

Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана
Факультет “Фундаментальные науки”
Кафедра “Высшая математика”

Математический анализ

Модуль 4

Приложения дифференциального исчисления

Лекция 4.1

для ГУИМЦ, 2026

Койфман К.Г., Семакин А.Н.

Формула Тейлора



Определение

Многочленом Тейлора степени n

функции $y = f(x)$ в точке c называется
многочлен вида

$$P_n(x) = f(c) + \frac{1}{1!}f'(c)(x - c) + \\ + \frac{1}{2!}f''(c)(x - c)^2 + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(c)(x - c)^n.$$



Формула Тейлора

Свойство многочлена Тейлора*



Формула Тейлора

Свойство многочлена Тейлора*

В точке c совпадают значения функции и ее многочлена Тейлора, а также значения их первых n производных,



Формула Тейлора

Свойство многочлена Тейлора*

В точке c совпадают значения функции и ее многочлена Тейлора, а также значения их первых n производных, т.е.

$$P_n(c) = f(c), P'_n(c) = f'(c), \dots, P_n^{(n)}(c) = f^{(n)}(c).$$



Формула Тейлора

Доказательство



Формула Тейлора

Доказательство

$$P_n(c) =$$



Формула Тейлора

Доказательство

$$P_n(c) = f(c) + \frac{1}{1!}f'(c)(c - c) + \\ + \frac{1}{2!}f''(c)(c - c)^2 + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(c)(c - c)^n$$



Формула Тейлора

Доказательство

$$\begin{aligned}P_n(c) &= f(c) + \frac{1}{1!}f'(c)(c - c) + \\&+ \frac{1}{2!}f''(c)(c - c)^2 + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(c)(c - c)^n = \\&= f(c) + \frac{1}{1!}f'(c) \cdot 0 + \frac{1}{2!}f''(c) \cdot 0 + \dots + \\&+ \frac{1}{n!}f^{(n)}(c) \cdot 0\end{aligned}$$



Формула Тейлора

Доказательство

$$\begin{aligned}P_n(c) &= f(c) + \frac{1}{1!}f'(c)(c - c) + \\&+ \frac{1}{2!}f''(c)(c - c)^2 + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(c)(c - c)^n = \\&= f(c) + \frac{1}{1!}f'(c) \cdot 0 + \frac{1}{2!}f''(c) \cdot 0 + \dots + \\&+ \frac{1}{n!}f^{(n)}(c) \cdot 0 = f(c).\end{aligned}$$



Формула Тейлора

$$P'_n(x) =$$



Формула Тейлора

$$P'_n(x) = \frac{1}{1!}f'(c) + \frac{1}{2!}2f''(c)(x - c) + \dots + \\ + \frac{1}{n!}nf^{(n)}(c)(x - c)^{n-1}.$$



Формула Тейлора

$$P'_n(c) =$$



Формула Тейлора

$$P'_n(c) = \frac{1}{1!}f'(c) + \frac{1}{2!}2f''(c)(c - c) + \dots + \\ + \frac{1}{n!}nf^{(n)}(c)(c - c)^{n-1}$$



Формула Тейлора

$$\begin{aligned} P'_n(c) &= \frac{1}{1!}f'(c) + \frac{1}{2!}2f''(c)(c - c) + \dots + \\ &\quad + \frac{1}{n!}nf^{(n)}(c)(c - c)^{n-1} = \\ &= \frac{1}{1!}f'(c) + \frac{1}{2!}2f''(c) \cdot 0 + \dots + \frac{1}{n!}nf^{(n)}(c) \cdot 0 \end{aligned}$$



Формула Тейлора

$$\begin{aligned}P'_n(c) &= \frac{1}{1!}f'(c) + \frac{1}{2!}2f''(c)(c - c) + \dots + \\&\quad + \frac{1}{n!}nf^{(n)}(c)(c - c)^{n-1} = \\&= \frac{1}{1!}f'(c) + \frac{1}{2!}2f''(c) \cdot 0 + \dots + \frac{1}{n!}nf^{(n)}(c) \cdot 0 = \\&= f'(c).\end{aligned}$$



Формула Тейлора

$$\begin{aligned} P'_n(c) &= \frac{1}{1!}f'(c) + \frac{1}{2!}2f''(c)(c - c) + \dots + \\ &\quad + \frac{1}{n!}nf^{(n)}(c)(c - c)^{n-1} = \\ &= \frac{1}{1!}f'(c) + \frac{1}{2!}2f''(c) \cdot 0 + \dots + \frac{1}{n!}nf^{(n)}(c) \cdot 0 = \\ &= f'(c). \end{aligned}$$

Аналогично для остальных производных. ■



Формула Тейлора

Теорема (формула Тейлора)



Формула Тейлора

Теорема (формула Тейлора)

Пусть функция $f(x)$ определена на интервале (a, b) и имеет в точке $c \in (a, b)$ производные до порядка n включительно.



Формула Тейлора

Теорема (формула Тейлора)

Пусть функция $f(x)$ определена на интервале (a, b) и имеет в точке $c \in (a, b)$ производные до порядка n включительно. Тогда $\forall x \in (a, b)$ справедлива **формула Тейлора n -ого порядка**



Формула Тейлора

Теорема (формула Тейлора)

Пусть функция $f(x)$ определена на интервале (a, b) и имеет в точке $c \in (a, b)$ производные до порядка n включительно. Тогда $\forall x \in (a, b)$ справедлива **формула Тейлора n -ого порядка**

$$f(x)$$



Формула Тейлора

Теорема (формула Тейлора)

Пусть функция $f(x)$ определена на интервале (a, b) и имеет в точке $c \in (a, b)$ производные до порядка n включительно. Тогда $\forall x \in (a, b)$ справедлива **формула Тейлора n -ого порядка**

$$f(x) = f(c)$$



Формула Тейлора

Теорема (формула Тейлора)

Пусть функция $f(x)$ определена на интервале (a, b) и имеет в точке $c \in (a, b)$ производные до порядка n включительно. Тогда $\forall x \in (a, b)$ справедлива **формула Тейлора n -ого порядка**

$$f(x) = f(c) + \frac{1}{1!} f'(c)(x - c)$$



Формула Тейлора

Теорема (формула Тейлора)

Пусть функция $f(x)$ определена на интервале (a, b) и имеет в точке $c \in (a, b)$ производные до порядка n включительно. Тогда $\forall x \in (a, b)$ справедлива **формула Тейлора n -ого порядка**

$$f(x) = f(c) + \frac{1}{1!}f'(c)(x - c) + \frac{1}{2!}f''(c)(x - c)^2$$



Формула Тейлора

Теорема (формула Тейлора)

Пусть функция $f(x)$ определена на интервале (a, b) и имеет в точке $c \in (a, b)$ производные до порядка n включительно. Тогда $\forall x \in (a, b)$ справедлива **формула Тейлора n -ого порядка**

$$f(x) = f(c) + \frac{1}{1!}f'(c)(x - c) + \frac{1}{2!}f''(c)(x - c)^2 + \\ + \dots$$



Формула Тейлора

Теорема (формула Тейлора)

Пусть функция $f(x)$ определена на интервале (a, b) и имеет в точке $c \in (a, b)$ производные до порядка n включительно. Тогда $\forall x \in (a, b)$ справедлива **формула Тейлора n -ого порядка**

$$f(x) = f(c) + \frac{1}{1!}f'(c)(x - c) + \frac{1}{2!}f''(c)(x - c)^2 + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(c)(x - c)^n$$



Формула Тейлора

Теорема (формула Тейлора)

Пусть функция $f(x)$ определена на интервале (a, b) и имеет в точке $c \in (a, b)$ производные до порядка n включительно. Тогда $\forall x \in (a, b)$ справедлива **формула Тейлора n -ого порядка**

$$f(x) = f(c) + \frac{1}{1!}f'(c)(x - c) + \frac{1}{2!}f''(c)(x - c)^2 + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(c)(x - c)^n + r_n$$



Формула Тейлора

Теорема (формула Тейлора)

Пусть функция $f(x)$ определена на интервале (a, b) и имеет в точке $c \in (a, b)$ производные до порядка n включительно. Тогда $\forall x \in (a, b)$ справедлива **формула Тейлора n -ого порядка**

$$f(x) = f(c) + \frac{1}{1!}f'(c)(x - c) + \frac{1}{2!}f''(c)(x - c)^2 + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(c)(x - c)^n + r_n$$



Формула Тейлора

Теорема (формула Тейлора)

Пусть функция $f(x)$ определена на интервале (a, b) и имеет в точке $c \in (a, b)$ производные до порядка n включительно. Тогда $\forall x \in (a, b)$ справедлива **формула Тейлора n -ого порядка**

$$f(x) = f(c) + \frac{1}{1!}f'(c)(x - c) + \frac{1}{2!}f''(c)(x - c)^2 + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(c)(x - c)^n + r_n = P_n(x) + r_n,$$



Формула Тейлора

Теорема (формула Тейлора)

Пусть функция $f(x)$ определена на интервале (a, b) и имеет в точке $c \in (a, b)$ производные до порядка n включительно. Тогда $\forall x \in (a, b)$ справедлива **формула Тейлора n -ого порядка**

$$f(x) = f(c) + \frac{1}{1!}f'(c)(x - c) + \frac{1}{2!}f''(c)(x - c)^2 + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(c)(x - c)^n + r_n = P_n(x) + r_n,$$

где r_n – остаточный член формулы Тейлора.



Формула Тейлора

Формы записи остаточного члена:



Формула Тейлора

Формы записи остаточного члена:

1) форма Пеано



Формула Тейлора

Формы записи остаточного члена:

1) форма Пеано

$$r_n = o((x - c)^n), x \rightarrow c$$



Формула Тейлора

Формы записи остаточного члена:

1) форма Пеано

$$r_n = o((x - c)^n), x \rightarrow c$$

2) форма Лагранжа



Формула Тейлора

Формы записи остаточного члена:

1) форма Пеано

$$r_n = o((x - c)^n), x \rightarrow c$$

2) форма Лагранжа

$$r_n = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c + \theta(x - c))(x - c)^{n+1},$$



Формула Тейлора

Формы записи остаточного члена:

1) форма Пеано

$$r_n = o((x - c)^n), x \rightarrow c$$

2) форма Лагранжа

$$r_n = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c + \theta(x - c))(x - c)^{n+1},$$
$$0 < \theta < 1$$



Формула Тейлора

Формы записи остаточного члена:

1) форма Пеано

$$r_n = o((x - c)^n), x \rightarrow c$$

2) форма Лагранжа

$$r_n = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c + \theta(x - c))(x - c)^{n+1},$$
$$0 < \theta < 1$$

Таким образом, формула Тейлора есть наилучшее приближение функции многочленом в окрестности заданной точки.



Формула Тейлора

Определение

Формулой Маклорена называется
формула Тейлора при $c = 0$,



Формула Тейлора

Определение

Формулой Маклорена называется формула Тейлора при $c = 0$, т.е. формула вида



Формула Тейлора

Определение

Формулой Маклорена называется формула Тейлора при $c = 0$, т.е. формула вида

$$f(x)$$



Формула Тейлора

Определение

Формулой Маклорена называется формула Тейлора при $c = 0$, т.е. формула вида

$$f(x) = f(0)$$



Формула Тейлора

Определение

Формулой Маклорена называется формула Тейлора при $c = 0$, т.е. формула вида

$$f(x) = f(0) + \frac{1}{1!}f'(0) \cdot x$$



Формула Тейлора

Определение

Формулой Маклорена называется формула Тейлора при $c = 0$, т.е. формула вида

$$f(x) = f(0) + \frac{1}{1!}f'(0) \cdot x + \frac{1}{2!}f''(0) \cdot x^2$$



Формула Тейлора

Определение

Формулой Маклорена называется формула Тейлора при $c = 0$, т.е. формула вида

$$f(x) = f(0) + \frac{1}{1!}f'(0) \cdot x + \frac{1}{2!}f''(0) \cdot x^2 + \dots$$



Формула Тейлора

Определение

Формулой Маклорена называется формула Тейлора при $c = 0$, т.е. формула вида

$$f(x) = f(0) + \frac{1}{1!}f'(0) \cdot x + \frac{1}{2!}f''(0) \cdot x^2 + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(0) \cdot x^n$$



Формула Тейлора

Определение

Формулой Маклорена называется формула Тейлора при $c = 0$, т.е. формула вида

$$f(x) = f(0) + \frac{1}{1!}f'(0) \cdot x + \frac{1}{2!}f''(0) \cdot x^2 + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(0) \cdot x^n + o(x^n), x \rightarrow 0.$$



Примеры разложения функций по формуле Маклорена



Примеры разложения функций по формуле Маклорена

Разложим по формуле Маклорена некоторые элементарные функции.



Примеры разложения функций по формуле Маклорена

Разложим по формуле Маклорена некоторые элементарные функции.

1) $y = \sin x$



Примеры разложения функций по формуле Маклорена

$$f(0) = 0$$



Примеры разложения функций по формуле Маклорена

$$f(0) = 0$$

$$f'(x) = \cos x$$

$$f''(x) = -\sin x$$

$$f'''(x) = -\cos x$$

$$f^{IV}(x) = \sin x$$

$$f^V(x) = \cos x$$

$$f'(0) = 1$$

$$f''(0) = 0$$

$$f'''(0) = -1$$

$$f^{IV}(0) = 0$$

$$f^V(0) = 1$$



Примеры разложения функций по формуле Маклорена

$$\Rightarrow f^{(m)}(0) = \begin{cases} 0, & m = 2n, \\ (-1)^n, & m = 2n + 1, \end{cases}$$
$$n = 0, 1, 2, \dots$$



Примеры разложения функций по формуле Маклорена

Тогда по формуле Маклорена



Примеры разложения функций по формуле Маклорена

Тогда по формуле Маклорена

$$f(x) = f(0) + \frac{1}{1!} \cdot f'(0) \cdot x + \frac{1}{2!} \cdot f''(0) \cdot x^2 + \dots$$



Примеры разложения функций по формуле Маклорена

Тогда по формуле Маклорена

$$f(x) = f(0) + \frac{1}{1!} \cdot f'(0) \cdot x + \frac{1}{2!} \cdot f''(0) \cdot x^2 + \dots$$

имеем:



Примеры разложения функций по формуле Маклорена

Тогда по формуле Маклорена

$$f(x) = f(0) + \frac{1}{1!} \cdot f'(0) \cdot x + \frac{1}{2!} \cdot f''(0) \cdot x^2 + \dots$$

имеем:

$$\begin{aligned} \sin x = & 0 + \frac{1}{1!} \cdot 1 \cdot x + \frac{1}{2!} \cdot 0 \cdot x^2 + \frac{1}{3!} \cdot (-1) \cdot x^3 + \frac{1}{4!} \cdot 0 \cdot x^4 + \\ & + \frac{1}{5!} \cdot 1 \cdot x^5 + \dots + \frac{1}{(2n)!} \cdot 0 \cdot x^{2n} + \frac{1}{(2n+1)!} \cdot (-1)^n \cdot x^{2n+1} + \\ & + \frac{1}{(2n+2)!} \cdot 0 \cdot x^{2n+2} + o(x^{2n+2}), x \rightarrow 0 \end{aligned}$$



Примеры разложения функций по формуле Маклорена

Убрав слагаемые с нулевыми коэффициентами, получаем разложение функции $\sin x$ по формуле Маклорена порядка $2n + 2$:



Примеры разложения функций по формуле Маклорена

Убрав слагаемые с нулевыми коэффициентами, получаем разложение функции $\sin x$ по формуле Маклорена порядка $2n + 2$:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \dots +$$
$$+ (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}), x \rightarrow 0.$$



Примеры разложения функций по формуле Маклорена

Это разложение можно записать в краткой
форме:



Примеры разложения функций по формуле Маклорена

Это разложение можно записать в краткой
форме:

$$\sin x = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}), x \rightarrow 0.$$



Примеры разложения функций по формуле Маклорена

Пример:



Примеры разложения функций по формуле Маклорена

Пример:

Разложения $y = \sin x$ для малых степеней
имеют вид:



Примеры разложения функций по формуле Маклорена

Пример:

Разложения $y = \sin x$ для малых степеней
имеют вид:

$$\sin x = x + o(x^2), x \rightarrow 0.$$



Примеры разложения функций по формуле Маклорена

Пример:

Разложения $y = \sin x$ для малых степеней
имеют вид:

$$\sin x = x + o(x^2), x \rightarrow 0.$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4), x \rightarrow 0.$$



Примеры разложения функций по формуле Маклорена

Пример:

Разложения $y = \sin x$ для малых степеней
имеют вид:

$$\sin x = x + o(x^2), x \rightarrow 0.$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4), x \rightarrow 0.$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6), x \rightarrow 0.$$



Примеры разложения функций по формуле Маклорена



Примеры разложения функций по формуле Маклорена

$$2) y = \cos x$$



Примеры разложения функций по формуле Маклорена

$$f(0) = 1$$



Примеры разложения функций по формуле Маклорена

$$f(0) = 1$$

$$f'(x) = -\sin x$$

$$f''(x) = -\cos x$$

$$f'''(x) = \sin x$$

$$f^{IV}(x) = \cos x$$

$$f^V(x) = -\sin x$$

$$f'(0) = 0$$

$$f''(0) = -1$$

$$f'''(0) = 0$$

$$f^{IV}(0) = 1$$

$$f^V(0) = 0$$



Примеры разложения функций по формуле Маклорена

$$\Rightarrow f^{(m)}(0) = \begin{cases} 0, & m = 2n + 1, \\ (-1)^n, & m = 2n, \end{cases}$$
$$n = 0, 1, 2, \dots$$



Примеры разложения функций по формуле Маклорена

Тогда по формуле Маклорена имеем:



Примеры разложения функций по формуле Маклорена

Тогда по формуле Маклорена имеем:

$$\begin{aligned}\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) = \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}), x \rightarrow 0.\end{aligned}$$



Примеры разложения функций по формуле Маклорена

Пример:



Примеры разложения функций по формуле Маклорена

Пример:

Разложения $y = \cos x$ для малых степеней
имеют вид:



Примеры разложения функций по формуле Маклорена

Пример:

Разложения $y = \cos x$ для малых степеней
имеют вид:

$$\cos x = 1 + o(x), x \rightarrow 0.$$



Примеры разложения функций по формуле Маклорена

Пример:

Разложения $y = \cos x$ для малых степеней имеют вид:

$$\cos x = 1 + o(x), x \rightarrow 0.$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^3), x \rightarrow 0.$$



Примеры разложения функций по формуле Маклорена

Пример:

Разложения $y = \cos x$ для малых степеней
имеют вид:

$$\cos x = 1 + o(x), x \rightarrow 0.$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^3), x \rightarrow 0.$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5), x \rightarrow 0.$$



Примеры разложения функций по формуле Маклорена



Примеры разложения функций по формуле Маклорена

$$3) f(x) = e^x$$



Примеры разложения функций по формуле Маклорена

$$f(0) = 1$$



Примеры разложения функций по формуле Маклорена

$$f(0) = 1$$

$$f^{(m)}(x) = e^x$$



Примеры разложения функций по формуле Маклорена

$$f(0) = 1$$

$$f^{(m)}(x) = e^x$$

$$f^{(m)}(0) = 1$$



Примеры разложения функций по формуле Маклорена

$$f(0) = 1$$

$$f^{(m)}(x) = e^x$$

$$f^{(m)}(0) = 1$$

$$\Rightarrow e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n), x \rightarrow 0.$$



Примеры разложения функций по формуле Маклорена



Примеры разложения функций по формуле Маклорена

$$4) f(x) = (1 + x)^\alpha$$



Примеры разложения функций по формуле Маклорена

$$f(0) = 1$$



Примеры разложения функций по формуле Маклорена

$$f(0) = 1$$

$$f^{(m)}(x) = \alpha(\alpha - 1)\dots(\alpha - m + 1)(1 + x)^{\alpha - m}$$



Примеры разложения функций по формуле Маклорена

$$f(0) = 1$$

$$f^{(m)}(x) = \alpha(\alpha - 1)\dots(\alpha - m + 1)(1 + x)^{\alpha - m}$$

$$f^{(m)}(0) = \alpha(\alpha - 1)\dots(\alpha - m + 1)$$



Примеры разложения функций по формуле Маклорена



Примеры разложения функций по формуле Маклорена

$$\begin{aligned} \Rightarrow \\ (1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \dots + \\ &+ \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n) = \\ &= 1 + \sum_{k=1}^n \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}x^k + o(x^n), x \rightarrow 0. \end{aligned}$$



Примеры разложения функций по формуле Маклорена

В частности,



Примеры разложения функций по формуле Маклорена

В частности,

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{0.5} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2), x \rightarrow 0.$$



Примеры разложения функций по формуле Маклорена



Примеры разложения функций по формуле Маклорена

$$5) f(x) = \ln(1 + x)$$



Примеры разложения функций по формуле Маклорена

$$f(0) = 0$$



Примеры разложения функций по формуле Маклорена

$$f(0) = 0$$

$$f^{(m)}(x) = (-1)^{m-1} \frac{(m-1)!}{(1+x)^m}$$



Примеры разложения функций по формуле Маклорена

$$f(0) = 0$$

$$f^{(m)}(x) = (-1)^{m-1} \frac{(m-1)!}{(1+x)^m}$$

$$f^{(m)}(0) = (-1)^{m-1} (m-1)!$$



Примеры разложения функций по формуле Маклорена

$$f(0) = 0$$

$$f^{(m)}(x) = (-1)^{m-1} \frac{(m-1)!}{(1+x)^m}$$

$$f^{(m)}(0) = (-1)^{m-1} (m-1)!$$

$$\Rightarrow \ln(1+x) =$$

$$x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n), x \rightarrow 0.$$



Приближенные вычисления по формуле Тейлора



Приближенные вычисления по формуле Тейлора

Разложив функцию $y = f(x)$ по формуле Тейлора в окрестности точки c , будем иметь

$$f(x) = P_n(x) + r_n \quad \forall x \in U(c),$$



Приближенные вычисления по формуле Тейлора

Разложив функцию $y = f(x)$ по формуле Тейлора в окрестности точки c , будем иметь

$$f(x) = P_n(x) + r_n \quad \forall x \in U(c),$$

где $P_n(x)$ – многочлен Тейлора степени n ,



Приближенные вычисления по формуле Тейлора

Разложив функцию $y = f(x)$ по формуле Тейлора в окрестности точки c , будем иметь

$$f(x) = P_n(x) + r_n \quad \forall x \in U(c),$$

где $P_n(x)$ – многочлен Тейлора степени n , а $r_n = o((x - c)^n)$, $x \rightarrow c$ – остаточный член формулы Тейлора.



Приближенные вычисления по формуле Тейлора

Отбросив r_n , получим приближенную формулу

$$f(x) \approx P_n(x).$$



Приближенные вычисления по формуле Тейлора

Отбросив r_n , получим приближенную формулу

$$f(x) \approx P_n(x).$$

Чем больше n и ближе x к c , тем точнее данная формула.



Приближенные вычисления по формуле Тейлора

Пример:



Приближенные вычисления по формуле Тейлора

Пример:

$$\sin \frac{\pi}{6} = 0.5,$$



Приближенные вычисления по формуле Тейлора

Пример:

$$\sin \frac{\pi}{6} = 0.5, \frac{\pi}{6} \approx 0.5236.$$



Приближенные вычисления по формуле Тейлора

Пример:

$$\sin \frac{\pi}{6} = 0.5, \frac{\pi}{6} \approx 0.5236.$$

$$\sin x = x + o(x^2)$$



Приближенные вычисления по формуле Тейлора

Пример:

$$\sin \frac{\pi}{6} = 0.5, \frac{\pi}{6} \approx 0.5236.$$

$$\sin x = x + o(x^2) \approx x,$$



Приближенные вычисления по формуле Тейлора

Пример:

$$\sin \frac{\pi}{6} = 0.5, \frac{\pi}{6} \approx 0.5236.$$

$$\sin x = x + o(x^2) \approx x, \sin \frac{\pi}{6} \approx 0.5236.$$



Приближенные вычисления по формуле Тейлора

Пример:

$$\sin \frac{\pi}{6} = 0.5, \frac{\pi}{6} \approx 0.5236.$$

$$\sin x = x + o(x^2) \approx x, \sin \frac{\pi}{6} \approx 0.5236.$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)$$



Приближенные вычисления по формуле Тейлора

Пример:

$$\sin \frac{\pi}{6} = 0.5, \frac{\pi}{6} \approx 0.5236.$$

$$\sin x = x + o(x^2) \approx x, \sin \frac{\pi}{6} \approx 0.5236.$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4) \approx x - \frac{x^3}{3!},$$



Приближенные вычисления по формуле Тейлора

Пример:

$$\sin \frac{\pi}{6} = 0.5, \frac{\pi}{6} \approx 0.5236.$$

$$\sin x = x + o(x^2) \approx x, \sin \frac{\pi}{6} \approx 0.5236.$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4) \approx x - \frac{x^3}{3!}, \sin \frac{\pi}{6} \approx 0.4997.$$



Приближенные вычисления по формуле Тейлора

Пример:

$$\sin \frac{\pi}{6} = 0.5, \frac{\pi}{6} \approx 0.5236.$$

$$\sin x = x + o(x^2) \approx x, \sin \frac{\pi}{6} \approx 0.5236.$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4) \approx x - \frac{x^3}{3!}, \sin \frac{\pi}{6} \approx 0.4997.$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6)$$



Приближенные вычисления по формуле Тейлора

Пример:

$$\sin \frac{\pi}{6} = 0.5, \frac{\pi}{6} \approx 0.5236.$$

$$\sin x = x + o(x^2) \approx x, \sin \frac{\pi}{6} \approx 0.5236.$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4) \approx x - \frac{x^3}{3!}, \sin \frac{\pi}{6} \approx 0.4997.$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6) \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!},$$



Приближенные вычисления по формуле Тейлора

Пример:

$$\sin \frac{\pi}{6} = 0.5, \frac{\pi}{6} \approx 0.5236.$$

$$\sin x = x + o(x^2) \approx x, \sin \frac{\pi}{6} \approx 0.5236.$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4) \approx x - \frac{x^3}{3!}, \sin \frac{\pi}{6} \approx 0.4997.$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6) \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!},$$

$$\sin \frac{\pi}{6} \approx 0.500003.$$



Вычисление пределов с помощью формулы Тейлора



Вычисление пределов с помощью формулы Тейлора

Для вычисления пределов вида

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)}$$

с неопределенностью $\left(\frac{0}{0}\right)$ можно разложить функции $f(x)$ и $g(x)$ по формуле Тейлора в точке c , ограничившись лишь несколькими первыми ненулевыми членами.



Вычисление пределов с помощью формулы Тейлора

В результате получаем:

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{a(x - c)^n + o((x - c)^n)}{b(x - c)^m + o((x - c)^m)}.$$



Вычисление пределов с помощью формулы Тейлора

В результате получаем:

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{a(x - c)^n + o((x - c)^n)}{b(x - c)^m + o((x - c)^m)}.$$

Далее числитель и знаменатель дроби делим на $(x - c)$ в **наименьшей из n и m степени** и используем формулу

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{o((x - c)^\alpha)}{(x - c)^\beta} = 0, \text{ если } \alpha \geq \beta.$$



Вычисление пределов с помощью формулы Тейлора

Пример:



Вычисление пределов с помощью формулы Тейлора

Пример:

Вычислим предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} = \left(\frac{0}{0} \right) = ?$$



Вычисление пределов с помощью формулы Тейлора

Разложим по формуле Тейлора функции,
входящие в искомое выражение:



Вычисление пределов с помощью формулы Тейлора

Разложим по формуле Тейлора функции,
входящие в искомое выражение:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3), x \rightarrow 0,$$



Вычисление пределов с помощью формулы Тейлора

Разложим по формуле Тейлора функции,
входящие в искомое выражение:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3), x \rightarrow 0,$$

$$e^{-x} = 1 + (-x) + \frac{(-x)^2}{2!} + \frac{(-x)^3}{3!} + o(x^3), x \rightarrow 0,$$



Вычисление пределов с помощью формулы Тейлора

Разложим по формуле Тейлора функции, входящие в искомое выражение:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3), x \rightarrow 0,$$

$$e^{-x} = 1 + (-x) + \frac{(-x)^2}{2!} + \frac{(-x)^3}{3!} + o(x^3), x \rightarrow 0,$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4), x \rightarrow 0.$$



Вычисление пределов с помощью формулы Тейлора

Тогда $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} =$



Вычисление пределов с помощью формулы Тейлора

$$\begin{aligned}
 &\text{Тогда } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\overbrace{1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)}^{e^x} - \overbrace{1 + x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - o(x^3)}^{-e^{-x}} - 2x}{\underbrace{x - x + \frac{x^3}{3!} - o(x^4)}_{-\sin x}} = \\
 &= \left| \begin{array}{l} o(x^n) - o(x^n) = o(x^n), \\ -o(x^n) = o(x^n). \end{array} \right| =
 \end{aligned}$$



Вычисление пределов с помощью формулы Тейлора

$$\text{Тогда } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \circ(x^n) - \circ(x^n) = \circ(x^n), \\ - \circ(x^n) = \circ(x^n). \end{array} \right| =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^3}{3} + \circ(x^3)}{\frac{x^3}{6} + \circ(x^4)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3} + \frac{\circ(x^3)}{x^3}}{\frac{1}{6} + \frac{\circ(x^4)}{x^3}} = \frac{\frac{1}{3} + 0}{\frac{1}{6} + 0} = 2.$$

