_{t \rightarrow t_0} \vec{r}_1(t) \cdot \lim_{t \rightarrow t_0} \vec{r}_2(t),$$

$$5) \lim_{t \rightarrow t_0} (\vec{r}_1(t) \times \vec{r}_2(t)) = \lim_{t \rightarrow t_0} \vec{r}_1(t) \times \lim_{t \rightarrow t_0} \vec{r}_2(t)$$



Предел и непрерывность

Свойства пределов векторных функций:

$$1) \text{ если } \lim_{t \rightarrow t_0} \vec{r}(t) = \vec{a}, \text{ то } \lim_{t \rightarrow t_0} |\vec{r}(t)| = |\vec{a}|,$$

$$2) \lim_{t \rightarrow t_0} (\vec{r}_1(t) + \vec{r}_2(t)) = \lim_{t \rightarrow t_0} \vec{r}_1(t) + \lim_{t \rightarrow t_0} \vec{r}_2(t),$$

$$3) \lim_{t \rightarrow t_0} f(t) \vec{r}(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} f(t) \lim_{t \rightarrow t_0} \vec{r}(t),$$

$$4) \lim_{t \rightarrow t_0} (\vec{r}_1(t) \cdot \vec{r}_2(t)) = \lim_{t \rightarrow t_0} \vec{r}_1(t) \cdot \lim_{t \rightarrow t_0} \vec{r}_2(t),$$

$$5) \lim_{t \rightarrow t_0} (\vec{r}_1(t) \times \vec{r}_2(t)) = \lim_{t \rightarrow t_0} \vec{r}_1(t) \times \lim_{t \rightarrow t_0} \vec{r}_2(t)$$

Здесь $(\cdot)$ – скалярное произведение,

$(\times)$ – векторное произведение,

а $f = f(t)$ – обычная числовая функция.



Производная векторной функции



Производная векторной функции

Пусть вектор-функция $\vec{r} = \vec{r}(t)$ определена в окрестности точки t_0 .



Производная векторной функции

Пусть вектор-функция $\vec{r} = \vec{r}(t)$ определена в окрестности точки t_0 .

Определение

Производной функции $\vec{r}(t)$ в точке t_0 называется предел

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0)}{\Delta t}$$



Производная векторной функции

Пусть вектор-функция $\vec{r} = \vec{r}(t)$ определена в окрестности точки t_0 .

Определение

Производной функции $\vec{r}(t)$ в точке t_0 называется предел

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$



Производная векторной функции

Пусть вектор-функция $\vec{r} = \vec{r}(t)$ определена в окрестности точки t_0 .

Определение

Производной функции $\vec{r}(t)$ в точке t_0 называется предел

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

Обозначение: $\vec{r}'(t_0)$.



Производная векторной функции

Теорема (о существовании производной векторной функции)



Производная векторной функции

Теорема (о существовании производной
векторной функции)

$$\exists \vec{r}'(t_0) \Leftrightarrow \exists x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0),$$



Производная векторной функции

Теорема (о существовании производной
векторной функции)

$$\exists \vec{r}'(t_0) \Leftrightarrow \exists x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0),$$

причем $\vec{r}'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$



Производная векторной функции

Геометрический смысл производной:



Производная векторной функции

Геометрический смысл производной:

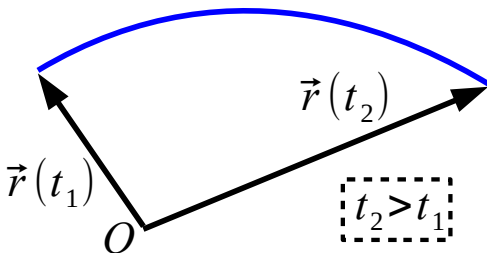
Производная $\vec{r}'(t)$ – это вектор, направленный по касательной к годографу функции $\vec{r}(t)$ в сторону возрастания параметра t .



Производная векторной функции

Геометрический смысл производной:

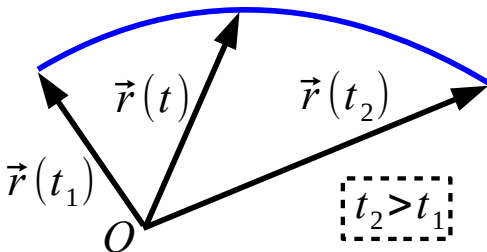
Производная $\vec{r}'(t)$ – это вектор, направленный по касательной к годографу функции $\vec{r}(t)$ в сторону возрастания параметра t .



Производная векторной функции

Геометрический смысл производной:

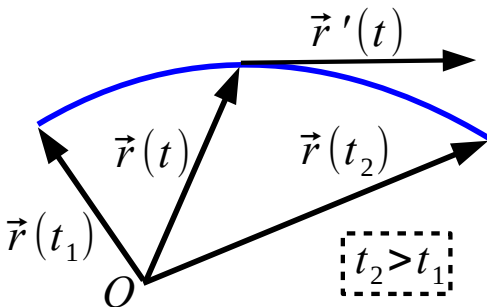
Производная $\vec{r}'(t)$ – это вектор, направленный по касательной к годографу функции $\vec{r}(t)$ в сторону возрастания параметра t .



Производная векторной функции

Геометрический смысл производной:

Производная $\vec{r}'(t)$ – это вектор, направленный по касательной к годографу функции $\vec{r}(t)$ в сторону возрастания параметра t .



Производная векторной функции

Так как $\vec{r}'(t)$ направлен по касательной к годографу функции $\vec{r}(t)$, то каноническое уравнение касательной к этой кривой в точке $(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ имеет вид:



Производная векторной функции

Так как $\vec{r}'(t)$ направлен по касательной к годографу функции $\vec{r}(t)$, то каноническое уравнение касательной к этой кривой в точке $(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ имеет вид:

$$\frac{x - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y'(t_0)} = \frac{z - z(t_0)}{z'(t_0)}$$



Производная векторной функции

Физический смысл производной:



Производная векторной функции

Физический смысл производной:

Производная $\vec{r}'(t)$ – это вектор мгновенной скорости перемещения материальной точки по траектории, являющейся годографом функции $\vec{r}(t)$.



Производная векторной функции

Правила дифференцирования:



Производная векторной функции

Правила дифференцирования:

$$1) (\vec{r}_1 + \vec{r}_2)' = \vec{r}_1' + \vec{r}_2'$$



Производная векторной функции

Правила дифференцирования:

$$1) (\vec{r}_1 + \vec{r}_2)' = \vec{r}_1' + \vec{r}_2'$$

$$2) (f\vec{r})' = f'\vec{r} + f\vec{r}'$$



Производная векторной функции

Правила дифференцирования:

$$1) (\vec{r}_1 + \vec{r}_2)' = \vec{r}_1' + \vec{r}_2'$$

$$2) (f\vec{r})' = f'\vec{r} + f\vec{r}'$$

$$3) (\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2)' = \vec{r}_1' \cdot \vec{r}_2 + \vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2'$$



Производная векторной функции

Правила дифференцирования:

$$1) (\vec{r}_1 + \vec{r}_2)' = \vec{r}_1' + \vec{r}_2'$$

$$2) (f\vec{r})' = f'\vec{r} + f\vec{r}'$$

$$3) (\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2)' = \vec{r}_1' \cdot \vec{r}_2 + \vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2'$$

$$4) (\vec{r}_1 \times \vec{r}_2)' = \vec{r}_1' \times \vec{r}_2 + \vec{r}_1 \times \vec{r}_2'$$



Производная векторной функции

Правила дифференцирования:

$$1) (\vec{r}_1 + \vec{r}_2)' = \vec{r}_1' + \vec{r}_2'$$

$$2) (f\vec{r})' = f'\vec{r} + f\vec{r}'$$

$$3) (\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2)' = \vec{r}_1' \cdot \vec{r}_2 + \vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2'$$

$$4) (\vec{r}_1 \times \vec{r}_2)' = \vec{r}_1' \times \vec{r}_2 + \vec{r}_1 \times \vec{r}_2'$$

Здесь $(\cdot)$ – скалярное произведение,

$(\times)$ – векторное произведение,

$f = f(t)$ – обычная числовая функция.



Определение

Дифференциалом вектор-функции $\vec{r}(t)$ называется вектор

$$d\vec{r} = \vec{r}' dt = (dx, dy, dz).$$



Векторная функция постоянной длины



Векторная функция постоянной длины

Теорема (о производной векторной функции
постоянной длины)



Векторная функция постоянной длины

Теорема (о производной векторной функции
постоянной длины)

Если длина вектора $\vec{r}(t)$ постоянна, то он
ортогонален своей производной и
 $\vec{r}(t) \cdot \vec{r}'(t) = 0$.



Векторная функция постоянной длины

Геометрически конец вектора $\vec{r}(t)$ все время лежит на одной и той же сфере с центром в точке O ,



Векторная функция постоянной длины

Геометрически конец вектора $\vec{r}(t)$ все время лежит на одной и той же сфере с центром в точке O , сам же он служит радиус-вектором этой сферы.



Векторная функция постоянной длины

Геометрически конец вектора $\vec{r}(t)$ все время лежит на одной и той же сфере с центром в точке O , сам же он служит радиус-вектором этой сферы. Производная от этого вектора направлена по касательной к сфере.

