

Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана
Факультет “Фундаментальные науки”
Кафедра “Высшая математика”

Математический анализ

Модуль 4

Приложения дифференциального исчисления

Лекция 4.2

для ГУИМЦ, 2026

Койфман К.Г., Семакин А.Н.

Монотонность функции



Монотонность функции

Определение

Функция $y = f(x)$ называется
возрастающей на интервале (a, b) , если
$$\forall x_1, x_2 \in (a, b), x_1 < x_2 : f(x_1) \leq f(x_2).$$



Монотонность функции

Определение

Функция $y = f(x)$ называется **возрастающей** на интервале (a, b) , если

$$\forall x_1, x_2 \in (a, b), x_1 < x_2 : f(x_1) \leq f(x_2).$$

Определение

Функция $y = f(x)$ называется **строго возрастающей** на интервале (a, b) , если

$$\forall x_1, x_2 \in (a, b), x_1 < x_2 : f(x_1) < f(x_2).$$



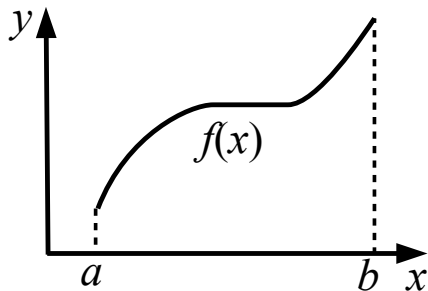
Монотонность функции

Иллюстрация:



Монотонность функции

Иллюстрация:

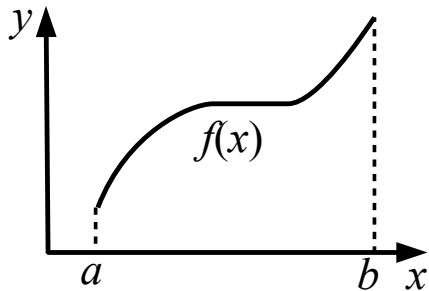


Возрастающая
функция

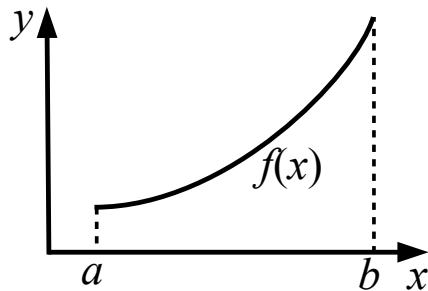


Монотонность функции

Иллюстрация:



Возрастающая
функция



Строго возрастающая
функция



Определение

Функция $y = f(x)$ называется **убывающей** на интервале (a, b) , если

$$\forall x_1, x_2 \in (a, b), x_1 < x_2 : f(x_1) \geq f(x_2).$$



Монотонность функции

Определение

Функция $y = f(x)$ называется **убывающей** на интервале (a, b) , если

$$\forall x_1, x_2 \in (a, b), x_1 < x_2 : f(x_1) \geq f(x_2).$$

Определение

Функция $y = f(x)$ называется **строго убывающей** на интервале (a, b) , если

$$\forall x_1, x_2 \in (a, b), x_1 < x_2 : f(x_1) > f(x_2).$$



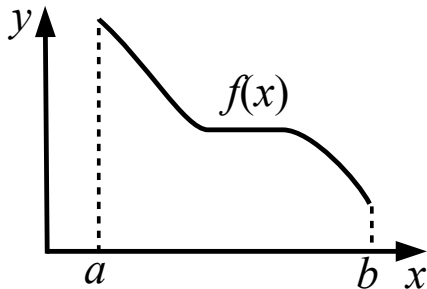
Монотонность функции

Иллюстрация:



Монотонность функции

Иллюстрация:

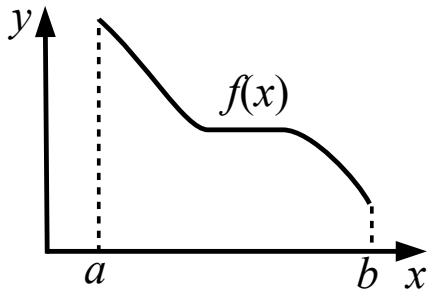


Убывающая
функция

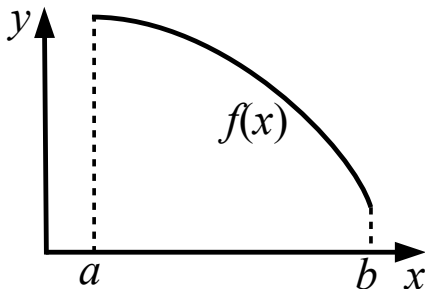


Монотонность функции

Иллюстрация:



Убывающая
функция



Строго убывающая
функция



Монотонность функции

Таким образом, если функция возрастает или убывает, то ее значения связаны **нестрогими** неравенствами. С другой стороны, значения строго возрастающей или строго убывающей функции связаны **строгими** неравенствами. Объединим функции перечисленных типов в следующие два класса:



Монотонность функции

Определение

Возрастающие и убывающие функции называются **МОНОТОННЫМИ**.



Монотонность функции

Определение

Возрастающие и убывающие функции называются **МОНОТОННЫМИ**.

Определение

Строго возрастающие и строго убывающие функции называются **строго монотонными**.



Монотонность функции

Обозначения



Монотонность функции

Обозначения

$$f(x) \in C(c), f(x) \in C(a, b), f(x) \in C[a, b]$$



Монотонность функции

Обозначения

$f(x) \in C(c), f(x) \in C(a, b), f(x) \in C[a, b]$

функция $f(x)$ непрерывна в точке c ,



Монотонность функции

Обозначения

$f(x) \in C(c)$, $f(x) \in C(a, b)$, $f(x) \in C[a, b]$

функция $f(x)$ непрерывна в точке c ,
на интервале (a, b) ,



Монотонность функции

Обозначения

$f(x) \in C(c), f(x) \in C(a, b), f(x) \in C[a, b]$

функция $f(x)$ непрерывна в точке c ,
на интервале (a, b) , на отрезке $[a, b]$.



Монотонность функции

Обозначения

$f(x) \in C(c), f(x) \in C(a, b), f(x) \in C[a, b]$

функция $f(x)$ непрерывна в точке c ,
на интервале (a, b) , на отрезке $[a, b]$.



Монотонность функции

Обозначения

$$f(x) \in D(c), f(x) \in D(a, b), f(x) \in D[a, b]$$



Монотонность функции

Обозначения

$f(x) \in D(c), f(x) \in D(a, b), f(x) \in D[a, b]$

функция $f(x)$ дифференцируема в точке c ,



Монотонность функции

Обозначения

$f(x) \in D(c)$, $f(x) \in D(a, b)$, $f(x) \in D[a, b]$
функция $f(x)$ дифференцируема в точке c ,
на интервале (a, b) ,



Монотонность функции

Обозначения

$f(x) \in D(c), f(x) \in D(a, b), f(x) \in D[a, b]$

функция $f(x)$ дифференцируема в точке c ,
на интервале (a, b) , на отрезке $[a, b]$,



Монотонность функции

Обозначения

$$f(x) \in D(c), f(x) \in D(a, b), f(x) \in D[a, b]$$

функция $f(x)$ дифференцируема в точке c ,
на интервале (a, b) , на отрезке $[a, b]$, т.е. имеет
производную $f'(x)$ на этих промежутках.



Монотонность функции

Обозначения

$$f(x) \in D^2(c), f(x) \in D^2(a, b), f(x) \in D^2[a, b]$$



Монотонность функции

Обозначения

$f(x) \in D^2(c)$, $f(x) \in D^2(a, b)$, $f(x) \in D^2[a, b]$

функция $f(x)$ дважды дифференцируема

в точке c ,



Монотонность функции

Обозначения

$f(x) \in D^2(c)$, $f(x) \in D^2(a, b)$, $f(x) \in D^2[a, b]$
функция $f(x)$ дважды дифференцируема
в точке c , на интервале (a, b) ,



Монотонность функции

Обозначения

$f(x) \in D^2(c)$, $f(x) \in D^2(a, b)$, $f(x) \in D^2[a, b]$
функция $f(x)$ дважды дифференцируема
в точке c , на интервале (a, b) , на отрезке $[a, b]$,



Монотонность функции

Обозначения

$f(x) \in D^2(c), f(x) \in D^2(a, b), f(x) \in D^2[a, b]$
функция $f(x)$ дважды дифференцируема
в точке c , на интервале (a, b) , на отрезке $[a, b]$,
т.е. имеет производные $f'(x), f''(x)$ на этих
промежутках.



Монотонность функции

Теорема (достаточное условие монотонности)*



Монотонность функции

Теорема (достаточное условие монотонности)*

Пусть $f(x) \in D(a, b)$.



Монотонность функции

Теорема (достаточное условие монотонности)*

Пусть $f(x) \in D(a, b)$.

Если

$$\forall x \in (a, b) \ f'(x) > 0,$$

то на интервале (a, b) функция $y = f(x)$
строго возрастает.



Монотонность функции

Теорема (достаточное условие монотонности)*

Пусть $f(x) \in D(a, b)$.

Если

$$\forall x \in (a, b) \ f'(x) > 0,$$

то на интервале (a, b) функция $y = f(x)$
строго возрастает.

Если

$$\forall x \in (a, b) \ f'(x) < 0,$$

то на интервале (a, b) функция $y = f(x)$
строго убывает.



Монотонность функции

Доказательство



Монотонность функции

Доказательство

Пусть $x_1, x_2 \in (a, b)$ и $x_1 < x_2$.



Монотонность функции

Доказательство

Пусть $x_1, x_2 \in (a, b)$ и $x_1 < x_2$.

По теореме Лагранжа

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c), c \in (x_1, x_2).$$



Откуда

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1).$$



Монотонность функции

Откуда

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1).$$

Поскольку $x_2 - x_1 > 0$, получаем



Монотонность функции

Откуда

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1).$$

Поскольку $x_2 - x_1 > 0$, получаем

1) если $f'(c) > 0$,



Монотонность функции

Откуда

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1).$$

Поскольку $x_2 - x_1 > 0$, получаем

1) если $f'(c) > 0$, то $f(x_2) - f(x_1) > 0$



Монотонность функции

Откуда

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1).$$

Поскольку $x_2 - x_1 > 0$, получаем

1) если $f'(c) > 0$, то $f(x_2) - f(x_1) > 0$ или $f(x_2) > f(x_1)$,



Монотонность функции

Откуда

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1).$$

Поскольку $x_2 - x_1 > 0$, получаем

1) если $f'(c) > 0$, то $f(x_2) - f(x_1) > 0$ или $f(x_2) > f(x_1)$, т.е. $f(x)$ строго возрастает,



Откуда

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1).$$

Поскольку $x_2 - x_1 > 0$, получаем

- 1) если $f'(c) > 0$, то $f(x_2) - f(x_1) > 0$ или $f(x_2) > f(x_1)$, т.е. $f(x)$ строго возрастает,
- 2) если $f'(c) < 0$,



Откуда

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1).$$

Поскольку $x_2 - x_1 > 0$, получаем

- 1) если $f'(c) > 0$, то $f(x_2) - f(x_1) > 0$ или $f(x_2) > f(x_1)$, т.е. $f(x)$ строго возрастает,
- 2) если $f'(c) < 0$, то $f(x_2) - f(x_1) < 0$



Откуда

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1).$$

Поскольку $x_2 - x_1 > 0$, получаем

- 1) если $f'(c) > 0$, то $f(x_2) - f(x_1) > 0$ или $f(x_2) > f(x_1)$, т.е. $f(x)$ строго возрастает,
- 2) если $f'(c) < 0$, то $f(x_2) - f(x_1) < 0$ или $f(x_2) < f(x_1)$,



Откуда

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1).$$

Поскольку $x_2 - x_1 > 0$, получаем

- 1) если $f'(c) > 0$, то $f(x_2) - f(x_1) > 0$ или $f(x_2) > f(x_1)$, т.е. $f(x)$ строго возрастает,
- 2) если $f'(c) < 0$, то $f(x_2) - f(x_1) < 0$ или $f(x_2) < f(x_1)$, т.е. $f(x)$ строго убывает.



Экстремум функции



Экстремум функции

Определение

Точка c называется **критической точкой** функции $y = f(x)$, если ее производная $f'(c)$ равна нулю или не существует.



Экстремум функции

Определение

Точка c называется **точкой локального максимума** функции $y = f(x)$, если

$$\exists \overset{\circ}{U}(c) \forall x \in \overset{\circ}{U}(c) : f(x) \leq f(c).$$



Экстремум функции

Определение

Точка c называется **точкой локального максимума** функции $y = f(x)$, если

$$\exists \mathring{U}(c) \forall x \in \mathring{U}(c) : f(x) \leq f(c).$$

Определение

Точка c называется **точкой строгого локального максимума** функции $y = f(x)$, если

$$\exists \mathring{U}(c) \forall x \in \mathring{U}(c) : f(x) < f(c).$$



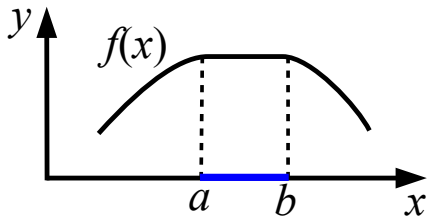
Экстремум функции

Иллюстрация:



Экстремум функции

Иллюстрация:

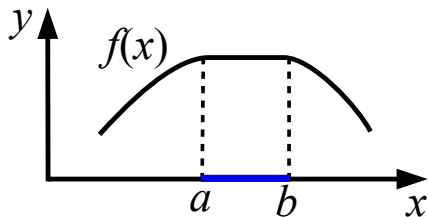


Каждая точка отрезка
 $[a, b]$ – это точка
локального максимума

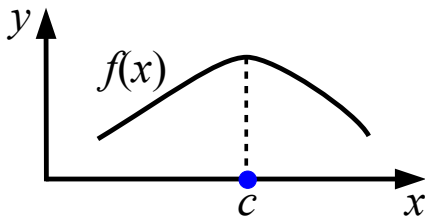


Экстремум функции

Иллюстрация:



Каждая точка отрезка $[a, b]$ – это точка локального максимума



Точка c – это точка строгого локального максимума



Экстремум функции

Определение

Точка c называется **точкой локального минимума** функции $y = f(x)$, если

$$\exists \overset{\circ}{U}(c) \forall x \in \overset{\circ}{U}(c) : f(x) \geq f(c).$$



Экстремум функции

Определение

Точка c называется **точкой локального минимума** функции $y = f(x)$, если

$$\exists \mathring{U}(c) \forall x \in \mathring{U}(c) : f(x) \geq f(c).$$

Определение

Точка c называется **точкой строгого локального минимума** функции $y = f(x)$, если

$$\exists \mathring{U}(c) \forall x \in \mathring{U}(c) : f(x) > f(c).$$



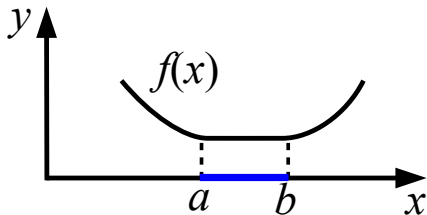
Экстремум функции

Иллюстрация:



Экстремум функции

Иллюстрация:

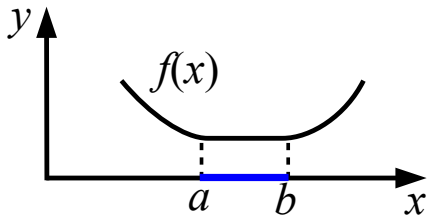


Каждая точка отрезка
 $[a, b]$ – это точка
локального минимума

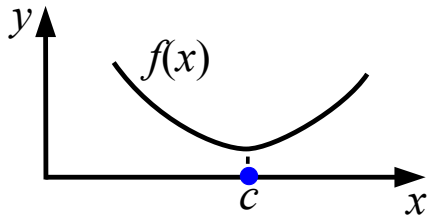


Экстремум функции

Иллюстрация:



Каждая точка отрезка $[a, b]$ – это точка локального минимума



Точка c – это точка строгого локального минимума



Экстремум функции

Определение

Точки локального максимума и минимума функции также называются

точками экстремума функции.



Экстремум функции

Определение

Точки локального максимума и минимума функции также называются

точками экстремума функции.

Точки строгого локального максимума и минимума функции называются

точками строгого экстремума функции.



Экстремум функции

Определение

Значение функции в точке локального максимума называется ее

локальным максимумом.



Экстремум функции

Определение

Значение функции в точке локального максимума называется ее

локальным максимумом.

Значение функции в точке локального минимума называется ее

локальным минимумом.



Экстремум функции

Определение

Значение функции в точке локального максимума называется ее

локальным максимумом.

Значение функции в точке локального минимума называется ее

локальным минимумом.

Локальные максимум и минимум функции называются **экстремумами функции.**



Замечание



Замечание

Аналогично определяется

строгий экстремум функции.



Условия существования экстремума



Условия существования экстремума

Теорема (необходимое условие экстремума)



Условия существования экстремума

Теорема (необходимое условие экстремума)

Если точка c является точкой экстремума функции $y = f(x)$, то в этой точке производная $f'(c)$ равна нулю или не существует.



Условия существования экстремума

Если $f'(c) = 0$, то в точке c функция имеет
гладкий экстремум.



Условия существования экстремума

Если $f'(c) = 0$, то в точке c функция имеет **гладкий экстремум**.

Если $f'(c)$ не существует, то в точке c функция имеет **острый экстремум**.



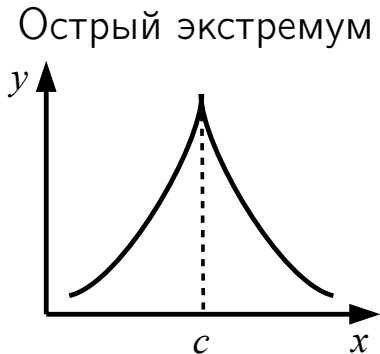
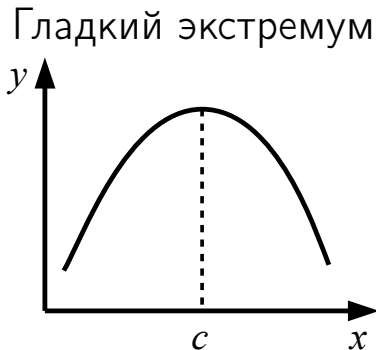
Условия существования экстремума

Иллюстрация:



Условия существования экстремума

Иллюстрация:



Условия существования экстремума

Теорема (достаточное условие экстремума
по первой производной)*



Условия существования экстремума

Теорема (достаточное условие экстремума по первой производной)*

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в некоторой окрестности точки c , кроме, быть может, самой точки c , в которой она является непрерывной.



Условия существования экстремума

Теорема (достаточное условие экстремума по первой производной)*

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в некоторой окрестности точки c , кроме, быть может, самой точки c , в которой она является непрерывной. Тогда, если $f'(x)$ меняет знак при переходе через точку c , то точка c является точкой строгого экстремума.



Условия существования экстремума

Доказательство



Условия существования экстремума

Доказательство

Рассмотрим случай

$$f'(x) > 0 \text{ для } x < c \text{ и } f'(x) < 0 \text{ для } x > c.$$



Условия существования экстремума

Доказательство

Рассмотрим случай

$$f'(x) > 0 \text{ для } x < c \text{ и } f'(x) < 0 \text{ для } x > c.$$

По теореме Лагранжа

$$f(x) - f(c) = f'(\xi)(x - c),$$

где число ξ лежит на интервале

с концами x и c .



Условия существования экстремума

$$f(x) - f(c) = f'(\xi)(x - c)$$



Условия существования экстремума

$$f(x) - f(c) = f'(\xi)(x - c)$$

Если $x < c$, то $x - c < 0$, $f'(\xi) > 0$.



Условия существования экстремума

$$f(x) - f(c) = f'(\xi)(x - c)$$

Если $x < c$, то $x - c < 0$, $f'(\xi) > 0$.

$$\Rightarrow f(x) - f(c) < 0,$$



Условия существования экстремума

$$f(x) - f(c) = f'(\xi)(x - c)$$

Если $x < c$, то $x - c < 0$, $f'(\xi) > 0$.

$$\Rightarrow f(x) - f(c) < 0, f(x) < f(c).$$



Условия существования экстремума

$$f(x) - f(c) = f'(\xi)(x - c)$$

Если $x < c$, то $x - c < 0$, $f'(\xi) > 0$.

$\Rightarrow f(x) - f(c) < 0$, $f(x) < f(c)$.

Если $x > c$, то $x - c > 0$, $f'(\xi) < 0$.



Условия существования экстремума

$$f(x) - f(c) = f'(\xi)(x - c)$$

Если $x < c$, то $x - c < 0$, $f'(\xi) > 0$.

$$\Rightarrow f(x) - f(c) < 0, f(x) < f(c).$$

Если $x > c$, то $x - c > 0$, $f'(\xi) < 0$.

$$\Rightarrow f(x) - f(c) < 0,$$



Условия существования экстремума

$$f(x) - f(c) = f'(\xi)(x - c)$$

Если $x < c$, то $x - c < 0$, $f'(\xi) > 0$.

$$\Rightarrow f(x) - f(c) < 0, f(x) < f(c).$$

Если $x > c$, то $x - c > 0$, $f'(\xi) < 0$.

$$\Rightarrow f(x) - f(c) < 0, f(x) < f(c).$$



Условия существования экстремума

$$f(x) - f(c) = f'(\xi)(x - c)$$

Если $x < c$, то $x - c < 0$, $f'(\xi) > 0$.

$$\Rightarrow f(x) - f(c) < 0, f(x) < f(c).$$

Если $x > c$, то $x - c > 0$, $f'(\xi) < 0$.

$$\Rightarrow f(x) - f(c) < 0, f(x) < f(c).$$

$\Rightarrow c$ – точка строгого локального максимума.



Условия существования экстремума

$$f(x) - f(c) = f'(\xi)(x - c)$$

Если $x < c$, то $x - c < 0$, $f'(\xi) > 0$.

$$\Rightarrow f(x) - f(c) < 0, f(x) < f(c).$$

Если $x > c$, то $x - c > 0$, $f'(\xi) < 0$.

$$\Rightarrow f(x) - f(c) < 0, f(x) < f(c).$$

$\Rightarrow c$ – точка строгого локального максимума.

Случай локального минимума
рассматривается аналогично. ■



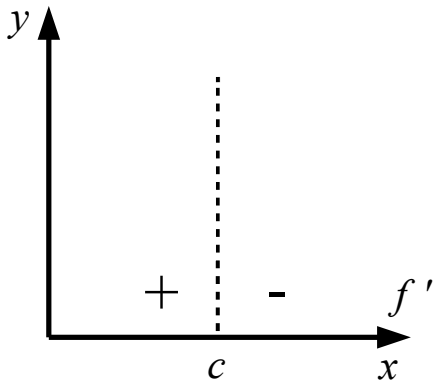
Условия существования экстремума

Иллюстрация:



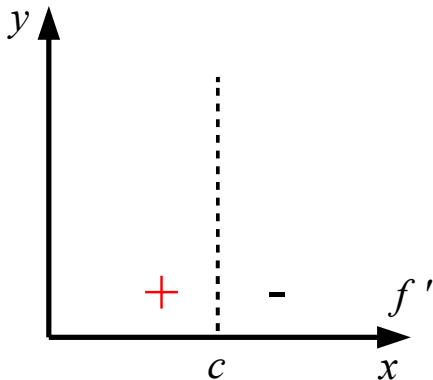
Условия существования экстремума

Иллюстрация:



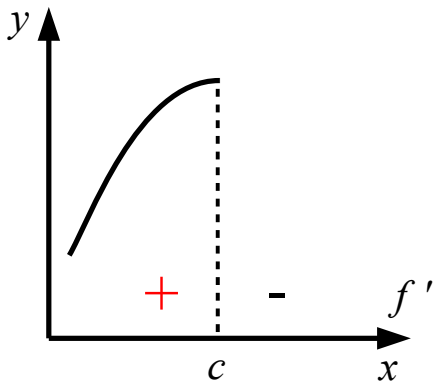
Условия существования экстремума

Иллюстрация:



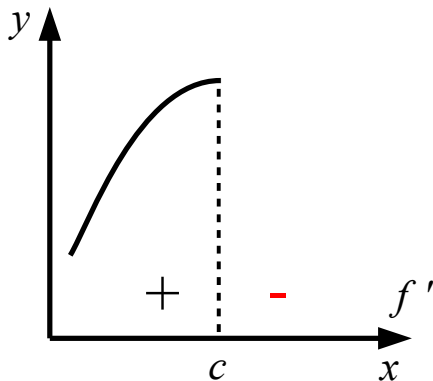
Условия существования экстремума

Иллюстрация:



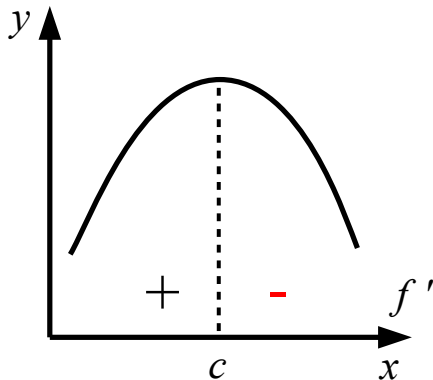
Условия существования экстремума

Иллюстрация:



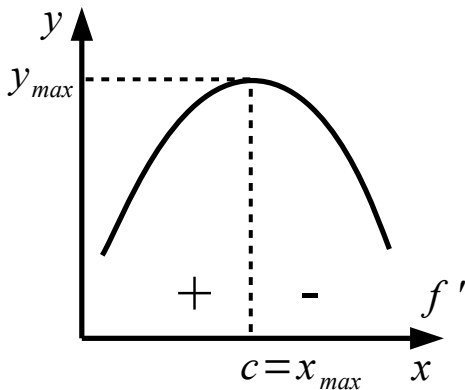
Условия существования экстремума

Иллюстрация:



Условия существования экстремума

Иллюстрация:

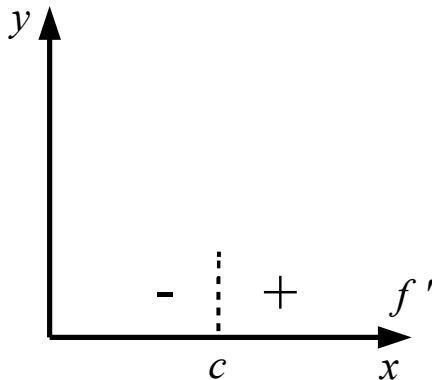
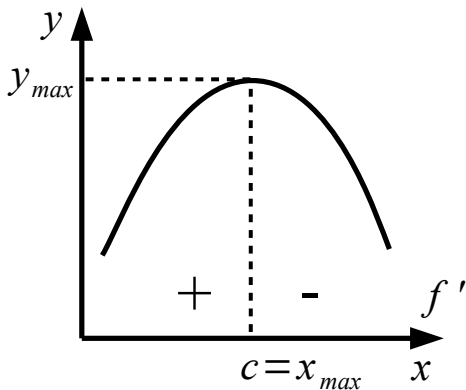


Строгий локальный
максимум



Условия существования экстремума

Иллюстрация:

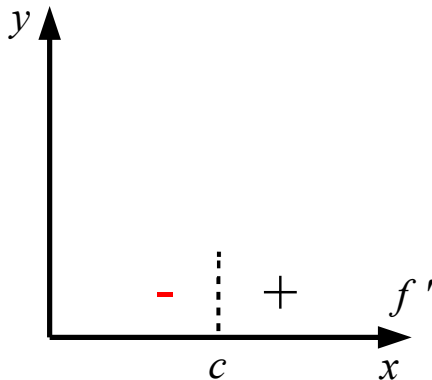
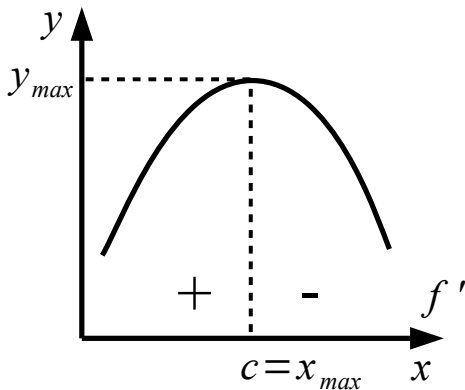


Строгий локальный
максимум



Условия существования экстремума

Иллюстрация:

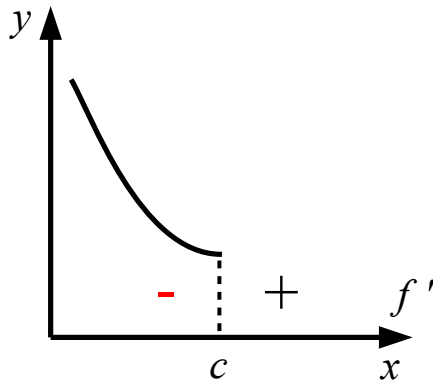
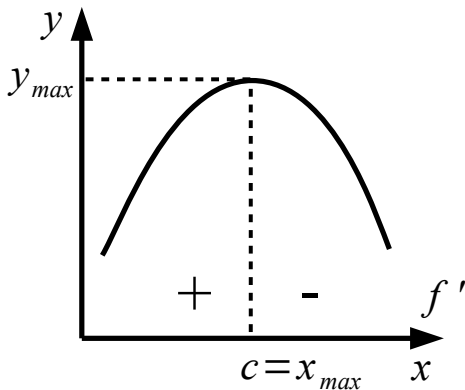


Строгий локальный
максимум



Условия существования экстремума

Иллюстрация:

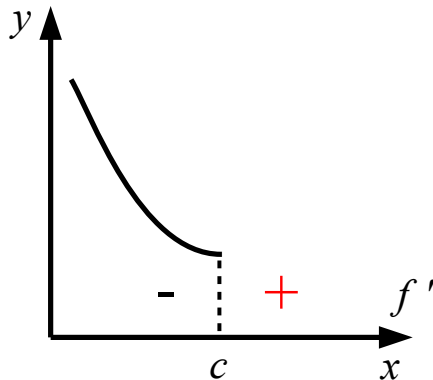
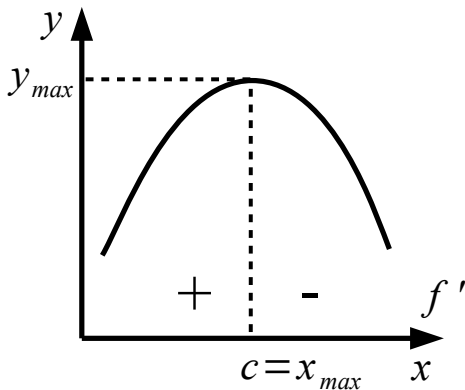


Строгий локальный
максимум



Условия существования экстремума

Иллюстрация:

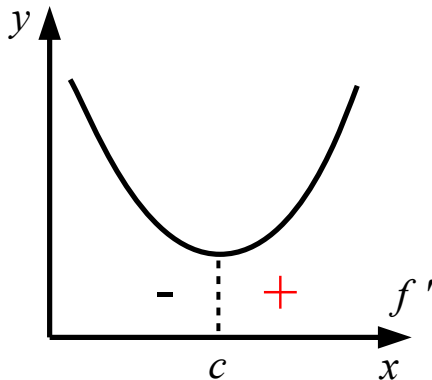
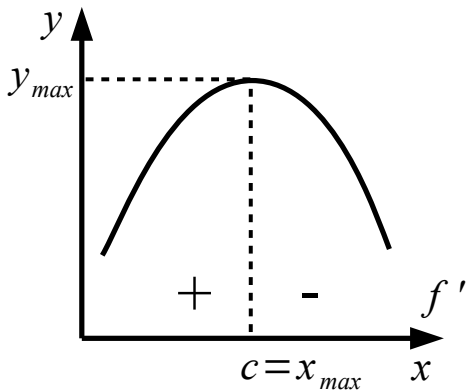


Строгий локальный
максимум



Условия существования экстремума

Иллюстрация:

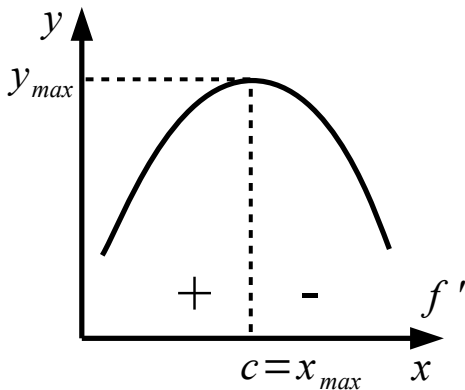


Строгий локальный
максимум

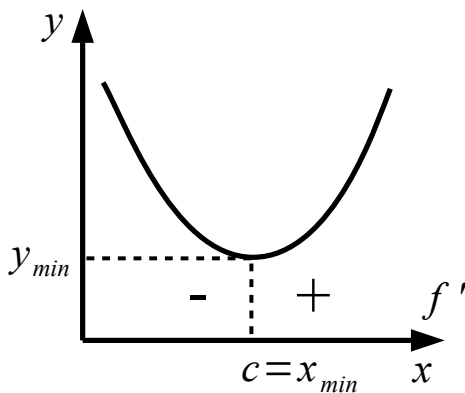


Условия существования экстремума

Иллюстрация:



Строгий локальный
максимум



Строгий локальный
минимум



Условия существования экстремума

Теорема (достаточное условие экстремума по второй производной)



Условия существования экстремума

Теорема (достаточное условие экстремума
по второй производной)

Пусть $f(x) \in D^2(c)$, $f'(c) = 0$, $f''(c) \neq 0$.



Условия существования экстремума

Теорема (достаточное условие экстремума по второй производной)

Пусть $f(x) \in D^2(c)$, $f'(c) = 0$, $f''(c) \neq 0$.

Если

$$f''(c) < 0,$$

то c – точка строгого локального максимума.



Условия существования экстремума

Теорема (достаточное условие экстремума по второй производной)

Пусть $f(x) \in D^2(c)$, $f'(c) = 0$, $f''(c) \neq 0$.

Если

$$f''(c) < 0,$$

то c – точка строгого локального максимума.

Если

$$f''(c) > 0,$$

то c – точка строгого локального минимума.

