

Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана
Факультет “Фундаментальные науки”
Кафедра “Высшая математика”

Математический анализ

Модуль 3

Дифференциальное исчисление
функций одной переменной

Лекция 3.3

для ГУИМЦ, 2026

Койфман К.Г., Семакин А.Н.

Производная в экстремальных точках



Теорема (теорема Ферма)*



Теорема (теорема Ферма)*

Если функция определена в некоторой окрестности точки c , дифференцируема в самой точке c и принимает в ней наибольшее или наименьшее значение, то ее производная в этой точке равна нулю.



Производная в экстремальных точках

Доказательство



Производная в экстремальных точках

Доказательство

Пусть функция $f(x)$ определена в окрестности $U(c)$ точки c и принимает в этой точке наибольшее значение.



Производная в экстремальных точках

Доказательство

Пусть функция $f(x)$ определена в окрестности $U(c)$ точки c и принимает в этой точке наибольшее значение. Тогда

$$\forall x \in U(c) \quad f(x) \leq f(c).$$



Производная в экстремальных точках

Доказательство

Пусть функция $f(x)$ определена в окрестности $U(c)$ точки c и принимает в этой точке наибольшее значение. Тогда

$$\forall x \in U(c) \quad f(x) \leq f(c).$$

Соответственно,



Производная в экстремальных точках

Доказательство

Пусть функция $f(x)$ определена в окрестности $U(c)$ точки c и принимает в этой точке наибольшее значение. Тогда

$$\forall x \in U(c) \quad f(x) \leq f(c).$$

Соответственно,

$$\text{если } x < c, \text{ то } \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0, \quad (1)$$



Производная в экстремальных точках

Доказательство

Пусть функция $f(x)$ определена в окрестности $U(c)$ точки c и принимает в этой точке наибольшее значение. Тогда

$$\forall x \in U(c) \quad f(x) \leq f(c).$$

Соответственно,

$$\text{если } x < c, \text{ то } \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0, \quad (1)$$

$$\text{если } x > c, \text{ то } \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0. \quad (2)$$



Производная в экстремальных точках

Перейдем к пределу в данных неравенствах
при $x \rightarrow c$:



Производная в экстремальных точках

Перейдем к пределу в данных неравенствах при $x \rightarrow c$:

$$(1) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow c-0} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$$



Производная в экстремальных точках

Перейдем к пределу в данных неравенствах при $x \rightarrow c$:

$$(1) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow c-0} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0 \Rightarrow f'_-(c) \geq 0,$$



Производная в экстремальных точках

Перейдем к пределу в данных неравенствах при $x \rightarrow c$:

$$(1) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow c-0} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0 \Rightarrow f'_-(c) \geq 0,$$

$$(2) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow c+0} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0$$



Производная в экстремальных точках

Перейдем к пределу в данных неравенствах при $x \rightarrow c$:

$$(1) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow c-0} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0 \Rightarrow f'_-(c) \geq 0,$$

$$(2) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow c+0} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0 \Rightarrow f'_+(c) \leq 0.$$



Производная в экстремальных точках

Поскольку функция $f(x)$ дифференцируема в точке c , то в этой точке существует ее производная $f'(c)$,



Производная в экстремальных точках

Поскольку функция $f(x)$ дифференцируема в точке c , то в этой точке существует ее производная $f'(c)$, которая по теореме о связи односторонних производных с двусторонней должна равняться их общему значению:



Производная в экстремальных точках

Поскольку функция $f(x)$ дифференцируема в точке c , то в этой точке существует ее производная $f'(c)$, которая по теореме о связи односторонних производных с двусторонней должна равняться их общему значению:

$$f'(c) = f'_-(c) = f'_+(c).$$



Производная в экстремальных точках

Поскольку функция $f(x)$ дифференцируема в точке c , то в этой точке существует ее производная $f'(c)$, которая по теореме о связи односторонних производных с двусторонней должна равняться их общему значению:

$$f'(c) = f'_-(c) = f'_+(c).$$

Поскольку $f'_-(c) \geq 0$ и $f'_+(c) \leq 0$,



Производная в экстремальных точках

Поскольку функция $f(x)$ дифференцируема в точке c , то в этой точке существует ее производная $f'(c)$, которая по теореме о связи односторонних производных с двусторонней должна равняться их общему значению:

$$f'(c) = f'_-(c) = f'_+(c).$$

Поскольку $f'_-(c) \geq 0$ и $f'_+(c) \leq 0$, данное двойное равенство выполняется, только если

$$f'_-(c) = 0, \quad f'_+(c) = 0,$$



Производная в экстремальных точках

Поскольку функция $f(x)$ дифференцируема в точке c , то в этой точке существует ее производная $f'(c)$, которая по теореме о связи односторонних производных с двусторонней должна равняться их общему значению:

$$f'(c) = f'_-(c) = f'_+(c).$$

Поскольку $f'_-(c) \geq 0$ и $f'_+(c) \leq 0$, данное двойное равенство выполняется, только если

$$f'_-(c) = 0, f'_+(c) = 0, \text{ а значит, и } f'(c) = 0.$$



Теоремы о средних значениях



Теоремы о средних значениях

Теорема (теорема Ролля)*



Теоремы о средних значениях

Теорема (теорема Ролля)*

Пусть функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$ и удовлетворяет условиям:

- 1) она непрерывна на отрезке $[a, b]$,
- 2) она дифференцируема на интервале (a, b) ,
- 3) $f(a) = f(b)$.



Теоремы о средних значениях

Теорема (теорема Ролля)*

Тогда

$$\exists c \in (a, b) : f'(c) = 0.$$



Теоремы о средних значениях

Доказательство



Теоремы о средних значениях

Доказательство

Поскольку $f(x) \in C[a, b]$, то она достигает на $[a, b]$ своего наибольшего M и наименьшего m значений по теореме Вейерштрасса для функции, непрерывной на отрезке.



Теоремы о средних значениях

Возможны случаи:



Теоремы о средних значениях

Возможны случаи:

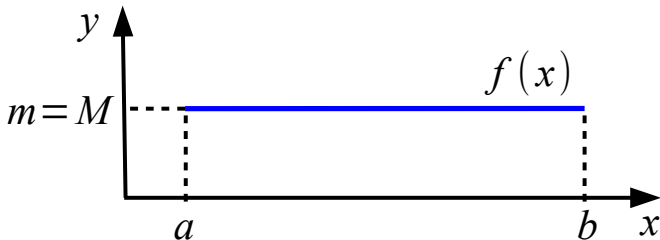
1) $m = M$



Теоремы о средних значениях

Возможны случаи:

1) $m = M$



Теоремы о средних значениях

Тогда, поскольку для всех $x \in [a, b]$ имеем $M = m \leq f(x) \leq M$, то $f(x) = M = \text{const.}$



Теоремы о средних значениях

Тогда, поскольку для всех $x \in [a, b]$ имеем $m \leq f(x) \leq M$, то $f(x) = M = \text{const.}$
Следовательно, $\forall x \in (a, b) : f'(x) = 0$.



Теоремы о средних значениях

Тогда, поскольку для всех $x \in [a, b]$ имеем $m \leq f(x) \leq M$, то $f(x) = M = \text{const}$. Следовательно, $\forall x \in (a, b) : f'(x) = 0$. Таким образом, в качестве точки c в этом случае можно взять любую точку из интервала (a, b) .



Теоремы о средних значениях

Возможны случаи:

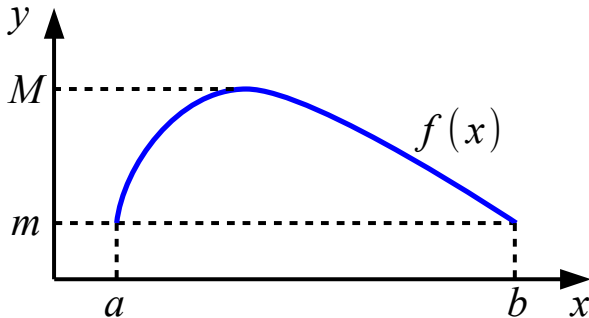
2) $m \neq M$



Теоремы о средних значениях

Возможны случаи:

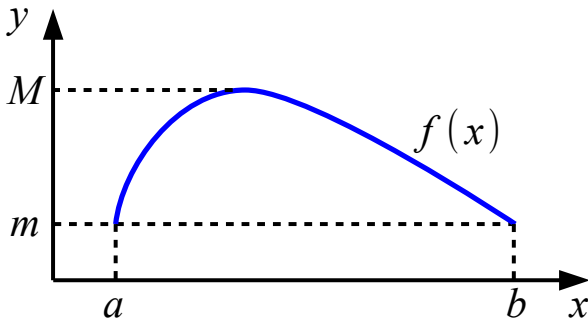
2) $m \neq M$



Теоремы о средних значениях

Возможны случаи:

2) $m \neq M$



Так как $f(a) = f(b)$, то хотя бы одно из чисел m или M достигается на интервале (a, b) .



Теоремы о средних значениях

Пусть, для определенности, M достигается на (a, b) , т.е. $M = f(c)$, $c \in (a, b)$.



Теоремы о средних значениях

Пусть, для определенности, M достигается на (a, b) , т.е. $M = f(c)$, $c \in (a, b)$. Тогда по теореме Ферма имеем $f'(c) = 0$. ■



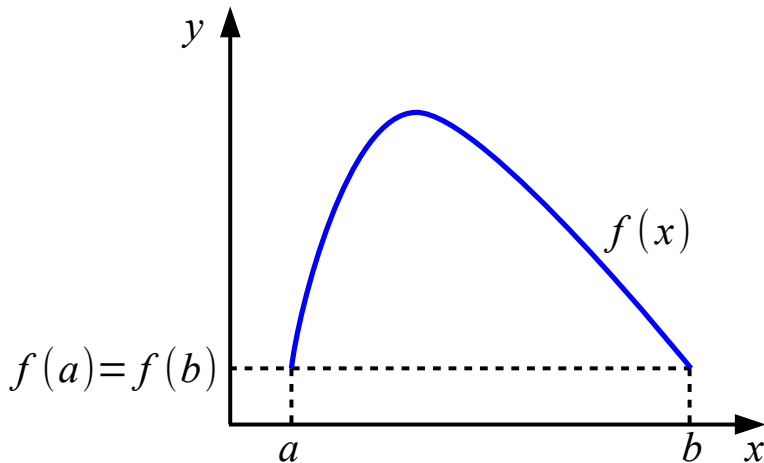
Теоремы о средних значениях

Геометрическая интерпретация теоремы:



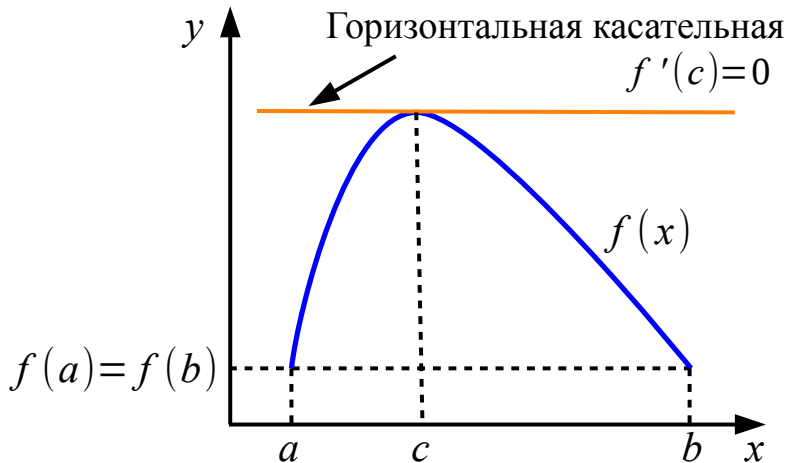
Теоремы о средних значениях

Геометрическая интерпретация теоремы:



Теоремы о средних значениях

Геометрическая интерпретация теоремы:



Теоремы о средних значениях

Если функция $f(x)$ удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля, то на интервале (a, b) существует точка, в которой эта функция имеет горизонтальную касательную.



Теоремы о средних значениях

Теорема (теорема Лагранжа, теорема о конечных приращениях*)



Теоремы о средних значениях

Теорема (теорема Лагранжа, теорема о конечных приращениях*)

Пусть функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$ и удовлетворяет условиям:

- 1) она непрерывна на отрезке $[a, b]$,
- 2) она дифференцируема на интервале (a, b) .



Теоремы о средних значениях

Теорема (теорема Лагранжа, теорема о конечных приращениях*)

Тогда

$$\exists c \in (a, b) : \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$



Теоремы о средних значениях

Доказательство



Теоремы о средних значениях

Доказательство

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$



Теоремы о средних значениях

Доказательство

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Функция $F(x)$ удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля.



Теоремы о средних значениях

Доказательство

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Функция $F(x)$ удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля.

$$\Rightarrow \exists c \in (a, b) : F'(c) = 0.$$



Теоремы о средних значениях

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$



Теоремы о средних значениях

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



Теоремы о средних значениях

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$
$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0.$$



Теоремы о средних значениях

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$
$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0.$$
$$\Rightarrow f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \blacksquare$$



Теоремы о средних значениях

Теорема (теорема Коши)



Теоремы о средних значениях

Теорема (теорема Коши)

Пусть функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ определены на отрезке $[a, b]$ и удовлетворяют условиям:

- 1) они непрерывны на отрезке $[a, b]$,
- 2) они дифференцируемы на интервале (a, b) ,
- 3) $g'(x) \neq 0$ во всех точках интервала (a, b) .



Теоремы о средних значениях

Теорема (теорема Коши)

Тогда

$$\exists c \in (a, b) : \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$



Правило Лопиталя



Правило Лопиталя

Правило Лопиталя – это способ нахождения пределов функций через их производные.



Правило Лопиталя

Правило Лопиталя – это способ нахождения пределов функций через их производные. Сначала рассмотрим частный случай правила Лопиталя раскрытия неопределенности $(0/0)$.



Правило Лопиталя

Теорема (частный случай правила Лопиталя)*



Правило Лопиталя

Теорема (частный случай правила Лопиталя)*

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют условиям:

- 1) они непрерывны и дифференцируемы на интервале (a, b) ,
- 2) $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+0} g(x) = 0$,
- 3) $\forall x \in (a, b) : g'(x) \neq 0$,
- 4) $\exists \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (конечный или бесконечный).



Правило Лопиталя

Теорема (частный случай правила Лопиталя)*

Тогда

$$\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$



Правило Лопиталя

Доказательство



Правило Лопиталя

Доказательство

Доопределим функции $f(x)$ и $g(x)$ в точке a ,
положив $f(a) = g(a) = 0$.



Правило Лопиталя

Доказательство

Доопределим функции $f(x)$ и $g(x)$ в точке a , положив $f(a) = g(a) = 0$. В этом случае функции $f(x)$ и $g(x)$ становятся непрерывными в точке a



Правило Лопиталя

Доказательство

Доопределим функции $f(x)$ и $g(x)$ в точке a , положив $f(a) = g(a) = 0$. В этом случае функции $f(x)$ и $g(x)$ становятся непрерывными в точке a и начинают удовлетворять всем условиям теоремы Коши на любом отрезке $[a, x]$, где $a < x < b$.



Правило Лопиталя

Тогда

$\exists c(x) \in (a, x) :$



Правило Лопиталя

Тогда

$$\exists c(x) \in (a, x) : \frac{f(x)}{g(x)}$$



Правило Лопиталя

Тогда

$$\exists c(x) \in (a, x) : \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - 0}{g(x) - 0}$$



Правило Лопиталя

Тогда

$$\begin{aligned}\exists c(x) \in (a, x) : \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{f(x) - 0}{g(x) - 0} = \\ &= \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)}\end{aligned}$$



Правило Лопиталя

Тогда

$$\begin{aligned}\exists c(x) \in (a, x) : \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{f(x) - 0}{g(x) - 0} = \\ &= \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c(x))}{g'(c(x))}\end{aligned}$$



Правило Лопиталя

Тогда

$$\begin{aligned}\exists c(x) \in (a, x) : \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{f(x) - 0}{g(x) - 0} = \\ &= \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c(x))}{g'(c(x))}\end{aligned}$$

или, убрав промежуточные выкладки,

$$\exists c(x) \in (a, x) : \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c(x))}{g'(c(x))}. \quad (1)$$



Правило Лопиталя

Заметим, что здесь мы пишем не c , а $c(x)$, поскольку значение c зависит от рассматриваемого интервала (a, x) .



Правило Лопиталя

Заметим, что здесь мы пишем не c , а $c(x)$, поскольку значение c зависит от рассматриваемого интервала (a, x) . Меняя значение переменной x , мы меняем размер интервала (a, x) .



Правило Лопиталя

Заметим, что здесь мы пишем не c , а $c(x)$, поскольку значение c зависит от рассматриваемого интервала (a, x) . Меняя значение переменной x , мы меняем размер интервала (a, x) . В результате меняется и значение c .



Правило Лопиталя

Заметим, что здесь мы пишем не c , а $c(x)$, поскольку значение c зависит от рассматриваемого интервала (a, x) . Меняя значение переменной x , мы меняем размер интервала (a, x) . В результате меняется и значение c . Поэтому c является некоторой функцией от x : $c = c(x)$.



Правило Лопиталя

Так как $a < c(x) < x$, то $\lim_{x \rightarrow a+0} c(x) = a$.



Правило Лопиталя

Так как $a < c(x) < x$, то $\lim_{x \rightarrow a+0} c(x) = a$.

По теореме о замене переменной в пределе
имеем:



Правило Лопиталя

Так как $a < c(x) < x$, то $\lim_{x \rightarrow a+0} c(x) = a$.

По теореме о замене переменной в пределе имеем:

$$\lim_{c \rightarrow a+0} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(c(x))}{g'(c(x))},$$



Правило Лопиталя

Так как $a < c(x) < x$, то $\lim_{x \rightarrow a+0} c(x) = a$.

По теореме о замене переменной в пределе имеем:

$$\lim_{c \rightarrow a+0} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(c(x))}{g'(c(x))},$$

а по равенству (1)

$$\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(c(x))}{g'(c(x))}.$$



Правило Лопиталя

Тогда

$$\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c \rightarrow a+0} \frac{f'(c)}{g'(c)}$$



Правило Лопиталя

Тогда

$$\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c \rightarrow a+0} \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

или, изменив обозначение переменной в последнем пределе с c на x ,

$$\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \blacksquare$$



Общий случай правила Лопиталя:



Правило Лопиталя

Общий случай правила Лопиталя:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \left(\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

где a – это конечное число или одна из бесконечностей.



Порядок роста функций



Порядок роста функций

Определение

Говорят, что бесконечно большая при $x \rightarrow a$ функция $f(x)$ имеет **более высокий порядок роста**, чем бесконечно большая при $x \rightarrow a$ функция $g(x)$, если

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty.$$



Порядок роста функций

Примеры:



Порядок роста функций

Примеры:

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{\ln x}$$



Порядок роста функций

Примеры:

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{\ln x} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right)$$



Порядок роста функций

Примеры:

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{\ln x} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^n)'}{(\ln x)'}$$



Порядок роста функций

Примеры:

$$\begin{aligned} 1) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{\ln x} &= \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^n)'}{(\ln x)'} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{nx^{n-1}}{1/x} \end{aligned}$$



Порядок роста функций

Примеры:

$$\begin{aligned} 1) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{\ln x} &= \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^n)'}{(\ln x)'} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{nx^{n-1}}{1/x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} nx^n \end{aligned}$$



Порядок роста функций

Примеры:

$$\begin{aligned} 1) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{\ln x} &= \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^n)'}{(\ln x)'} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{nx^{n-1}}{1/x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} nx^n = +\infty \end{aligned}$$



Порядок роста функций

$$2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{x^n}$$



Порядок роста функций

$$2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{x^n} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right)$$



Порядок роста функций

$$2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{x^n} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(a^x)'}{(x^n)'}$$



Порядок роста функций

$$\begin{aligned} 2) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{x^n} &= \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(a^x)'}{(x^n)'} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x \ln a}{n x^{n-1}} \end{aligned}$$



Порядок роста функций

$$\begin{aligned} 2) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{x^n} &= \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(a^x)'}{(x^n)'} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x \ln a}{n x^{n-1}} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) \end{aligned}$$



Порядок роста функций

$$\begin{aligned} 2) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{x^n} &= \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(a^x)'}{(x^n)'} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x \ln a}{n x^{n-1}} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(a^x \ln a)'}{(n x^{n-1})'} \end{aligned}$$



Порядок роста функций

$$\begin{aligned} 2) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{x^n} &= \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(a^x)'}{(x^n)'} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x \ln a}{n x^{n-1}} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(a^x \ln a)'}{(n x^{n-1})'} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x \ln^2 a}{n(n-1)x^{n-2}} \end{aligned}$$



Порядок роста функций

$$\begin{aligned} 2) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{x^n} &= \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(a^x)'}{(x^n)'} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x \ln a}{n x^{n-1}} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(a^x \ln a)'}{(n x^{n-1})'} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x \ln^2 a}{n(n-1)x^{n-2}} = \dots \end{aligned}$$



Порядок роста функций

$$\begin{aligned} 2) \quad & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{x^n} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(a^x)'}{(x^n)'} = \\ & = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x \ln a}{n x^{n-1}} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(a^x \ln a)'}{(n x^{n-1})'} = \\ & = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x \ln^2 a}{n(n-1)x^{n-2}} = \dots = \\ & = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x \ln^n a}{n!} \end{aligned}$$



Порядок роста функций

$$\begin{aligned} 2) \quad & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{x^n} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(a^x)'}{(x^n)'} = \\ & = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x \ln a}{n x^{n-1}} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(a^x \ln a)'}{(n x^{n-1})'} = \\ & = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x \ln^2 a}{n(n-1)x^{n-2}} = \dots = \\ & = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x \ln^n a}{n!} = +\infty, \quad a > 1 \end{aligned}$$



Порядок роста функций

Показательная функция растет быстрее степенной, а степенная функция растет быстрее логарифмической.



Порядок роста функций

