

Математический анализ

Модуль 4

Приложения

дифференциального исчисления

Лекция 4.5

(для ГУИМЦ, 2026)

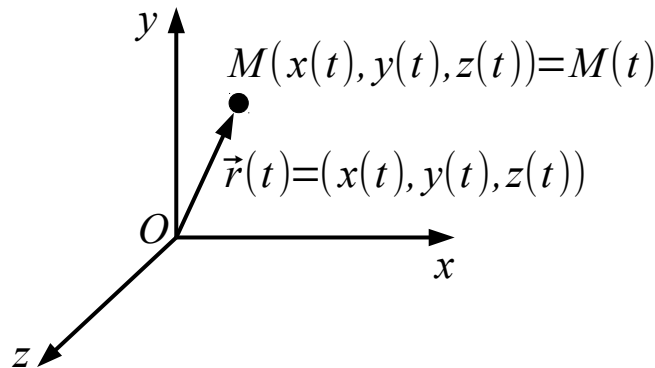
Аннотация

Элементы теории кривых. Кривизна и радиус кривизны плоской кривой.

1 Кривая и ее длина

Пусть геометрические векторы $\vec{r}(t)$ при всех значениях переменной t прикреплены к точке O , которая является началом декартовой системы координат.

Вектор $\vec{r}(t)$ соединяет точку O с некоторой точкой M . Соответственно, $\vec{r}(t)$ является радиус-вектором точки M . Тогда за координаты точки M принимаются координаты вектора $\vec{r}(t)$.

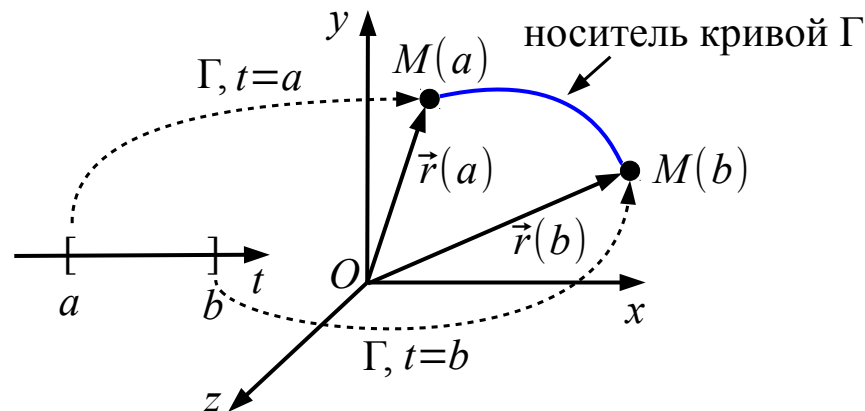


Определение 1. Непрерывное отображение отрезка $[a, b]$ числовой прямой в трехмерное арифметическое пространство R^3 называется **кривой** и обозначается Γ .

Способы задания кривой:

1. $\Gamma = \{M(t) \mid a \leq t \leq b\}$ – *точечное представление*. Кривая Γ задается как отображение $M(t)$, ставящее в соответствие числу t точку M пространства.
2. $\Gamma = \{O + \vec{r}(t) \mid a \leq t \leq b\}$ – *векторное представление*. Кривая Γ задается в виде векторной функции $\vec{r}(t)$, ставящей в соответствие числу t радиус-вектор $\vec{r}$ точки пространства. Символ $(+)$ означает операцию сдвига из точки на вектор, что дает новую точку.
3. $\Gamma = \{x(t), y(t), z(t) \mid a \leq t \leq b\}$ – *координатное представление*. Кривая Γ задается в виде трех скалярных функций, представляющих собой координаты точки в заданной декартовой системе координат.

Определение 2. Множество точек трехмерного пространства R^3 , на которое отображается отрезок $[a, b]$, называется **носителем кривой** Γ .

Иллюстрация:

Определение 3. Если носитель кривой лежит в некоторой плоскости, то кривая называется **плоской**.

Замечание 1. В дальнейшем под словом кривая мы будем понимать как саму кривую (отображение), так и ее носитель в зависимости от контекста.

Поставим целью сформулировать определение длины произвольной кривой. Все, что мы знаем на настоящий момент – как определить длину ломаной.

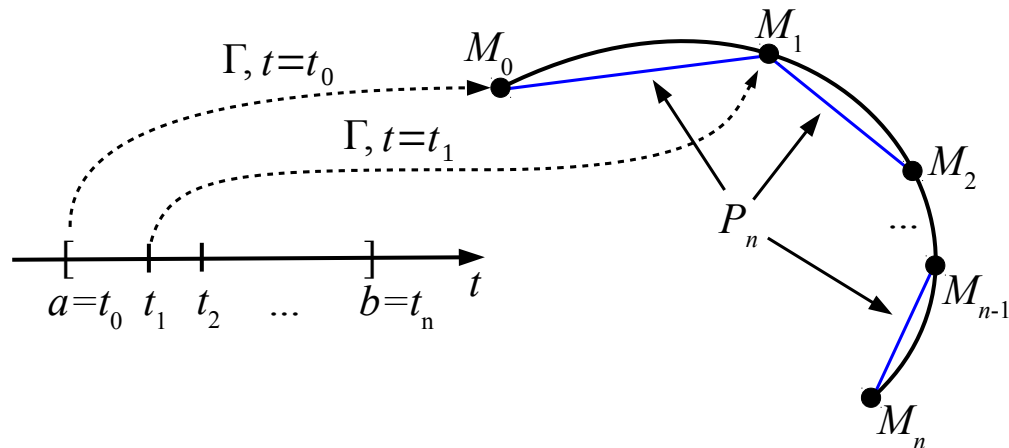
Идея: «приближать» кривую ломаными, которые все плотнее и плотнее вписываются в нее.

Определение 4. Последовательность точек $t_0, t_1, \dots, t_n$, удовлетворяющая условию $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$, называется **разбиением отрезка** $[a, b]$.

Определение 5. Последовательность точек кривой $M_0, M_1, \dots, M_n$, соответствующая значениям $t_0, t_1, \dots, t_n$, называется **разбиением кривой** Γ .

Соединив точки $M_0, M_1, \dots, M_n$ отрезками, получим ломаную P_n , которая называется **вписанной в кривую** Γ .

Иллюстрация:



Длина каждого отрезка $\overline{M_{k-1}M_k}$ равна $|\vec{r}(t_k) - \vec{r}(t_{k-1})|$. Следовательно, длина σ_n всей ломаной P_n равна сумме таких длин:

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^n |\vec{r}(t_k) - \vec{r}(t_{k-1})|.$$

Определение 6. Длиной кривой Γ называется точная верхняя грань длин всевозможных ломаных P_n , т.е.

$$L_\Gamma = \sup \sigma_n.$$

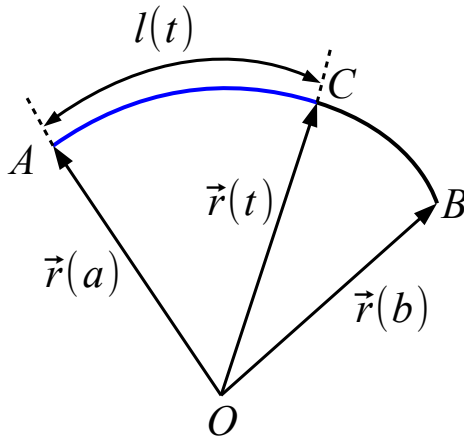
Выделим класс кривых, для которых существует длина в указанном смысле.

Определение 7. Если производная $\vec{r}'(t)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то кривая Γ называется **непрерывно дифференцируемой**.

Теорема 1 (о переменной длине дуги). Пусть кривая Γ непрерывно дифференцируема. Тогда переменная длина дуги l , отсчитываемая от начала $\vec{r}(a)$ кривой Γ , является возрастающей непрерывно дифференцируемой функцией переменной t . При этом

$$\frac{dl}{dt} = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} = \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right|.$$

Иллюстрация:



На рисунке $l(t)$ – длина участка AC кривой AB , причем $l(a) = 0$.

Замечание 2. В интегральном исчислении доказывается, что длина кривой может быть вычислена по формуле

$$l = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt.$$

Справа – интеграл Римана на отрезке $[a, b]$.

Рассмотрим плоскую кривую $\Gamma = \{x(t), y(t) \mid a \leq t \leq b\}$. Тогда

$$\frac{dl}{dt} = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$$

$\Downarrow$

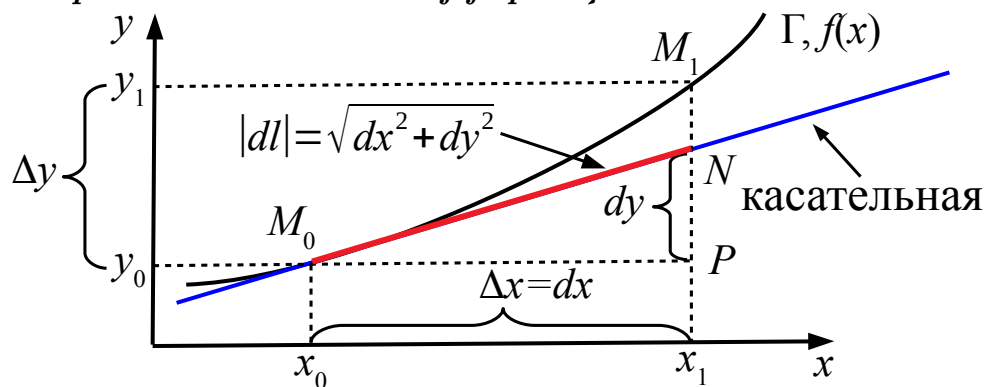
$$dl = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

или

$$(dl)^2 = (x' dt)^2 + (y' dt)^2 = (dx)^2 + (dy)^2.$$

Здесь dl – дифференциал длины дуги $l = l(t)$ плоской кривой Γ .

Геометрический смысл дифференциала dl :



Пусть кривая Γ в окрестности точки x_0 совпадает с графиком функции $y = f(x)$. Тогда кривую Γ можно задать в виде:

$$\Gamma = \{x, f(x) \mid x \in U(x_0)\},$$

беря в качестве независимой переменной t переменную x : $t = x$.

Рассмотрим на кривой Γ дугу M_0M_1 длины $\Delta l = l(x_1) - l(x_0)$. Тогда

- отрезок $M_0P = \Delta x = dx = x_1 - x_0$ – приращение аргумента x функции $f(x)$ при переходе от точки x_0 к точке x_1 .
- отрезок $PM_1 = \Delta y = y_1 - y_0$ – приращение значения функции $f(x)$ при переходе от точки x_0 к точке x_1 .
- отрезок $PN = dy = f'(x_0)dx$ – приращение ординаты касательной к графику функции $f(x)$ в точке x_0 при переходе от точки x_0 к точке x_1 .

Поскольку ΔM_0PN – прямоугольный, то

$$M_0N^2 = M_0P^2 + PN^2 = (dx)^2 + (dy)^2 = (dl)^2.$$

$$\Downarrow$$

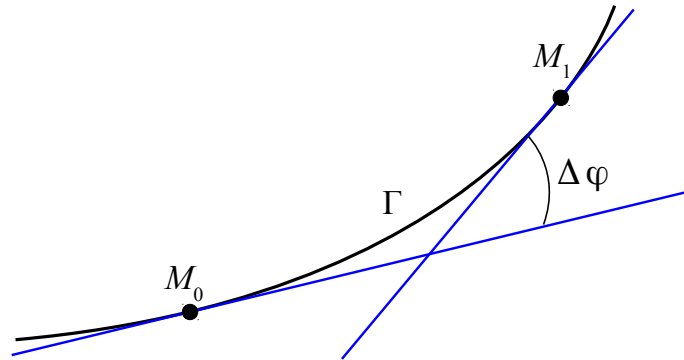
$$|dl| = M_0N.$$

Отсюда получаем, что *дифференциал длины дуги dl по абсолютной величине равен длине участка касательной, заключенного между точками x_0 и x_1 .*

2 Кривизна и радиус кривизны плоской кривой

Рассмотрим на плоской кривой Γ точки M_0 и M_1 . Проведем через эти точки касательные. При переходе от точки M_0 к точке M_1 касательная поворачивается на угол $\Delta\varphi$.

Иллюстрация:



Определение 8. Отношение угла $\Delta\varphi$ к длине Δl дуги, заключенной между точками M_0 и M_1 , называется **средней кривизной дуги**:

$$K_{\text{ср}} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta l}.$$

Величина $K_{\text{ср}}$ характеризует среднюю изогнутость кривой. Чем меньше $K_{\text{ср}}$, тем ближе кривая к прямой.

Определение 9. Кривизной кривой Γ в точке M_0 называется предел

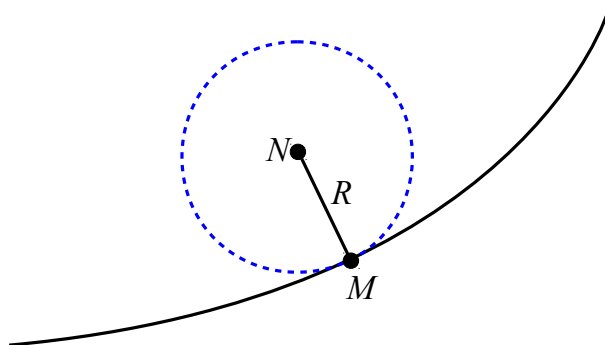
$$K = \lim_{M_1 \rightarrow M_0} K_{\text{ср}}.$$

Определение 10. Величина, обратная кривизне, называется **радиусом кривизны**.

Обозначение: $R = \frac{1}{K}.$

Проведем к кривой Γ в точке M нормаль и отложим на этой нормали в сторону вогнутости кривой отрезок MN с длиной, равной R .

Иллюстрация:



Определение 11. Точка N называется **центром кривизны**, а окружность с центром в точке N и радиусом R – **окружностью кривизны** плоской кривой в точке M .