

Математический анализ

Модуль 4

Приложения

дифференциального исчисления

Лекция 4.2

(для ГУИМЦ, 2026)

Аннотация

Монотонные функции. Экстремум функции. Условия существования экстремума.

1 Монотонность функции

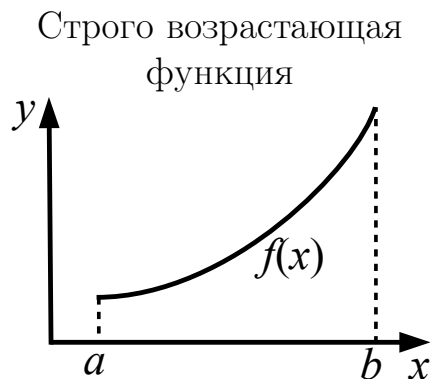
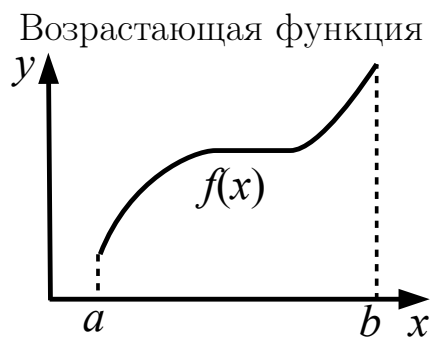
Определение 1. Функция $y = f(x)$ называется **возрастающей** на интервале (a, b) , если

$$\forall x_1, x_2 \in (a, b), x_1 < x_2 : f(x_1) \leq f(x_2).$$

Определение 2. Функция $y = f(x)$ называется **строго возрастающей** на интервале (a, b) , если

$$\forall x_1, x_2 \in (a, b), x_1 < x_2 : f(x_1) < f(x_2).$$

Иллюстрация:



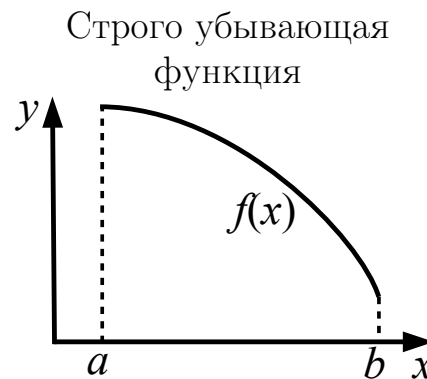
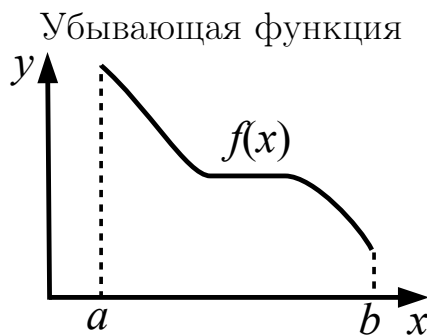
Определение 3. Функция $y = f(x)$ называется **убывающей** на интервале (a, b) , если

$$\forall x_1, x_2 \in (a, b), x_1 < x_2 : f(x_1) \geq f(x_2).$$

Определение 4. Функция $y = f(x)$ называется **строго убывающей** на интервале (a, b) , если

$$\forall x_1, x_2 \in (a, b), x_1 < x_2 : f(x_1) > f(x_2).$$

Иллюстрация:



Таким образом, если функция возрастает или убывает, то ее значения связаны *нестрогими* неравенствами. С другой стороны, значения строго возрастающей или строго убывающей функции связаны *строгими* неравенствами. Объединим функции перечисленных типов в следующие два класса:

Определение 5. Возрастающие и убывающие функции называются **монотонными**.

Определение 6. Строго возрастающие и строго убывающие функции называются **строго монотонными**.

Обозначения:

- $f(x) \in C(c), f(x) \in C(a, b), f(x) \in C[a, b]$ – функция $f(x)$ непрерывна в точке c , на интервале (a, b) , на отрезке $[a, b]$.

- $f(x) \in D(c), f(x) \in D(a, b), f(x) \in D[a, b]$ – функция $f(x)$ дифференцируема в точке c , на интервале (a, b) , на отрезке $[a, b]$, т.е. имеет производную $f'(x)$ на этих промежутках.
- $f(x) \in D^2(c), f(x) \in D^2(a, b), f(x) \in D^2[a, b]$ – функция $f(x)$ дважды дифференцируема в точке c , на интервале (a, b) , на отрезке $[a, b]$, т.е. имеет производные $f'(x), f''(x)$ на этих промежутках.

Теорема 1 (достаточное условие монотонности*). Пусть $f(x) \in D(a, b)$. Если $\forall x \in (a, b) f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$), то на интервале (a, b) функция $y = f(x)$ строго возрастает (строго убывает).

Доказательство

Пусть $x_1, x_2 \in (a, b)$ и $x_1 < x_2$. По теореме Лагранжа

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c), c \in (x_1, x_2).$$

Откуда

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1).$$

Поскольку $x_2 - x_1 > 0$, получаем

1) если $f'(c) > 0$, то $f(x_2) - f(x_1) > 0$ или $f(x_2) > f(x_1)$, т.е. $f(x)$ строго возрастает,

2) если $f'(c) < 0$, то $f(x_2) - f(x_1) < 0$ или $f(x_2) < f(x_1)$, т.е. $f(x)$ строго убывает. ■

2 Экстремум функции

Определение 7. Точка c называется **критической точкой** функции $y = f(x)$, если ее производная $f'(c)$ равна нулю или не существует.

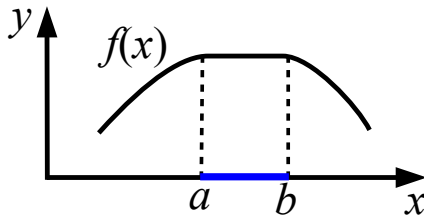
Определение 8. Точка c называется **точкой локального максимума** функции $y = f(x)$, если

$$\exists \overset{\circ}{U}(c) \forall x \in \overset{\circ}{U}(c) : f(x) \leq f(c).$$

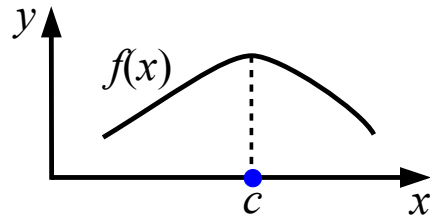
Определение 9. Точка c называется **точкой строгого локального максимума** функции $y = f(x)$, если

$$\exists \overset{\circ}{U}(c) \forall x \in \overset{\circ}{U}(c) : f(x) < f(c).$$

Иллюстрация:



Каждая точка отрезка $[a, b]$ – это точка локального максимума



Точка c – это точка строгого локального максимума

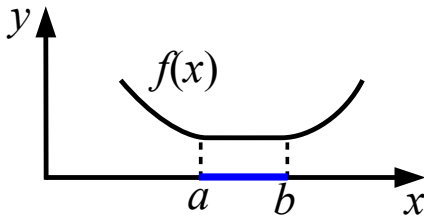
Определение 10. Точка c называется **точкой локального минимума** функции $y = f(x)$, если

$$\exists \overset{\circ}{U}(c) \forall x \in \overset{\circ}{U}(c) : f(x) \geq f(c).$$

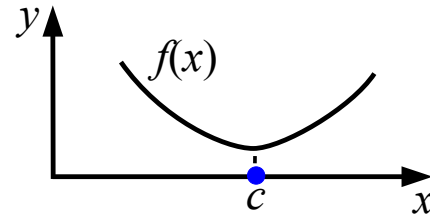
Определение 11. Точка c называется **точкой строгого локального минимума** функции $y = f(x)$, если

$$\exists \overset{\circ}{U}(c) \forall x \in \overset{\circ}{U}(c) : f(x) > f(c).$$

Иллюстрация:



Каждая точка отрезка $[a, b]$ – это точка локального минимума



Точка c – это точка строгого локального минимума

Определение 12. Точки локального максимума и минимума функции также называются **точками экстремума** функции.

Точки строгого локального максимума и минимума функции называются **точками строгого экстремума** функции.

Определение 13. Значение функции в точке локального максимума называется ее **локальным максимумом**.

Значение функции в точке локального минимума называется ее **локальным минимумом**.

Локальные максимум и минимум функции называются **экстремумами функции**.

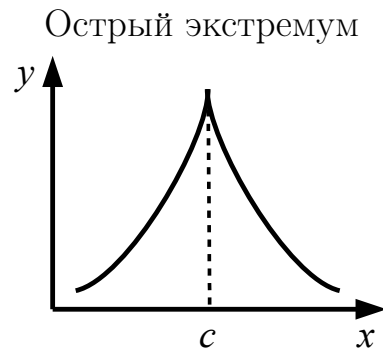
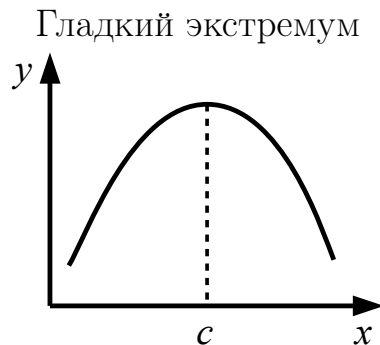
Замечание 1. Аналогично определяется **строгий экстремум** функции.

3 Условия существования экстремума

Теорема 2 (необходимое условие экстремума). Если точка c является точкой экстремума функции $y = f(x)$, то в этой точке производная $f'(c)$ равна нулю или не существует.

Если $f'(c) = 0$, то в точке c функция имеет *гладкий экстремум*. Если $f'(c)$ не существует, то в точке c функция имеет *острый экстремум*.

Иллюстрация:



Теорема 3 (достаточное условие экстремума по первой производной*). Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в некоторой окрестности точки c , кроме, быть может, самой точки c , в которой она является непрерывной. Тогда, если $f'(x)$ меняет знак при переходе через точку c , то точка c является точкой строгого экстремума.

Доказательство

Рассмотрим случай $f'(x) > 0$ для $x < c$ и $f'(x) < 0$ для $x > c$. По теореме Лагранжа $f(x) - f(c) = f'(\xi)(x - c)$, где число ξ лежит на интервале с концами x и c .

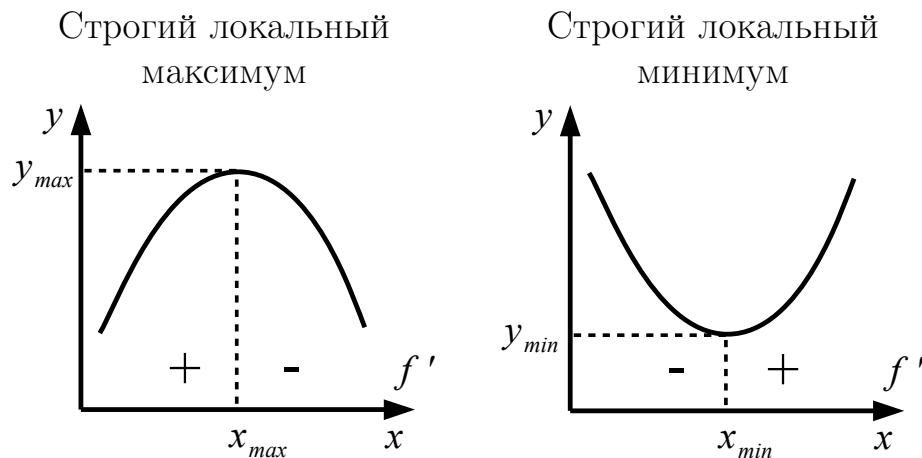
Если $x < c$, то $x - c < 0$, $f'(\xi) > 0$. $\Rightarrow f(x) - f(c) < 0$, $f(x) < f(c)$.

Если $x > c$, то $x - c > 0$, $f'(\xi) < 0$. $\Rightarrow f(x) - f(c) < 0$, $f(x) < f(c)$.

$\Rightarrow c$ – точка строгого локального максимума.

Случай локального минимума рассматривается аналогично. ■

Иллюстрация:



Теорема 4 (достаточное условие экстремума по второй производной). Пусть $f(x) \in D^2(c)$, $f'(c) = 0$, $f''(c) \neq 0$. Если $f''(c) < 0$, то c – точка строгого локального максимума. Если $f''(c) > 0$, то c – точка строгого локального минимума.