

Математический анализ

Модуль 4

Приложения

дифференциального исчисления

Лекция 4.3

(для ГУИМЦ, 2026)

Аннотация

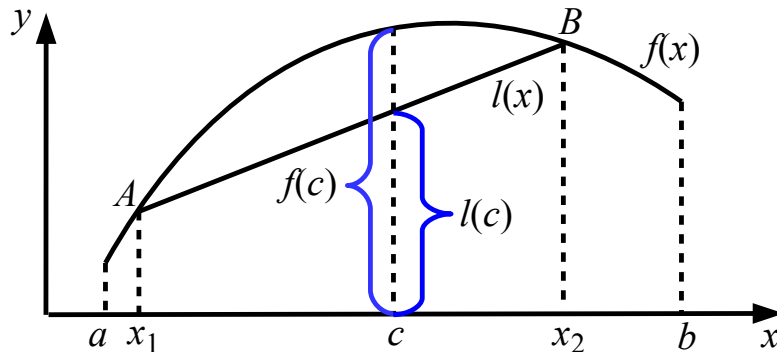
Выпуклость функции. Точки перегиба. Схема полного исследования функции.

1 Выпуклость функции

Пусть функция $y = f(x)$ определена на интервале (a, b) . Выберем на графике этой функции произвольные точки A с абсциссой x_1 и B с абсциссой x_2 . Соединим эти точки отрезком, заданным уравнением $y = l(x)$, где $x_1 \leq x \leq x_2$ и

$$l(x) = \frac{f(x_2)(x - x_1) + f(x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1}.$$

На интервале (x_1, x_2) выберем произвольную точку c . В данной точке: $f(c)$ – это расстояние от оси Ox до графика функции $f(x)$, а $l(c)$ – расстояние от оси Ox до отрезка AB , измеренное вдоль оси Oy .



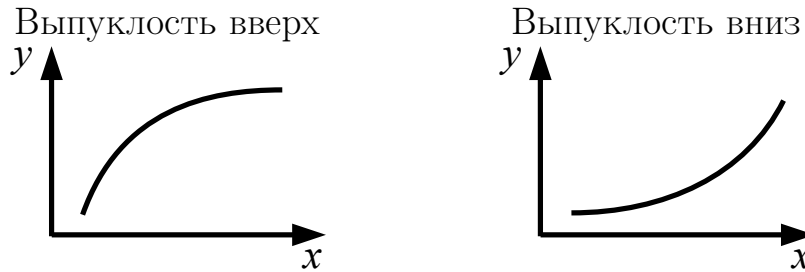
Определение 1. Функция $y = f(x)$ называется **выпуклой вверх** на (a, b) , если для любых точек $x_1, x_2 \in (a, b)$, таких, что $x_1 < x_2$, и для любой точки $c \in (x_1, x_2)$ выполнено неравенство

$$l(c) \leq f(c).$$

Определение 2. Функция $y = f(x)$ называется **выпуклой вниз** на (a, b) , если для любых точек $x_1, x_2 \in (a, b)$, таких, что $x_1 < x_2$, и для любой точки $c \in (x_1, x_2)$ выполнено неравенство

$$l(c) \geq f(c).$$

Иллюстрация:



Теорема 1 (достаточное условие выпуклости*). Пусть $f(x) \in D^2(a, b)$. Если $\forall x \in (a, b) f''(x) \leq 0$, то функция $f(x)$ выпукла вверх. Если $\forall x \in (a, b) f''(x) \geq 0$, то функция $f(x)$ выпукла вниз.

Доказательство

Пусть $a < x_1 < x < x_2 < b$. Тогда

$$\begin{aligned} l(x) - f(x) &= \\ &= \frac{f(x_2)(x - x_1) + f(x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1} - f(x) \overbrace{\frac{(x - x_1) + (x_2 - x)}{x_2 - x_1}}^{=1} = \\ &= \frac{(f(x_2) - f(x))(x - x_1) - (f(x) - f(x_1))(x_2 - x)}{x_2 - x_1} = \\ &= | \text{по теореме Лагранжа } f(b) - f(a) = f'(c)(b - a), a < c < b | = \\ &= \frac{f'(\eta)(x_2 - x)(x - x_1) - f'(\xi)(x - x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(f'(\eta) - f'(\xi))(x - x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1} = \\
&= |\text{по теореме Лагранжа } f'(\eta) - f'(\xi) = f''(\zeta)(\eta - \xi), a < \zeta < b| = \\
&= \frac{f''(\zeta)(\eta - \xi)(x - x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1}.
\end{aligned}$$

Здесь $x_1 < \xi < x < \eta < x_2$ и $\xi < \zeta < \eta$.

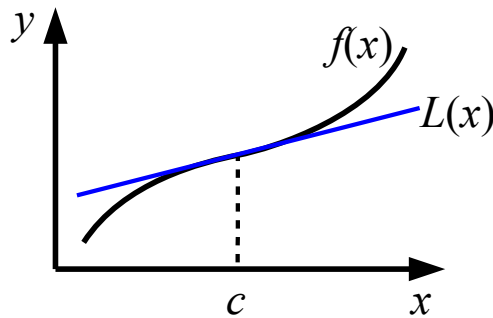
Поскольку $(\eta - \xi), (x - x_1), (x_2 - x), (x_2 - x_1) > 0$, получаем

- 1) если $f''(\zeta) \leq 0$, то $l(x) \leq f(x)$ и $f(x)$ выпукла вверх,
- 2) если $f''(\zeta) \geq 0$, то $l(x) \geq f(x)$ и $f(x)$ выпукла вниз.

■

Определение 3. Пусть $f(x) \in D(c)$ и $y = L(x)$ – уравнение касательной к графику функции $f(x)$ в точке c . Если разность $f(x) - L(x)$ меняет знак при переходе через точку c , то c называется **точкой перегиба** функции $f(x)$.

Поведение функции в окрестности точки перегиба:



Теорема 2 (необходимое условие перегиба*). Если в точке перегиба существует вторая производная, то она равна нулю.

Доказательство

Пусть в точке c существует вторая производная $f''(c)$, и $y = L(x)$ – уравнение касательной к графику функции $f(x)$ в точке c . Тогда

$$L(x) = f(c) + f'(c)(x - c).$$

По формуле Тейлора второго порядка имеем:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(c) + f'(c)(x - c) + \frac{1}{2}f''(c)(x - c)^2 + o((x - c)^2) = \\ &= L(x) + \frac{1}{2}f''(c)(x - c)^2 + o((x - c)^2). \end{aligned}$$

$$\text{Откуда } f(x) - L(x) = \frac{1}{2}f''(c)(x - c)^2 + o((x - c)^2).$$

Величина $o((x - c)^2)$ стремится к нулю быстрее, чем $(x - c)^2$, когда $x \rightarrow c$. Поэтому

$$\exists U(c) \forall x \in U(c) : \left| \frac{1}{2}f''(c)(x - c)^2 \right| > |o((x - c)^2)|,$$

при условии, что $f''(c) \neq 0$. В этом случае в $U(c)$ знак $f(x) - L(x)$ будет совпадать со знаком $f''(c)$, т.е. $f(x) - L(x)$ не будет менять знак при переходе через точку c , а значит, c не будет точкой перегиба.

Значит, если c – точка перегиба, то $f''(c) = 0$. ■

Теорема 3 (достаточное условие перегиба). Пусть функция $y = f(x)$ дважды дифференцируема в некоторой окрестности точки c , кроме, быть может, самой точки c , в которой она является дифференцируемой. Если при переходе через точку c вторая производная $f''(x)$ меняет знак, то точка c – это точка перегиба.

2 Схема полного исследования функции

Функция исследуется согласно следующей схеме:

1. Область определения, четность/нечетность, периодичность.
2. Точки пересечения графика функции с осями координат.
3. Интервалы знакопостоянства.
4. Асимптоты:

- а) вертикальные,
- б) наклонные (в частности, горизонтальные).

5. Точки локального экстремума, возрастание и убывание функции.

6. Точки перегиба, выпуклость вверх и вниз.

Замечание 1. При нахождении области определения функции следует обращать внимание на те точки, в которых функция обращается в бесконечность (например, нули знаменателя). В таких точках определены вертикальные асимптоты.

Замечание 2. Если график функции обладает симметрией (например, относительно оси ординат, если функция четная, или относительно начала координат, если функция нечетная), то достаточно выполнить исследование лишь для его части. Остальная часть графика получается в соответствии с симметрией.

Замечание 3. Если функция периодична, то ее график строится на отрезке, длина которого равна наименьшему из возможных периодов.