

# Математический анализ

## Модуль 4

### Приложения

### дифференциального исчисления

## Лекция 4.1

(для ГУИМЦ, 2026)

#### Аннотация

Формула Тейлора. Формула Маклорена. Представления остаточного члена. Разложение некоторых элементарных функций по формуле Маклорена. Приближенные вычисления с помощью формулы Тейлора. Вычисление пределов по формуле Тейлора.

## 1 Формула Тейлора

**Определение 1.** Многочленом Тейлора степени  $n$  функции  $y = f(x)$  в точке  $c$  называется многочлен вида

$$P_n(x) = f(c) + \frac{1}{1!}f'(c)(x - c) + \frac{1}{2!}f''(c)(x - c)^2 + \dots \\ \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(c)(x - c)^n.$$

#### *Свойство многочлена Тейлора\**

В точке  $c$  совпадают значения функции и ее многочлена Тейлора, а также значения их первых  $n$  производных, т.е.

$$P_n(c) = f(c), P'_n(c) = f'(c), \dots, P_n^{(n)}(c) = f^{(n)}(c).$$

#### *Доказательство*

$$P_n(c) = f(c) + \frac{1}{1!}f'(c)(c - c) + \frac{1}{2!}f''(c)(c - c)^2 + \dots + \\ + \frac{1}{n!}f^{(n)}(c)(c - c)^n =$$

$$= f(c) + \frac{1}{1!}f'(c) \cdot 0 + \frac{1}{2!}f''(c) \cdot 0 + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(c) \cdot 0 = f(c).$$

$$P'_n(x) = \frac{1}{1!}f'(c) + \frac{1}{2!}2f''(c)(x-c) + \dots + \frac{1}{n!}nf^{(n)}(c)(x-c)^{n-1}.$$

$$\begin{aligned} P'_n(c) &= \frac{1}{1!}f'(c) + \frac{1}{2!}2f''(c)(c-c) + \dots + \frac{1}{n!}nf^{(n)}(c)(c-c)^{n-1} = \\ &= \frac{1}{1!}f'(c) + \frac{1}{2!}2f''(c) \cdot 0 + \dots + \frac{1}{n!}nf^{(n)}(c) \cdot 0 = f'(c) \end{aligned}$$

Аналогично для остальных производных. ■

**Теорема 1** (формула Тейлора). Пусть функция  $f(x)$  определена на интервале  $(a, b)$  и имеет в точке  $c \in (a, b)$  производные до порядка  $n$  включительно. Тогда  $\forall x \in (a, b)$  справедлива **формула Тейлора  $n$ -ого порядка**

$$\begin{aligned} f(x) &= f(c) + \frac{1}{1!}f'(c)(x-c) + \frac{1}{2!}f''(c)(x-c)^2 + \dots \\ &\quad \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(c)(x-c)^n + r_n = P_n(x) + r_n, \end{aligned}$$

где  $r_n$  – остаточный член формулы Тейлора.

**Формы записи остаточного члена:**

1) форма Пеано,  $r_n = o((x-c)^n), x \rightarrow c$ ,

2) форма Лагранжа,  $r_n = \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c + \theta(x-c))(x-c)^{n+1}, 0 < \theta < 1$ .

Таким образом, формула Тейлора есть наилучшее приближение функции многочленом в окрестности заданной точки.

**Определение 2.** Формулой Маклорена называется формула Тейлора при  $c = 0$ , т.е. формула вида

$$f(x) = f(0) + \frac{1}{1!}f'(0) \cdot x + \frac{1}{2!}f''(0) \cdot x^2 + \dots \\ \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(0) \cdot x^n + o(x^n), x \rightarrow 0.$$

## 2 Примеры разложения функций по формуле Маклорена

Разложим по формуле Маклорена некоторые элементарные функции.

1)  $y = \sin x$

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 & f'(0) &= 1 \\ f'(x) &= \cos x & f''(0) &= 0 \\ f''(x) &= -\sin x & f'''(0) &= -1 \\ f'''(x) &= -\cos x & f^{IV}(0) &= 0 \\ f^{IV}(x) &= \sin x & f^V(0) &= 1 \\ f^V(x) &= \cos x & & \\ \Rightarrow f^{(m)}(0) &= \begin{cases} 0, & m = 2n, \\ (-1)^n, & m = 2n + 1, \end{cases} & n &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Тогда по формуле Маклорена

$$f(x) = f(0) + \frac{1}{1!} \cdot f'(0) \cdot x + \frac{1}{2!} \cdot f''(0) \cdot x^2 + \dots$$

имеем:

$$\begin{aligned}\sin x = & 0 + \frac{1}{1!} \cdot 1 \cdot x + \frac{1}{2!} \cdot 0 \cdot x^2 + \frac{1}{3!} \cdot (-1) \cdot x^3 + \frac{1}{4!} \cdot 0 \cdot x^4 + \\ & + \frac{1}{5!} \cdot 1 \cdot x^5 + \dots + \frac{1}{(2n)!} \cdot 0 \cdot x^{2n} + \frac{1}{(2n+1)!} \cdot (-1)^n \cdot x^{2n+1} + \\ & + \frac{1}{(2n+2)!} \cdot 0 \cdot x^{2n+2} + o(x^{2n+2}), x \rightarrow 0\end{aligned}$$

Убрав слагаемые с нулевыми коэффициентами, получаем разложение функции  $\sin x$  по формуле Маклорена порядка  $2n+2$ :

$$\begin{aligned}\sin x = & x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \dots + \\ & + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}), x \rightarrow 0.\end{aligned}$$

Это разложение можно записать в краткой форме:

$$\sin x = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}), x \rightarrow 0.$$

**Пример 1.** Разложения  $y = \sin x$  для малых степеней имеют вид:

$$\sin x = x + o(x^2), x \rightarrow 0.$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4), x \rightarrow 0.$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6), x \rightarrow 0.$$

## 2) $y = \cos x$

$$f(0) = 1$$

$$f'(x) = -\sin x$$

$$f''(x) = -\cos x$$

$$f'''(x) = \sin x$$

$$f^{IV}(x) = \cos x$$

$$f^V(x) = -\sin x$$

$$f'(0) = 0$$

$$f''(0) = -1$$

$$f'''(0) = 0$$

$$f^{IV}(0) = 1$$

$$f^V(0) = 0$$

$$\Rightarrow f^{(m)}(0) = \begin{cases} 0, & m = 2n + 1, \\ (-1)^n, & m = 2n, \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Тогда по формуле Маклорена имеем:

$$\begin{aligned} \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) = \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}), \quad x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

**Пример 2.** Разложения  $y = \cos x$  для малых степеней имеют вид:

$$\cos x = 1 + o(x), \quad x \rightarrow 0.$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^3), \quad x \rightarrow 0.$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5), \quad x \rightarrow 0.$$

### 3) $f(x) = e^x$

$$f(0) = 1$$

$$f^{(m)}(x) = e^x$$

$$f^{(m)}(0) = 1$$

$$\Rightarrow e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n), \quad x \rightarrow 0.$$

### 4) $f(x) = (1 + x)^\alpha$

$$f(0) = 1$$

$$f^{(m)}(x) = \alpha(\alpha - 1)\dots(\alpha - m + 1)(1 + x)^{\alpha - m}$$

$$f^{(m)}(0) = \alpha(\alpha - 1)\dots(\alpha - m + 1)$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow (1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \dots + \\
&+ \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n) = \\
&= 1 + \sum_{k=1}^n \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}x^k + o(x^n), x \rightarrow 0.
\end{aligned}$$

**Пример 3.** В частности,

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{0.5} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2), x \rightarrow 0.$$

5)  $f(x) = \ln(1+x)$

$$\begin{aligned}
f(0) &= 0 \\
f^{(m)}(x) &= (-1)^{m-1} \frac{(m-1)!}{(1+x)^m} \\
f^{(m)}(0) &= (-1)^{m-1} (m-1)! \\
\Rightarrow \ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n), x \rightarrow 0.
\end{aligned}$$

### 3 Приближенные вычисления по формуле Тейлора

Разложив функцию  $y = f(x)$  по формуле Тейлора в окрестности точки  $c$ , будем иметь

$$f(x) = P_n(x) + r_n \quad \forall x \in U(c),$$

где  $P_n(x)$  – многочлен Тейлора степени  $n$ , а  $r_n = o((x-c)^n)$ ,  $x \rightarrow c$  – остаточный член формулы Тейлора.

Отбросив  $r_n$ , получим приближенную формулу

$$f(x) \approx P_n(x).$$

*Чем больше  $n$  и ближе  $x$  к  $c$ , тем точнее данная формула.*

**Пример 4.**  $\sin \frac{\pi}{6} = 0.5, \frac{\pi}{6} \approx 0.5236.$

$$\sin x = x + o(x^2) \approx x, \sin \frac{\pi}{6} \approx 0.5236.$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4) \approx x - \frac{x^3}{3!}, \sin \frac{\pi}{6} \approx 0.4997.$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6) \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}, \sin \frac{\pi}{6} \approx 0.500003.$$

## 4 Вычисление пределов с помощью формулы Тейлора

Для вычисления пределов вида

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)}$$

с неопределенностью

$$\left( \frac{0}{0} \right)$$

можно разложить функции  $f(x)$  и  $g(x)$  по формуле Тейлора в точке  $c$ , ограничившись лишь несколькими первыми ненулевыми членами. В результате получаем:

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{a(x-c)^n + o((x-c)^n)}{b(x-c)^m + o((x-c)^m)}.$$

Далее числитель и знаменатель дроби делим на  $(x-c)$  в наименьшей из  $n$  и  $m$  степени и используем формулу

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{o((x-c)^\alpha)}{(x-c)^\beta} = 0, \text{ если } \alpha \geq \beta.$$

**Пример 5.** Вычислим предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} = \left( \frac{0}{0} \right) = ?$$

Разложим по формуле Тейлора функции, входящие в искомое выражение:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3), x \rightarrow 0,$$

$$e^{-x} = 1 + (-x) + \frac{(-x)^2}{2!} + \frac{(-x)^3}{3!} + o(x^3), x \rightarrow 0,$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4), x \rightarrow 0.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} &= \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\overbrace{1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)}^{e^x} - \overbrace{1 + x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - o(x^3)}^{-e^{-x}} - 2x}{\underbrace{x - x + \frac{x^3}{3!} - o(x^4)}_{-\sin x}} = \\ &= \left| \begin{array}{l} o(x^3) - o(x^3) = o(x^3), \\ -o(x^3) = o(x^3). \end{array} \right| = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^3}{3} + o(x^3)}{\frac{x^3}{6} + o(x^4)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3} + \frac{o(x^3)}{x^3}}{\frac{1}{6} + \frac{o(x^4)}{x^3}} = \frac{\frac{1}{3} + 0}{\frac{1}{6} + 0} = 2. \end{aligned}$$