

Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана
Факультет “Фундаментальные науки”
Кафедра “Высшая математика”

Математический анализ

Модуль 4

Приложения дифференциального исчисления

Лекция 4.3

для ГУИМЦ, 2026

Койфман К.Г., Семакин А.Н.

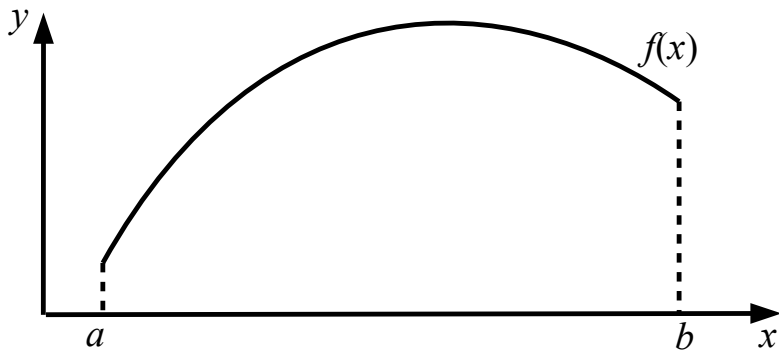
Выпуклость функции



Выпуклость функции



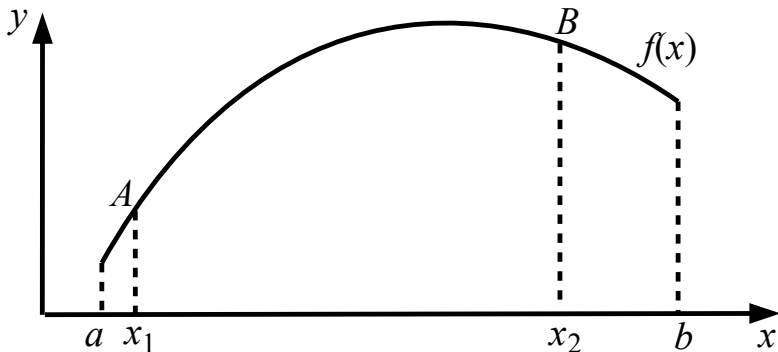
Выпуклость функции



Пусть функция $y = f(x)$ определена на интервале (a, b) .



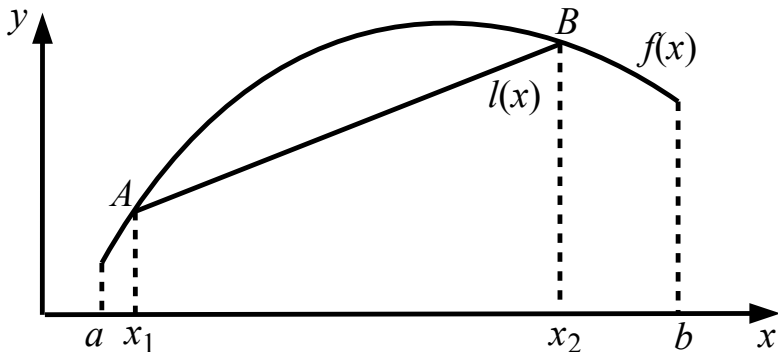
Выпуклость функции



Пусть функция $y = f(x)$ определена на интервале (a, b) . Выберем на графике этой функции произвольные точки A с координатой x_1 и B с координатой x_2 .



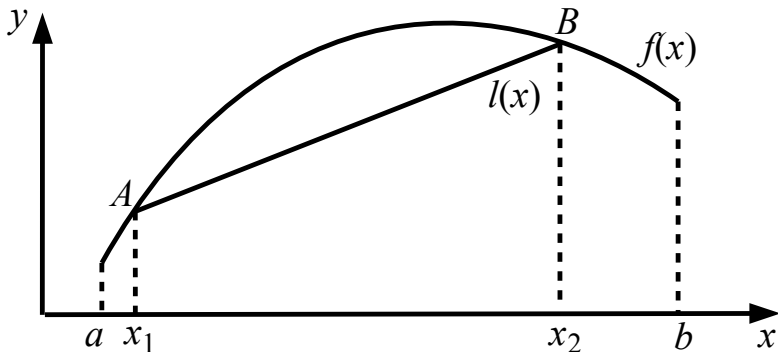
Выпуклость функции



Соединим эти точки отрезком, заданным уравнением $y = l(x)$,



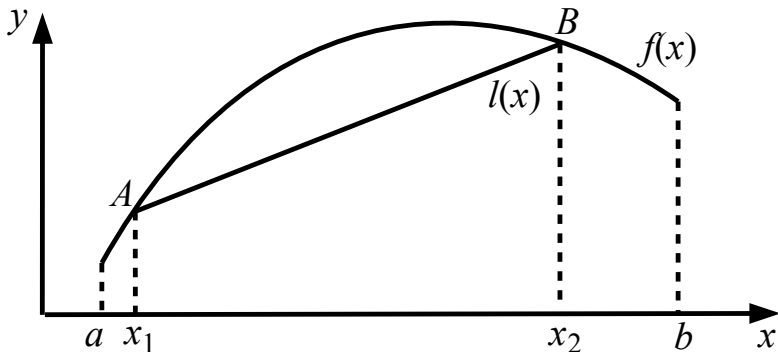
Выпуклость функции



Соединим эти точки отрезком, заданным уравнением $y = l(x)$, где $x_1 \leq x \leq x_2$



Выпуклость функции

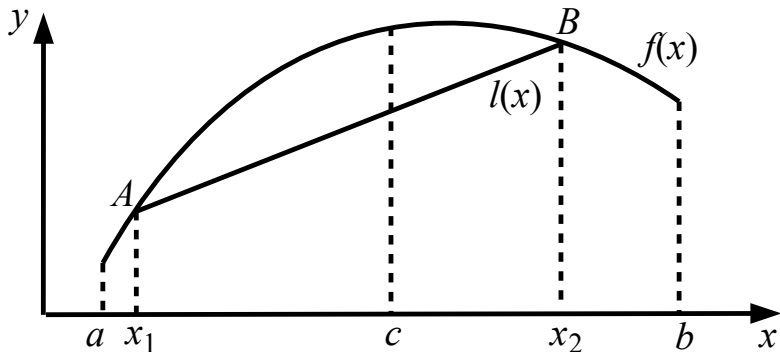


Соединим эти точки отрезком, заданным уравнением $y = l(x)$, где $x_1 \leq x \leq x_2$ и

$$l(x) = \frac{f(x_2)(x - x_1) + f(x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1}.$$



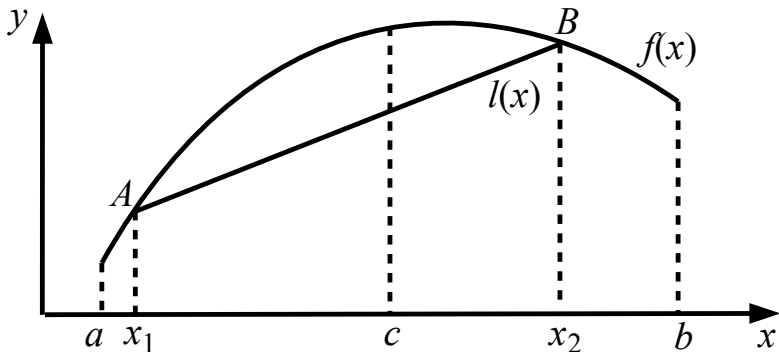
Выпуклость функции



На интервале (x_1, x_2) выберем произвольную точку c .



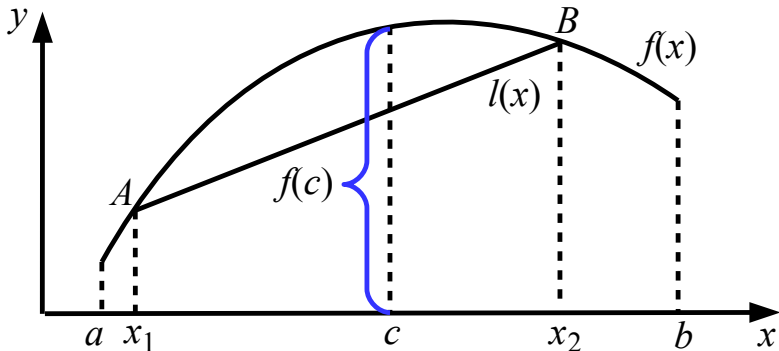
Выпуклость функции



На интервале (x_1, x_2) выберем произвольную точку c . В данной точке:



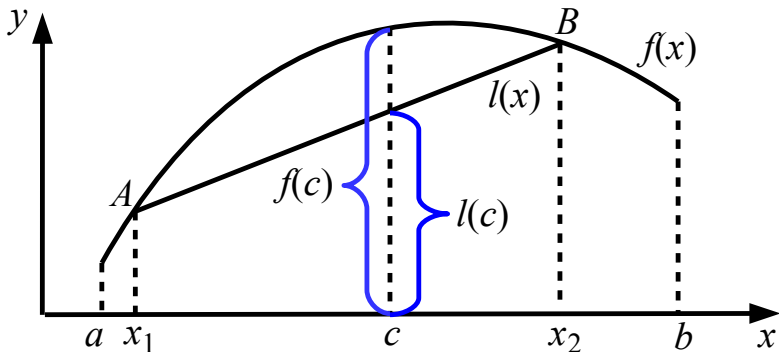
Выпуклость функции



На интервале (x_1, x_2) выберем произвольную точку c . В данной точке: $f(c)$ – это расстояние от оси Ox до графика функции $f(x)$,



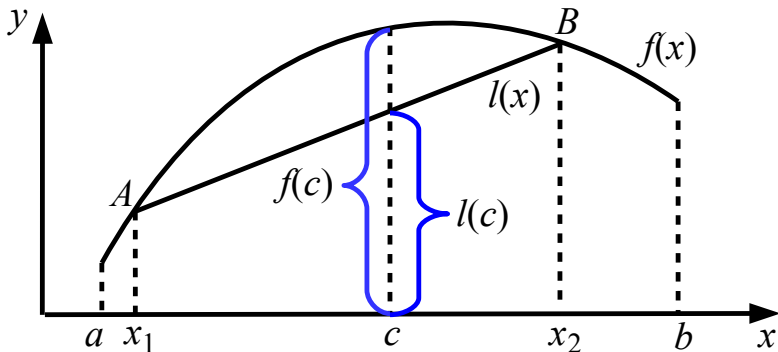
Выпуклость функции



На интервале (x_1, x_2) выберем произвольную точку c . В данной точке: $f(c)$ – это расстояние от оси Ox до графика функции $f(x)$, а $l(c)$ – расстояние от оси Ox до отрезка AB .



Выпуклость функции

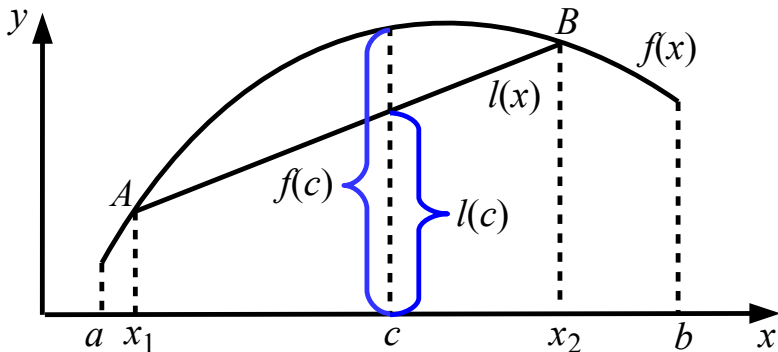


Определение

Функция $y = f(x)$ называется **выпуклой вверх** на (a, b) , если $\forall x_1, x_2 \in (a, b), x_1 < x_2$ и $\forall c \in (x_1, x_2): l(c) \leq f(c)$.



Выпуклость функции



Определение

Функция $y = f(x)$ называется **выпуклой вниз** на (a, b) , если $\forall x_1, x_2 \in (a, b), x_1 < x_2$ и $\forall c \in (x_1, x_2): l(c) \geq f(c)$.



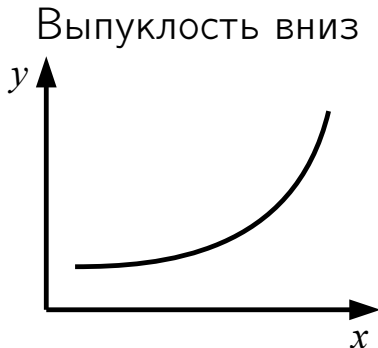
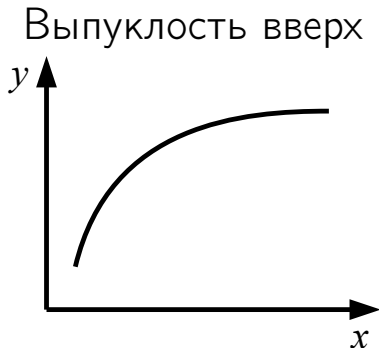
Выпуклость функции

Иллюстрация:



Выпуклость функции

Иллюстрация:



Выпуклость функции

Теорема (достаточное условие выпуклости)*



Выпуклость функции

Теорема (достаточное условие выпуклости)*

Пусть $f(x) \in D^2(a, b)$.



Выпуклость функции

Теорема (достаточное условие выпуклости)*

Пусть $f(x) \in D^2(a, b)$. Если $\forall x \in (a, b)$



Выпуклость функции

Теорема (достаточное условие выпуклости)*

Пусть $f(x) \in D^2(a, b)$. Если $\forall x \in (a, b)$

1) $f''(x) \leq 0$, то $f(x)$ **выпукла вверх**,



Выпуклость функции

Теорема (достаточное условие выпуклости)*

Пусть $f(x) \in D^2(a, b)$. Если $\forall x \in (a, b)$

1) $f''(x) \leq 0$, то $f(x)$ выпукла вверх,

2) $f''(x) \geq 0$, то $f(x)$ выпукла вниз.



Выпуклость функции

Доказательство



Выпуклость функции

Доказательство

Пусть $a < x_1 < x < x_2 < b$.



Выпуклость функции

Доказательство

Пусть $a < x_1 < x < x_2 < b$. Тогда
 $I(x) - f(x)$



Выпуклость функции

Доказательство

Пусть $a < x_1 < x < x_2 < b$. Тогда

$$\begin{aligned} I(x) - f(x) &= \\ &= \frac{f(x_2)(x - x_1) + f(x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1} - \\ &- f(x) \frac{(x - x_1) + (x_2 - x)}{x_2 - x_1} \end{aligned}$$



Выпуклость функции

Доказательство

Пусть $a < x_1 < x < x_2 < b$. Тогда

$$\begin{aligned} I(x) - f(x) &= \\ &= \frac{f(x_2)(x - x_1) + f(x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1} - \\ &- f(x) \frac{(x - x_1) + (x_2 - x)}{x_2 - x_1} \end{aligned}$$



Выпуклость функции

Доказательство

Пусть $a < x_1 < x < x_2 < b$. Тогда

$$\begin{aligned} I(x) - f(x) &= \\ &= \frac{f(x_2)(x - x_1) + f(x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1} - \\ &- f(x) \frac{(x - x_1) + (x_2 - x)}{x_2 - x_1} \end{aligned}$$



Выпуклость функции

Доказательство

Пусть $a < x_1 < x < x_2 < b$. Тогда

$$\begin{aligned} I(x) - f(x) &= \\ &= \frac{f(x_2)(x - x_1) + f(x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1} - \\ &- f(x) \underbrace{\frac{(x - x_1) + (x_2 - x)}{x_2 - x_1}}_{=1} \end{aligned}$$



Выпуклость функции

Доказательство

Пусть $a < x_1 < x < x_2 < b$. Тогда

$$\begin{aligned} I(x) - f(x) &= \\ &= \frac{f(x_2)(x - x_1) + f(x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1} - \\ &- f(x) \underbrace{\frac{(x - x_1) + (x_2 - x)}{x_2 - x_1}}_{=1} = \end{aligned}$$



Выпуклость функции



Выпуклость функции

$$= \frac{(f(x_2) - f(x))(x - x_1) - (f(x) - f(x_1))(x_2 - x)}{x_2 - x_1}$$



Выпуклость функции

$$= \frac{(f(x_2) - f(x))(x - x_1) - (f(x) - f(x_1))(x_2 - x)}{x_2 - x_1} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{по теореме Лагранжа} \\ f(b) - f(a) = f'(c)(b - a), a < c < b \end{array} \right|$$



Выпуклость функции

$$\begin{aligned} &= \frac{(f(x_2) - f(x))(x - x_1) - (f(x) - f(x_1))(x_2 - x)}{x_2 - x_1} = \\ &= \left| \begin{array}{l} \text{по теореме Лагранжа} \\ f(b) - f(a) = f'(c)(b - a), a < c < b \end{array} \right| = \\ &= \frac{f'(\eta)(x_2 - x)(x - x_1) - f'(\xi)(x - x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1} \end{aligned}$$



Выпуклость функции

$$\begin{aligned} &= \frac{(f(x_2) - f(x))(x - x_1) - (f(x) - f(x_1))(x_2 - x)}{x_2 - x_1} = \\ &= \left| \begin{array}{l} \text{по теореме Лагранжа} \\ f(b) - f(a) = f'(c)(b - a), a < c < b \end{array} \right| = \\ &= \frac{f'(\eta)(x_2 - x)(x - x_1) - f'(\xi)(x - x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1} \end{aligned}$$



Выпуклость функции

$$\begin{aligned} &= \frac{(f(x_2) - f(x))(x - x_1) - (f(x) - f(x_1))(x_2 - x)}{x_2 - x_1} = \\ &= \left| \begin{array}{l} \text{по теореме Лагранжа} \\ f(b) - f(a) = f'(c)(b - a), a < c < b \end{array} \right| = \\ &= \frac{f'(\eta)(x_2 - x)(x - x_1) - f'(\xi)(x - x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1} \end{aligned}$$



Выпуклость функции

$$\begin{aligned} &= \frac{(f(x_2) - f(x))(x - x_1) - (f(x) - f(x_1))(x_2 - x)}{x_2 - x_1} = \\ &= \left| \begin{array}{l} \text{по теореме Лагранжа} \\ f(b) - f(a) = f'(c)(b - a), a < c < b \end{array} \right| = \\ &= \frac{f'(\eta)(x_2 - x)(x - x_1) - f'(\xi)(x - x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1} = \end{aligned}$$



Выпуклость функции

=



Выпуклость функции

$$= \frac{(f'(\eta) - f'(\xi))(x - x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1}$$



Выпуклость функции

$$= \frac{(f'(\eta) - f'(\xi))(x - x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{по теореме Лагранжа} \\ f'(b) - f'(a) = f''(c)(b - a), a < c < b \end{array} \right|$$



Выпуклость функции

$$= \frac{(f'(\eta) - f'(\xi))(x - x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{по теореме Лагранжа} \\ f'(b) - f'(a) = f''(c)(b - a), a < c < b \end{array} \right| =$$

$$= \frac{f''(\zeta)(\eta - \xi)(x - x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1}.$$



Выпуклость функции

$$= \frac{(f'(\eta) - f'(\xi))(x - x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{по теореме Лагранжа} \\ f'(b) - f'(a) = f''(c)(b - a), a < c < b \end{array} \right| =$$

$$= \frac{f''(\zeta)(\eta - \xi)(x - x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1}.$$



Выпуклость функции

$$= \frac{(f'(\eta) - f'(\xi))(x - x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{по теореме Лагранжа} \\ f'(b) - f'(a) = f''(c)(b - a), a < c < b \end{array} \right| =$$

$$= \frac{f''(\zeta)(\eta - \xi)(x - x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1}.$$

Здесь $x_1 < \xi < x < \eta < x_2$ и $\xi < \zeta < \eta$.



Выпуклость функции

$$= \frac{(f'(\eta) - f'(\xi))(x - x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{по теореме Лагранжа} \\ f'(b) - f'(a) = f''(c)(b - a), a < c < b \end{array} \right| =$$

$$= \frac{f''(\zeta)(\eta - \xi)(x - x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1}.$$

Здесь $x_1 < \xi < x < \eta < x_2$ и $\xi < \zeta < \eta$.

Поэтому

$$(\eta - \xi), (x - x_1), (x_2 - x), (x_2 - x_1) > 0.$$



Выпуклость функции

Если $f''(\zeta) \leq 0$, то $l(x) - f(x) \leq 0$,



Выпуклость функции

Если $f''(\zeta) \leq 0$, то $l(x) - f(x) \leq 0$, $l(x) \leq f(x)$.



Выпуклость функции

Если $f''(\zeta) \leq 0$, то $l(x) - f(x) \leq 0$, $l(x) \leq f(x)$.
 $\Rightarrow f(x)$ выпукла вверх.



Выпуклость функции

Если $f''(\zeta) \leq 0$, то $l(x) - f(x) \leq 0$, $l(x) \leq f(x)$.
 $\Rightarrow f(x)$ выпукла вверх.

Если $f''(\zeta) \geq 0$, то $l(x) - f(x) \geq 0$,



Выпуклость функции

Если $f''(\zeta) \leq 0$, то $l(x) - f(x) \leq 0$, $l(x) \leq f(x)$.
 $\Rightarrow f(x)$ выпукла вверх.

Если $f''(\zeta) \geq 0$, то $l(x) - f(x) \geq 0$, $l(x) \geq f(x)$.



Выпуклость функции

Если $f''(\zeta) \leq 0$, то $l(x) - f(x) \leq 0$, $l(x) \leq f(x)$.
 $\Rightarrow f(x)$ выпукла вверх.

Если $f''(\zeta) \geq 0$, то $l(x) - f(x) \geq 0$, $l(x) \geq f(x)$.
 $\Rightarrow f(x)$ выпукла вниз.



Выпуклость функции

Определение

Пусть $f(x) \in D(c)$ и $y = L(x)$ – уравнение касательной к графику функции $f(x)$ в точке c .



Выпуклость функции

Определение

Пусть $f(x) \in D(c)$ и $y = L(x)$ – уравнение касательной к графику функции $f(x)$ в точке c . Если разность $f(x) - L(x)$ меняет знак при переходе через точку c , то c называется **точкой перегиба** функции $f(x)$.



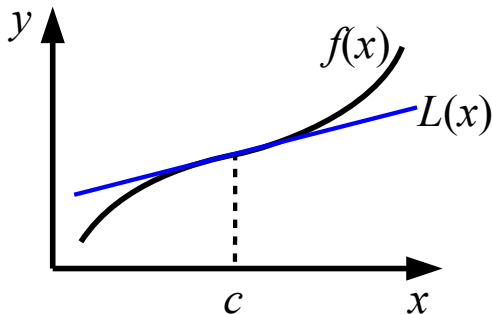
Выпуклость функции

Поведение функции в окрестности точки перегиба:



Выпуклость функции

Поведение функции в окрестности точки перегиба:



Выпуклость функции

Теорема (необходимое условие перегиба)*



Выпуклость функции

Теорема (необходимое условие перегиба)*

Если в точке перегиба существует вторая производная, то она равна нулю.



Выпуклость функции

Доказательство



Выпуклость функции

Доказательство

Пусть в точке c существует вторая производная $f''(c)$,



Выпуклость функции

Доказательство

Пусть в точке c существует вторая производная $f''(c)$, и $y = L(x)$ – уравнение касательной к графику функции $f(x)$ в точке c .



Выпуклость функции

Доказательство

Пусть в точке c существует вторая производная $f''(c)$, и $y = L(x)$ – уравнение касательной к графику функции $f(x)$ в точке c . Тогда

$$L(x) = f(c) + f'(c)(x - c).$$



Выпуклость функции

По формуле Тейлора **второго порядка** имеем:



Выпуклость функции

По формуле Тейлора **второго порядка** имеем:

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x - c) + \frac{1}{2}f''(c)(x - c)^2 + o((x - c)^2)$$



Выпуклость функции

По формуле Тейлора **второго порядка** имеем:

$$\begin{aligned} f(x) &= \\ f(c) + f'(c)(x - c) + \frac{1}{2}f''(c)(x - c)^2 + o((x - c)^2) &= \\ = L(x) + \frac{1}{2}f''(c)(x - c)^2 + o((x - c)^2). \end{aligned}$$



Выпуклость функции

По формуле Тейлора **второго порядка** имеем:

$$f(x) =$$

$$f(c) + f'(c)(x - c) + \frac{1}{2}f''(c)(x - c)^2 + o((x - c)^2) =$$

$$= L(x) + \frac{1}{2}f''(c)(x - c)^2 + o((x - c)^2).$$



Выпуклость функции

По формуле Тейлора **второго порядка** имеем:

$$\begin{aligned} f(x) &= \\ f(c) + f'(c)(x - c) + \frac{1}{2}f''(c)(x - c)^2 + o((x - c)^2) &= \\ = L(x) + \frac{1}{2}f''(c)(x - c)^2 + o((x - c)^2). \\ \Rightarrow f(x) - L(x) &= \frac{1}{2}f''(c)(x - c)^2 + o((x - c)^2). \end{aligned}$$



Выпуклость функции

Величина $o((x - c)^2)$ стремится к нулю быстрее, чем $(x - c)^2$, когда $x \rightarrow c$.



Выпуклость функции

Величина $o((x - c)^2)$ стремится к нулю быстрее, чем $(x - c)^2$, когда $x \rightarrow c$.

Поэтому

$\exists U(c) \forall x \in U(c) :$



Выпуклость функции

Величина $o((x - c)^2)$ стремится к нулю быстрее, чем $(x - c)^2$, когда $x \rightarrow c$.

Поэтому

$\exists U(c) \forall x \in U(c) :$

$$\left| \frac{1}{2} f''(c)(x - c)^2 \right| > |o((x - c)^2)|$$



Выпуклость функции

Величина $o((x - c)^2)$ стремится к нулю быстрее, чем $(x - c)^2$, когда $x \rightarrow c$.

Поэтому

$\exists U(c) \forall x \in U(c) :$

$$\left| \frac{1}{2} f''(c)(x - c)^2 \right| > |o((x - c)^2)|$$

при условии, что $f''(c) \neq 0$.



Выпуклость функции

В этом случае в $U(c)$ знак $f(x) - L(x)$ будет совпадать со знаком $f''(c)$,



Выпуклость функции

В этом случае в $U(c)$ знак $f(x) - L(x)$ будет совпадать со знаком $f''(c)$, т.е. $f(x) - L(x)$ не будет менять знак при переходе через точку c ,



Выпуклость функции

В этом случае в $U(c)$ знак $f(x) - L(x)$ будет совпадать со знаком $f''(c)$, т.е. $f(x) - L(x)$ не будет менять знак при переходе через точку c , а значит, c не будет точкой перегиба.



Выпуклость функции

В этом случае в $U(c)$ знак $f(x) - L(x)$ будет совпадать со знаком $f''(c)$, т.е. $f(x) - L(x)$ не будет менять знак при переходе через точку c , а значит, c не будет точкой перегиба.

Значит, если c – точка перегиба, то $f''(c) = 0$.



Теорема (достаточное условие перегиба)



Выпуклость функции

Теорема (достаточное условие перегиба)

Пусть функция $y = f(x)$ дважды дифференцируема в некоторой окрестности точки c , кроме, быть может, самой точки c , в которой она является дифференцируемой.



Выпуклость функции

Теорема (достаточное условие перегиба)

Пусть функция $y = f(x)$ дважды дифференцируема в некоторой окрестности точки c , кроме, быть может, самой точки c , в которой она является дифференцируемой. Если при переходе через точку c вторая производная $f''(x)$ меняет знак, то точка c — это **точка перегиба**.



Схема полного исследования функции



Схема полного исследования функции

Функция исследуется согласно следующей схеме:



Схема полного исследования функции

Функция исследуется согласно следующей схеме:

1. Область определения, четность/нечетность, периодичность.
2. Точки пересечения графика функции с осями координат.
3. Интервалы знакопостоянства.



Схема полного исследования функции

4. Асимптоты:

- а) вертикальные,
- б) наклонные (в частности, горизонтальные).

5. Точки локального экстремума, возрастание и убывание функции.

6. Точки перегиба, выпуклость вверх и вниз.



Схема полного исследования функции

Замечание



Схема полного исследования функции

Замечание

При нахождении области определения функции следует обращать внимание на те точки, в которых функция обращается в бесконечность (например, нули знаменателя).



Схема полного исследования функции

Замечание

При нахождении области определения функции следует обращать внимание на те точки, в которых функция обращается в бесконечность (например, нули знаменателя). В таких точках определены вертикальные асимптоты.



Схема полного исследования функции

Замечание



Схема полного исследования функции

Замечание

Если график функции обладает симметрией (например, относительно оси ординат, если функция четная, или относительно начала координат, если функция нечетная), то достаточно выполнить исследование лишь для его части.



Схема полного исследования функции

Замечание

Если график функции обладает симметрией (например, относительно оси ординат, если функция четная, или относительно начала координат, если функция нечетная), то достаточно выполнить исследование лишь для его части. Остальная часть графика получается в соответствии с симметрией.



Схема полного исследования функции

Замечание



Схема полного исследования функции

Замечание

Если функция периодична, то ее график строится на отрезке, длина которого равна наименьшему из возможных периодов.

