

Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана
Факультет “Фундаментальные науки”
Кафедра “Высшая математика”

Математический анализ

Модуль 3

Дифференциальное исчисление
функций одной переменной

Лекция 3.2

для ГУИМЦ, 2026

Койфман К.Г., Семакин А.Н.

Дифференцируемость функции



Дифференцируемость функции

При фиксированной точке x_0 приращение функции Δf является функцией от приращения аргумента Δx .



Дифференцируемость функции

При фиксированной точке x_0 приращение функции Δf является функцией от приращения аргумента Δx . В приложениях математического анализа к физике и другим естественным наукам особенно важен случай, когда приращение функции имеет главную линейную часть.



Дифференцируемость функции

Определение

Функция $y = f(x)$ называется **дифференцируемой** в точке x_0 , если ее приращение Δf в этой точке можно представить в виде:

$$\Delta f = A \cdot \Delta x + o(\Delta x), \Delta x \rightarrow 0,$$

где A – постоянная, $\Delta x = x - x_0$ – приращение аргумента, $\Delta f = f(x) - f(x_0)$ – приращение функции.



Дифференцируемость функции



Дифференцируемость функции

Обозначение: $D(x_0)$ – множество функций, дифференцируемых в точке x_0 ;



Дифференцируемость функции

Обозначение: $D(x_0)$ – множество функций, дифференцируемых в точке x_0 ; запись $f(x) \in D(x_0)$ означает, что функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 .



Теорема (об эквивалентности
дифференцируемости и существования
производной)*



Теорема (об эквивалентности
дифференцируемости и существования
производной)*

$$f(x) \in D(x_0) \Leftrightarrow \exists f'(x_0) \in R.$$



Дифференцируемость функции

Доказательство



Дифференцируемость функции

Доказательство

1. Прямая теорема. ($\Rightarrow$)



Дифференцируемость функции

Доказательство

1. Прямая теорема. ($\Rightarrow$)

Дано: $f(x) \in D(x_0)$.



Дифференцируемость функции

Доказательство

1. Прямая теорема. ($\Rightarrow$)

Дано: $f(x) \in D(x_0)$.

Доказать: $\exists f'(x_0)$.



Дифференцируемость функции

$$f(x) \in D(x_0)$$



Дифференцируемость функции

$$f(x) \in D(x_0)$$
$$\Delta f = A \cdot \Delta x + o(\Delta x)$$



Дифференцируемость функции

$$\begin{aligned} f(x) &\in D(x_0) \\ \Delta f &= A \cdot \Delta x + o(\Delta x) \quad : \Delta x \end{aligned}$$



Дифференцируемость функции

$$\begin{aligned} f(x) &\in D(x_0) \\ \Delta f &= A \cdot \Delta x + o(\Delta x) : \Delta x \\ \frac{\Delta f}{\Delta x} &= A + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} \end{aligned}$$



Дифференцируемость функции

$$\begin{aligned} f(x) &\in D(x_0) \\ \Delta f &= A \cdot \Delta x + o(\Delta x) : \Delta x \\ \frac{\Delta f}{\Delta x} &= A + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} \\ \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} &= A + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} \end{aligned}$$



Дифференцируемость функции

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = A$$



Дифференцируемость функции

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = A$$



$$\exists f'(x_0)$$



Дифференцируемость функции

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = A$$



$$\exists f'(x_0) = A.$$



2. Обратная теорема. ($\Leftarrow$)



2. Обратная теорема. ($\Leftarrow$)

Дано: $\exists f'(x_0)$.



2. Обратная теорема. ($\Leftarrow$)

Дано: $\exists f'(x_0)$.

Доказать: $f(x) \in D(x_0)$.



Дифференцируемость функции

$$\exists f'(x_0)$$



Дифференцируемость функции

$$\exists f'(x_0) \Rightarrow \exists \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$



Дифференцируемость функции

$$\exists f'(x_0) \Rightarrow \exists \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Пусть $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = A.$



Дифференцируемость функции

$$\exists f'(x_0) \Rightarrow \exists \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Пусть $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = A$. Тогда по теореме о связи функции, ее предела и бесконечно малой



Дифференцируемость функции

$$\exists f'(x_0) \Rightarrow \exists \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Пусть $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = A$. Тогда по теореме о связи функции, ее предела и бесконечно малой

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = A + \alpha(\Delta x),$$



Дифференцируемость функции

$$\exists f'(x_0) \Rightarrow \exists \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Пусть $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = A$. Тогда по теореме о связи функции, ее предела и бесконечно малой

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = A + \alpha(\Delta x),$$

где $\alpha(\Delta x)$ - бесконечно малая при $\Delta x \rightarrow 0$.



Дифференцируемость функции

$$\exists f'(x_0) \Rightarrow \exists \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Пусть $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = A$. Тогда по теореме о связи функции, ее предела и бесконечно малой

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = A + \alpha(\Delta x),$$

где $\alpha(\Delta x)$ - бесконечно малая при $\Delta x \rightarrow 0$.

Отсюда

$$\Delta f = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x.$$



Дифференцируемость функции

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\alpha(\Delta x) \cdot \Delta x}{\Delta x}$$



Дифференцируемость функции

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\alpha(\Delta x) \cdot \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(\Delta x)$$



Дифференцируемость функции

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\alpha(\Delta x) \cdot \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(\Delta x) = 0$$



Дифференцируемость функции

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\alpha(\Delta x) \cdot \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(\Delta x) = 0$$
$$\Downarrow$$
$$\alpha(\Delta x) \cdot \Delta x = o(\Delta x), \Delta x \rightarrow 0$$



Дифференцируемость функции

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\alpha(\Delta x) \cdot \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(\Delta x) = 0$$

$\Downarrow$

$$\alpha(\Delta x) \cdot \Delta x = o(\Delta x), \Delta x \rightarrow 0$$

$\Downarrow$

$$\Delta f = A \cdot \Delta x + o(\Delta x)$$



Дифференцируемость функции

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\alpha(\Delta x) \cdot \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(\Delta x) = 0$$

$\Downarrow$

$$\alpha(\Delta x) \cdot \Delta x = o(\Delta x), \Delta x \rightarrow 0$$

$\Downarrow$

$$\Delta f = A \cdot \Delta x + o(\Delta x)$$

$\Downarrow$

$$f(x) \in D(x_0). \blacksquare$$



Теорема (о непрерывности
дифференцируемой функции)*



Теорема (о непрерывности
дифференцируемой функции)*

$$f(x) \in D(x_0) \Rightarrow f(x) \in C(x_0).$$



Дифференцируемость функции

Доказательство



Дифференцируемость функции

Доказательство

$$f(x) \in D(x_0)$$



Дифференцируемость функции

Доказательство

$$f(x) \in D(x_0) \Rightarrow \Delta f = A \cdot \Delta x + o(\Delta x)$$



Дифференцируемость функции

Доказательство

$$f(x) \in D(x_0) \Rightarrow \Delta f = A \cdot \Delta x + o(\Delta x)$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f =$$



Дифференцируемость функции

Доказательство

$$f(x) \in D(x_0) \Rightarrow \Delta f = A \cdot \Delta x + o(\Delta x)$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (A \cdot \Delta x + o(\Delta x)) =$$



Дифференцируемость функции

Доказательство

$$f(x) \in D(x_0) \Rightarrow \Delta f = A \cdot \Delta x + o(\Delta x)$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (A \cdot \Delta x + o(\Delta x)) = 0$$



Дифференцируемость функции

Доказательство

$$f(x) \in D(x_0) \Rightarrow \Delta f = A \cdot \Delta x + o(\Delta x)$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (A \cdot \Delta x + o(\Delta x)) = 0$$

$$\Rightarrow f(x) \in C(x_0).$$



Дифференциал функции



Дифференциал функции

Пусть $f(x) \in D(x_0)$.



Дифференциал функции

Пусть $f(x) \in D(x_0)$. Тогда

$$\Delta f = A \cdot \Delta x + o(\Delta x), \Delta x \rightarrow 0.$$



Дифференциал функции

Пусть $f(x) \in D(x_0)$. Тогда

$$\Delta f = A \cdot \Delta x + o(\Delta x), \Delta x \rightarrow 0.$$

Определение

Линейная по переменной Δx функция $A \cdot \Delta x$ называется **дифференциалом (первым дифференциалом, дифференциалом первого порядка)** функции $y = f(x)$ в точке x_0 .



Дифференциал функции

Пусть $f(x) \in D(x_0)$. Тогда

$$\Delta f = A \cdot \Delta x + o(\Delta x), \Delta x \rightarrow 0.$$

Определение

Линейная по переменной Δx функция $A \cdot \Delta x$ называется **дифференциалом (первым дифференциалом, дифференциалом первого порядка)** функции $y = f(x)$ в точке x_0 .

Обозначение: $df(x_0)$



Дифференциал функции

Ранее было показано, что $A = f'(x_0)$.



Дифференциал функции

Ранее было показано, что $A = f'(x_0)$. В свою очередь, приращение независимой переменной Δx часто обозначают как dx (дифференциал функции $y = x$).



Дифференциал функции

Ранее было показано, что $A = f'(x_0)$. В свою очередь, приращение независимой переменной Δx часто обозначают как dx (дифференциал функции $y = x$). Тогда

$$df(x_0) = A \cdot \Delta x = f'(x_0) \cdot \Delta x = f'(x_0) \cdot dx$$



Дифференциал функции

Ранее было показано, что $A = f'(x_0)$. В свою очередь, приращение независимой переменной Δx часто обозначают как dx (дифференциал функции $y = x$). Тогда

$$df(x_0) = A \cdot \Delta x = f'(x_0) \cdot \Delta x = f'(x_0) \cdot dx$$

и

$$\Delta f = df(x_0) + o(\Delta x), \Delta x \rightarrow 0.$$



Дифференциал функции

Пример:



Дифференциал функции

Пример:

$$f(x) = x^3, x_0 = 1,$$



Пример:

$$f(x) = x^3, x_0 = 1,$$

$$f'(x) = 3x^2, f'(1) = 3$$



Пример:

$$f(x) = x^3, x_0 = 1,$$

$$f'(x) = 3x^2, f'(1) = 3$$

$$\Rightarrow df(1) = f'(1)dx = 3dx.$$



Дифференциал функции

Геометрический смысл дифференциала



Дифференциал функции

Геометрический смысл дифференциала

Если Δf – это приращение значения функции $y = f(x)$ в точке x_0 при изменении значения аргумента x на Δx ,



Дифференциал функции

Геометрический смысл дифференциала

Если Δf – это приращение значения функции $y = f(x)$ в точке x_0 при изменении значения аргумента x на Δx , то $df(x_0)$ – это приращение ординаты касательной к графику функции $f(x)$ в точке x_0 при изменении значения аргумента x на Δx .



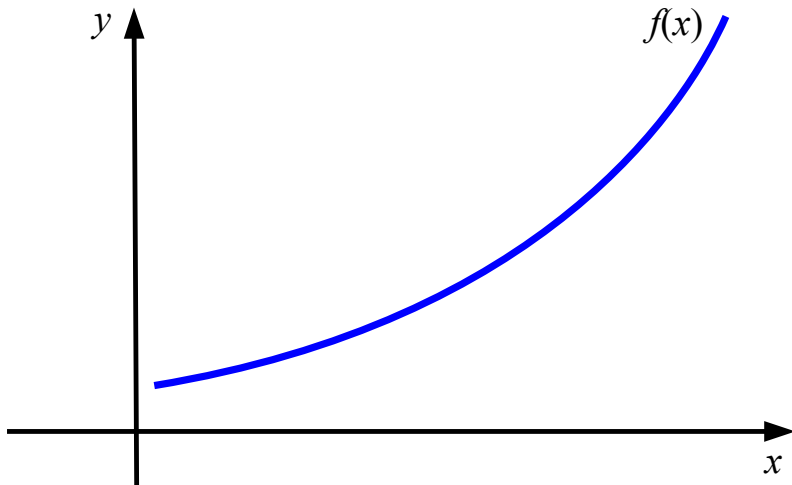
Дифференциал функции

Геометрический смысл дифференциала



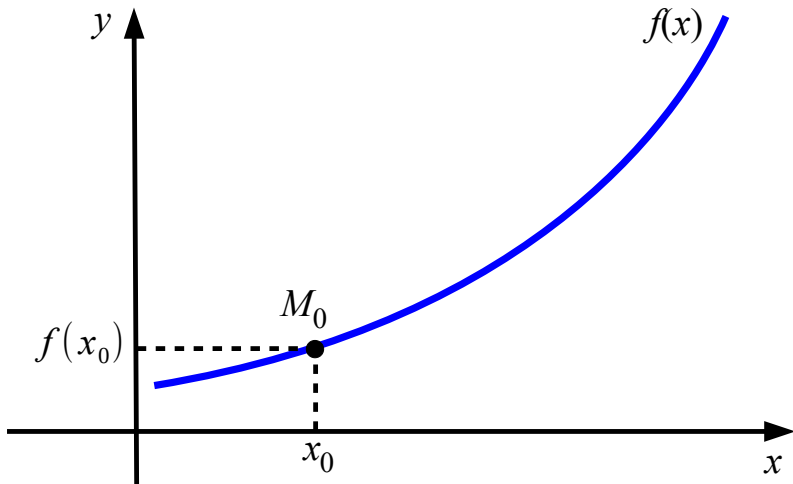
Дифференциал функции

Геометрический смысл дифференциала



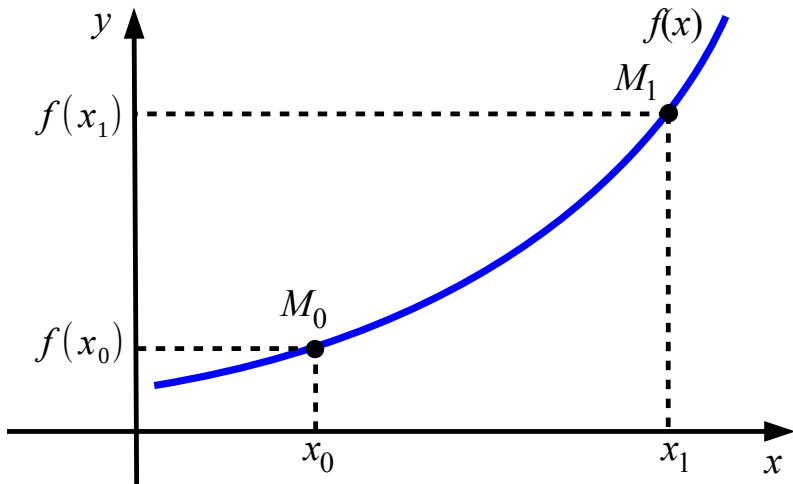
Дифференциал функции

Геометрический смысл дифференциала



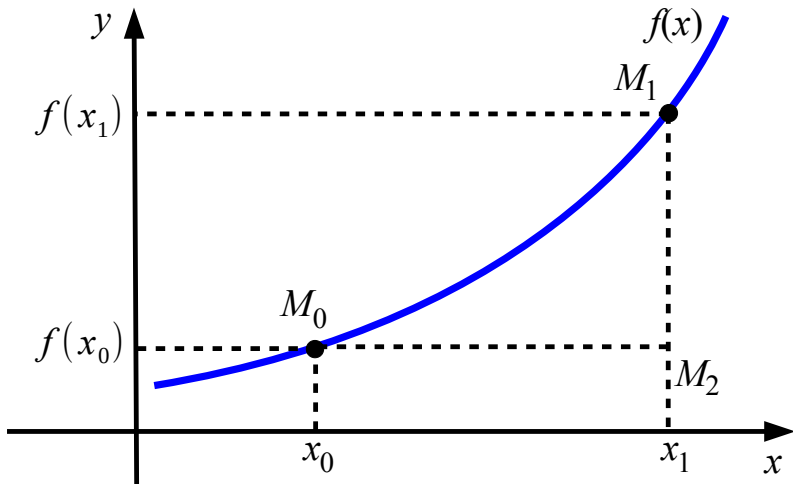
Дифференциал функции

Геометрический смысл дифференциала



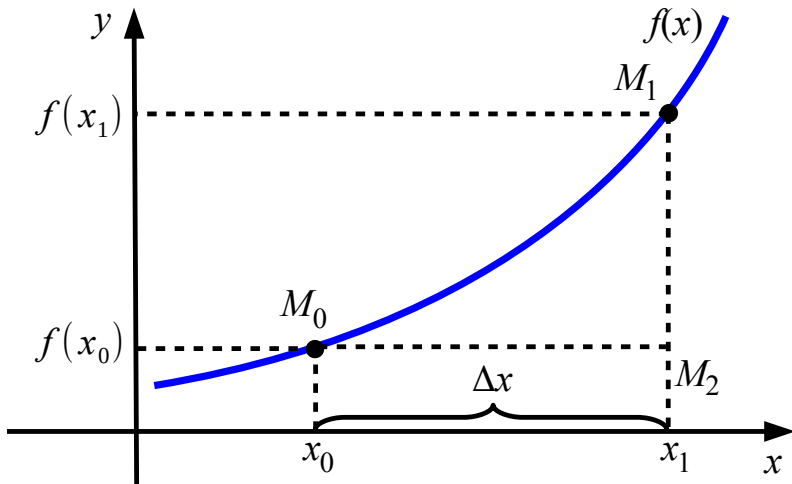
Дифференциал функции

Геометрический смысл дифференциала



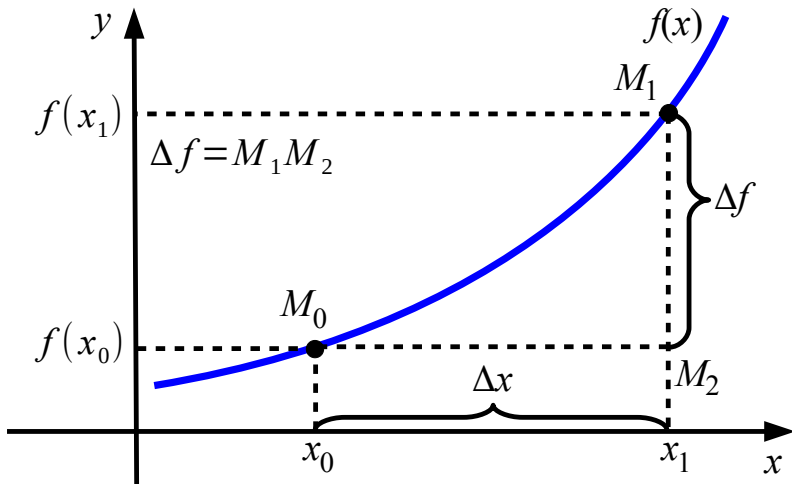
Дифференциал функции

Геометрический смысл дифференциала



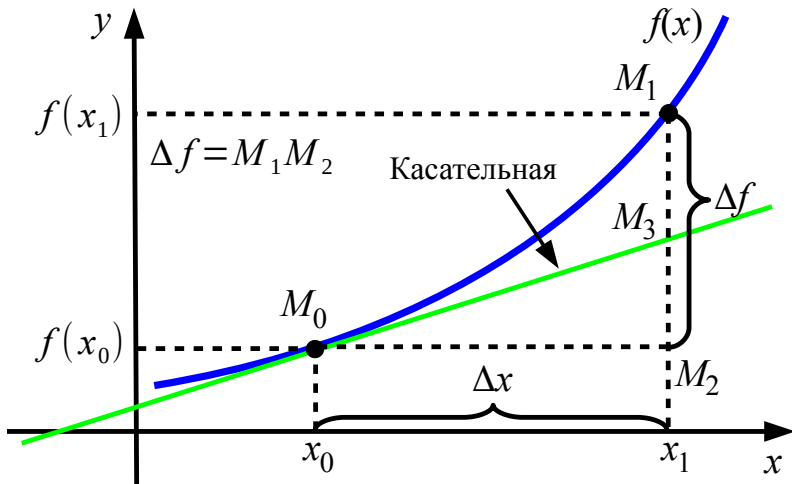
Дифференциал функции

Геометрический смысл дифференциала



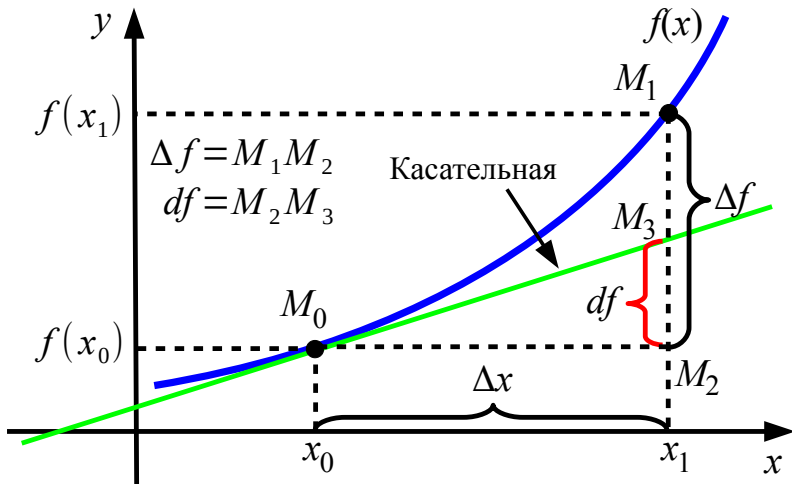
Дифференциал функции

Геометрический смысл дифференциала



Дифференциал функции

Геометрический смысл дифференциала



Свойства дифференциала



Свойства дифференциала

Правила вычисления дифференциала:



Свойства дифференциала

Правила вычисления дифференциала:

$$1. d(u + v) = du + dv.$$

$$2. d(u \cdot v) = v \cdot du + u \cdot dv.$$

$$3. d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \cdot du - u \cdot dv}{v^2}, v \neq 0.$$



Свойства дифференциала

Приближенные вычисления функции с помощью дифференциала



Свойства дифференциала

Приближенные вычисления функции с помощью дифференциала

Пусть $f(x) \in D(x_0)$. Тогда

$$\Delta f = df(x_0) + o(\Delta x), \Delta x \rightarrow 0$$

или

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x), \Delta x \rightarrow 0.$$

Выразим отсюда $f(x_0 + \Delta x)$:



Свойства дифференциала

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x), \Delta x \rightarrow 0$$

и отбросим $o(\Delta x)$:

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x.$$

Последняя формула позволяет приближенно вычислять значения дифференцируемой функции $y = f(x)$, причем **тем точнее, чем меньше Δx .**



Свойства дифференциала

Пример:

Вычислить значение функции $f(x) = \ln x$ в точке $x = 1.1$.



Свойства дифференциала

Пример:

Вычислить значение функции $f(x) = \ln x$ в точке $x = 1.1$.

Представим $x = 1.1$ в виде $x = x_0 + \Delta x$, где $x_0 = 1$, $\Delta x = 0.1$, и найдем $f'(x) = 1/x$ и $f'(x_0) = 1$. Тогда согласно последней формуле

$$\underbrace{\ln 1.1}_{f(x_0 + \Delta x)} \approx \underbrace{\ln 1}_{f(x_0)} + \underbrace{1}_{f'(x_0)} \cdot \underbrace{0.1}_{\Delta x} = 0 + 0.1 = 0.1.$$

Точное значение: $\ln 1.1 = 0.09531$.



Свойства дифференциала

Инвариантность формы дифференциала



Свойства дифференциала

Инвариантность формы дифференциала

Пусть $f(x) = v(u(x))$ – сложная функция, образованная путем композиции функций $u(x)$ и $v(u)$, и существуют $u'(x_0)$ и $v'(u_0)$, где $u_0 = u(x_0)$. Тогда согласно правилу вычисления производной сложной функции,

$$df(x_0) = f'(x_0)dx = v'(u_0) \underbrace{u'(x_0)dx}_{du(x_0)=du} = v'(u_0)du.$$



Свойства дифференциала

Дифференциал df выглядит одинаково, независимо от того, по какой переменной (независимой x или промежуточной u) он считается.



Производные и дифференциалы высших порядков



Производные и дифференциалы высших порядков

Определение

Производной второго порядка функции $y = f(x)$ называется производная от производной $f'(x)$.



Производные и дифференциалы высших порядков

Определение

Производной второго порядка функции $y = f(x)$ называется производная от производной $f'(x)$.

Обозначение: $f''(x) = (f'(x))'$.



Производные и дифференциалы высших порядков

Определение

Дифференциалом второго порядка функции $y = f(x)$ называется дифференциал от дифференциала первого порядка $df(x_0)$.



Производные и дифференциалы высших порядков

Определение

Дифференциалом второго порядка

функции $y = f(x)$ называется дифференциал от дифференциала первого порядка $df(x_0)$.

Обозначение: $d^2f(x_0) = d(df(x_0)) = f''(x_0)dx^2$.



Производные и дифференциалы высших порядков

Пояснение



Производные и дифференциалы высших порядков

Пояснение

В $df(x) = f'(x)dx$ приращение $dx = \Delta x$ считается постоянным;



Производные и дифференциалы высших порядков

Пояснение

В $df(x) = f'(x)dx$ приращение $dx = \Delta x$ считается постоянным; дифференцирование идет по аргументу x производной $f'(x)$.



Производные и дифференциалы высших порядков

Определение

Производной n -ого порядка функции $y = f(x)$ называется производная от производной $(n - 1)$ -ого порядка функции $f(x)$.



Производные и дифференциалы высших порядков

Определение

Производной n -ого порядка функции $y = f(x)$ называется производная от производной $(n - 1)$ -ого порядка функции $f(x)$.

Обозначение: $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$.



Производные и дифференциалы высших порядков

На практике используют два эквивалентных способа обозначения производных высших порядков:



Производные и дифференциалы высших порядков

На практике используют два эквивалентных способа обозначения производных высших порядков:

$$\begin{array}{ccccccc} f^{(2)}(x), & f^{(3)}(x), & f^{(4)}(x), & f^{(5)}(x), & \dots, \\ f''(x), & f'''(x), & f^{IV}(x), & f^V(x), & \dots \end{array}$$



Производные и дифференциалы высших порядков

Определение

Дифференциалом n -ого порядка

функции $y = f(x)$ называется дифференциал от дифференциала $(n - 1)$ -ого порядка функции $f(x)$.



Производные и дифференциалы высших порядков

Определение

Дифференциалом n -ого порядка

функции $y = f(x)$ называется дифференциал от дифференциала $(n - 1)$ -ого порядка функции $f(x)$.

Обозначение:

$$d^n f(x_0) = d(d^{n-1} f(x_0)) = f^{(n)}(x_0) dx^n.$$



Физический смысл первой и второй производных



Физический смысл первой и второй производных

Физический смысл первой производной



Физический смысл первой и второй производных

Физический смысл первой производной

Пусть $S(t)$ – длина пути, пройденного телом к моменту времени t . Тогда за время Δt на временном промежутке $[t, t + \Delta t]$ тело пройдет расстояние

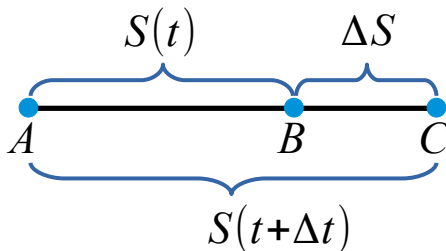
$$\Delta S = S(t + \Delta t) - S(t)$$



Физический смысл первой и второй производных

со средней скоростью

$$V_{\text{cp}} = \frac{\Delta S}{\Delta t}.$$



Физический смысл первой и второй производных

Мгновенная скорость движения тела в момент времени t есть



Физический смысл первой и второй производных

Мгновенная скорость движения тела в момент времени t есть

$$V = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} V_{\text{cp}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = S'.$$

Таким образом,



Физический смысл первой и второй производных

Мгновенная скорость движения тела в момент времени t есть

$$V = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} V_{\text{cp}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = S'.$$

Таким образом, физический смысл производной заключается в том, что производная от длины пути, пройденного телом, есть мгновенная скорость движения тела вдоль данного пути.



Физический смысл первой и второй производных

Физический смысл второй производной



Физический смысл первой и второй производных

Физический смысл второй производной

Ускорение a определяется как быстрота изменения скорости V тела, которая, в свою очередь, есть быстрота изменения длины S пути, пройденного телом.



Физический смысл первой и второй производных

Поэтому

$$a = V' = (S')' = S'',$$

т.е. физический смысл второй производной состоит в том, что вторая производная от длины пути, пройденного телом, есть ускорение движения тела.

