

Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана
Факультет “Фундаментальные науки”
Кафедра “Высшая математика”

Математический анализ

Модуль 3

Дифференциальное исчисление
функций одной переменной

Лекция 3.1

для ГУИМЦ, 2026

Койфман К.Г., Семакин А.Н.

Производная функции



Производная функции

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, определенную в некоторой окрестности точки x_0 .



Производная функции

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, определенную в некоторой окрестности точки x_0 . В той же окрестности выберем произвольную точку x_1 .



Производная функции

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, определенную в некоторой окрестности точки x_0 . В той же окрестности выберем произвольную точку x_1 .

Напомним, что

$\Delta x = x_1 - x_0$ – приращение значения аргумента x в точке x_0 при переходе к точке x_1 ,



Производная функции

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, определенную в некоторой окрестности точки x_0 . В той же окрестности выберем произвольную точку x_1 .

Напомним, что

$\Delta x = x_1 - x_0$ – приращение значения аргумента x в точке x_0 при переходе к точке x_1 ,

$\Delta f = f(x_1) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ – приращение значения функции $y = f(x)$ в точке x_0 при переходе к точке x_1 .



Производная функции

$$\Delta x = x_1 - x_0, \quad \Delta f = f(x_1) - f(x_0)$$



Производная функции

$$\Delta x = x_1 - x_0, \quad \Delta f = f(x_1) - f(x_0)$$

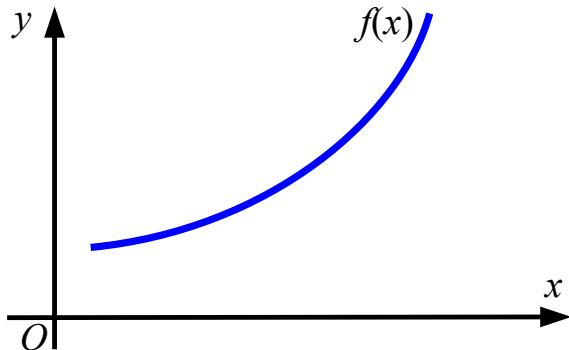


На рисунке: $M_0(x_0, f(x_0))$ и $M_1(x_1, f(x_1))$ – точки на графике.



Производная функции

$$\Delta x = x_1 - x_0, \quad \Delta f = f(x_1) - f(x_0)$$

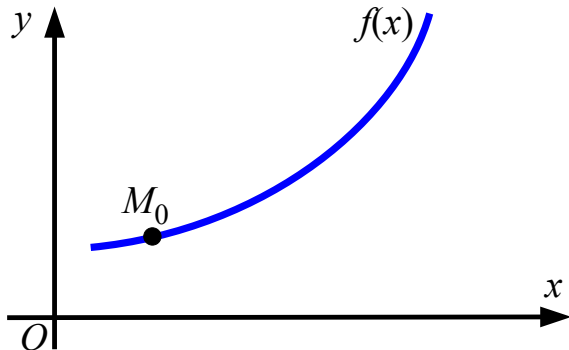


На рисунке: $M_0(x_0, f(x_0))$ и $M_1(x_1, f(x_1))$ – точки на графике.



Производная функции

$$\Delta x = x_1 - x_0, \quad \Delta f = f(x_1) - f(x_0)$$

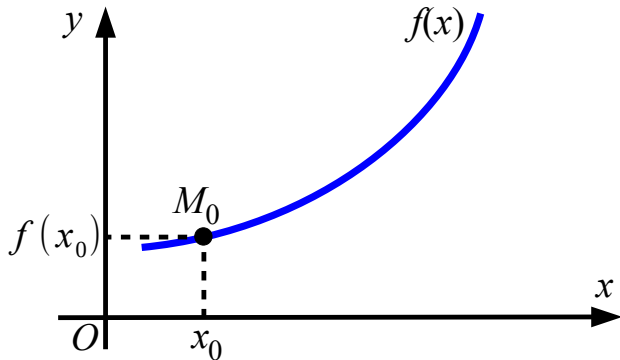


На рисунке: $M_0(x_0, f(x_0))$ и $M_1(x_1, f(x_1))$ – точки на графике.



Производная функции

$$\Delta x = x_1 - x_0, \quad \Delta f = f(x_1) - f(x_0)$$

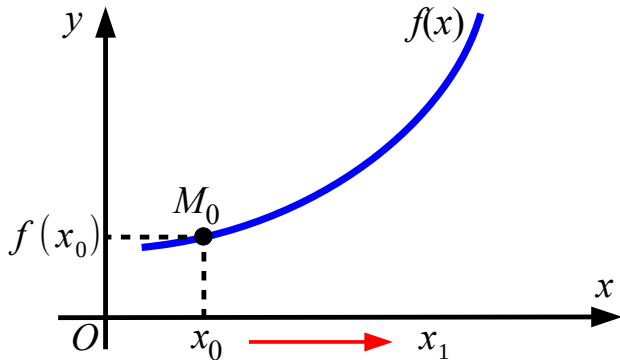


На рисунке: $M_0(x_0, f(x_0))$ и $M_1(x_1, f(x_1))$ – точки на графике.



Производная функции

$$\Delta x = x_1 - x_0, \quad \Delta f = f(x_1) - f(x_0)$$

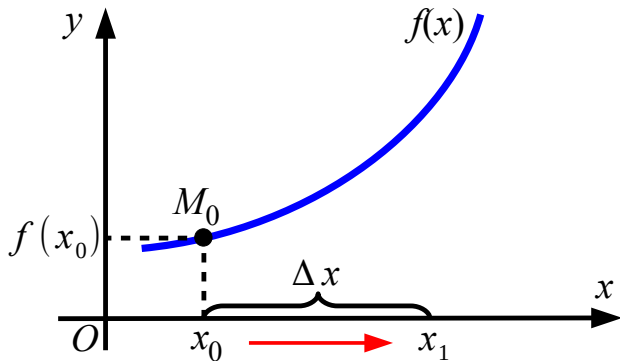


На рисунке: $M_0(x_0, f(x_0))$ и $M_1(x_1, f(x_1))$ – точки на графике.



Производная функции

$$\Delta x = x_1 - x_0, \quad \Delta f = f(x_1) - f(x_0)$$

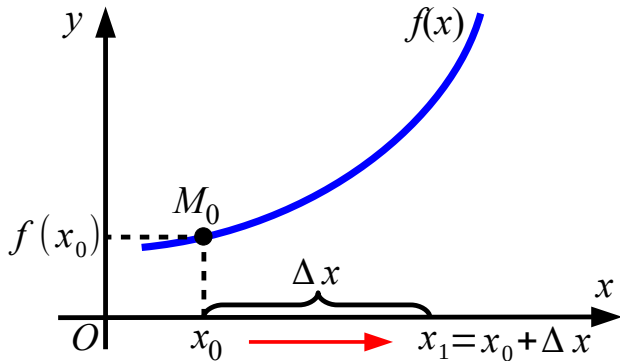


На рисунке: $M_0(x_0, f(x_0))$ и $M_1(x_1, f(x_1))$ – точки на графике.



Производная функции

$$\Delta x = x_1 - x_0, \quad \Delta f = f(x_1) - f(x_0)$$

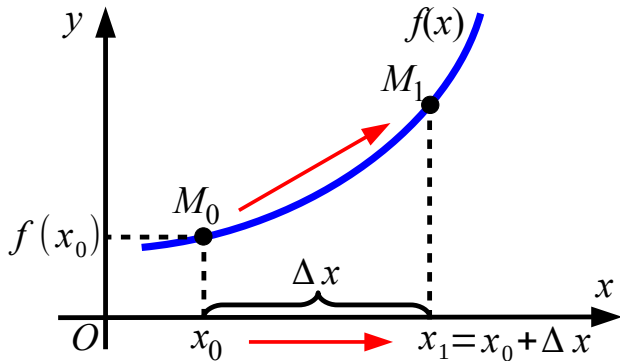


На рисунке: $M_0(x_0, f(x_0))$ и $M_1(x_1, f(x_1))$ – точки на графике.



Производная функции

$$\Delta x = x_1 - x_0, \quad \Delta f = f(x_1) - f(x_0)$$

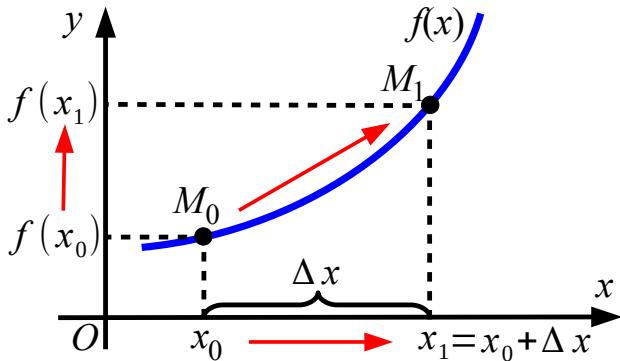


На рисунке: $M_0(x_0, f(x_0))$ и $M_1(x_1, f(x_1))$ – точки на графике.



Производная функции

$$\Delta x = x_1 - x_0, \quad \Delta f = f(x_1) - f(x_0)$$

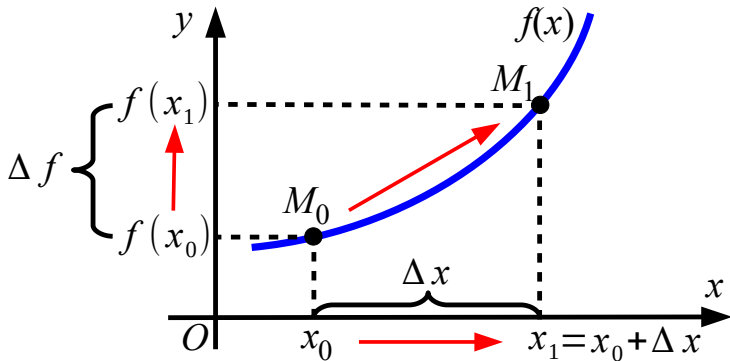


На рисунке: $M_0(x_0, f(x_0))$ и $M_1(x_1, f(x_1))$ – точки на графике.



Производная функции

$$\Delta x = x_1 - x_0, \quad \Delta f = f(x_1) - f(x_0)$$



На рисунке: $M_0(x_0, f(x_0))$ и $M_1(x_1, f(x_1))$ – точки на графике.



Определение

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 .



Производная функции

Определение

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 . Тогда **производной** функции $f(x)$ в точке x_0 называется предел (если он существует)

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$



Производная функции

Определение

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 . Тогда **производной** функции $f(x)$ в точке x_0 называется предел (если он существует)

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Обозначение: $f'(x_0)$, $\frac{df(x_0)}{dx}$.



Производная функции

Если предел равен одному из бесконечных чисел

$$f'(x_0) = \infty, +\infty, -\infty,$$

то говорят, что в точке x_0 существует **бесконечная производная**; в противном случае – что существует **конечная производная**.



Замечание

Поскольку мы работаем в основном с конечными производными, то в дальнейшем для краткости под словом «производная» мы будем понимать именно конечную производную.



Замечание

Поскольку мы работаем в основном с конечными производными, то в дальнейшем для краткости под словом «производная» мы будем понимать именно конечную производную. Случай бесконечной производной будет всегда оговариваться особо.



Определение

Правосторонней производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется предел справа:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0+0} \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$



Определение

Правосторонней производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется предел справа:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0+0} \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Обозначение: $f'_+(x_0)$.



Определение

Левосторонней производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется предел слева:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0-0} \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$



Определение

Левосторонней производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется предел слева:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0-0} \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Обозначение: $f'_-(x_0)$.



Определение

Правосторонняя и левосторонняя производные называются **односторонними производными**.



Из теоремы о связи двустороннего предела с односторонними следует:



Из теоремы о связи двустороннего предела с односторонними следует:

Теорема (о связи односторонних производных с двусторонней)

$$\exists f'(x_0) = A \Leftrightarrow \exists f'_+(x_0) = A, f'_-(x_0) = A.$$



Определение

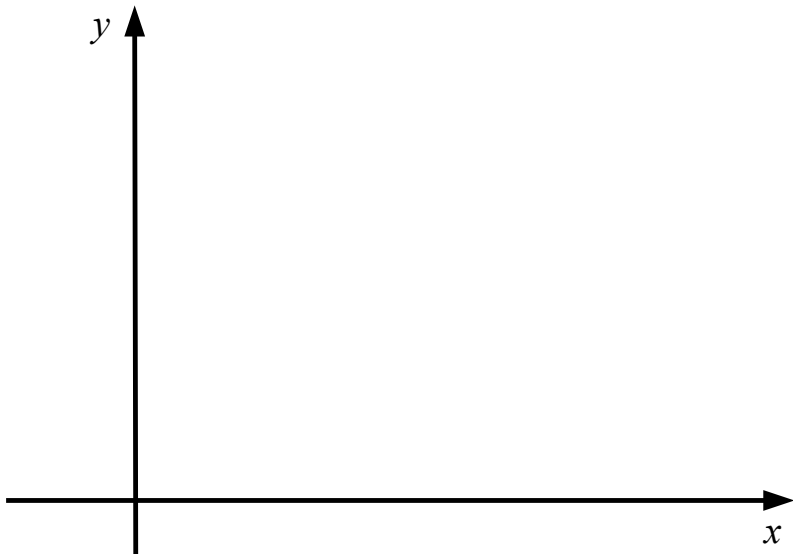
Процесс нахождения производной называется **дифференцированием**.



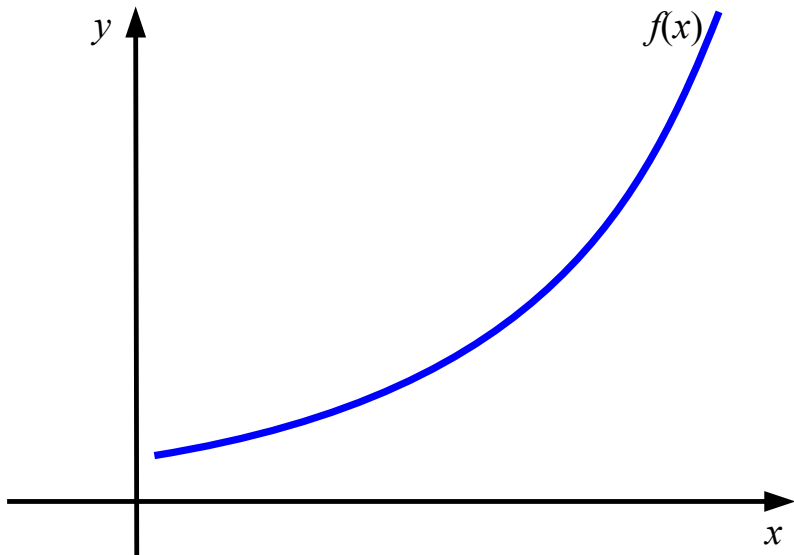
Геометрический смысл производной



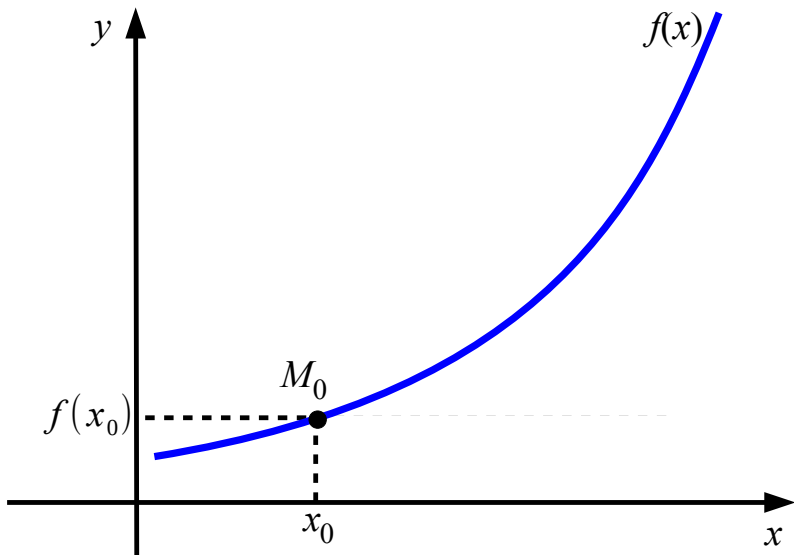
Геометрический смысл производной



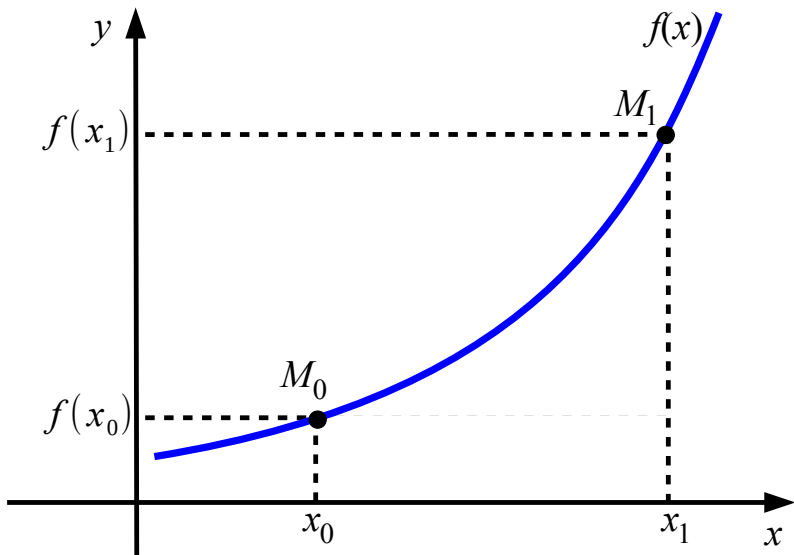
Геометрический смысл производной



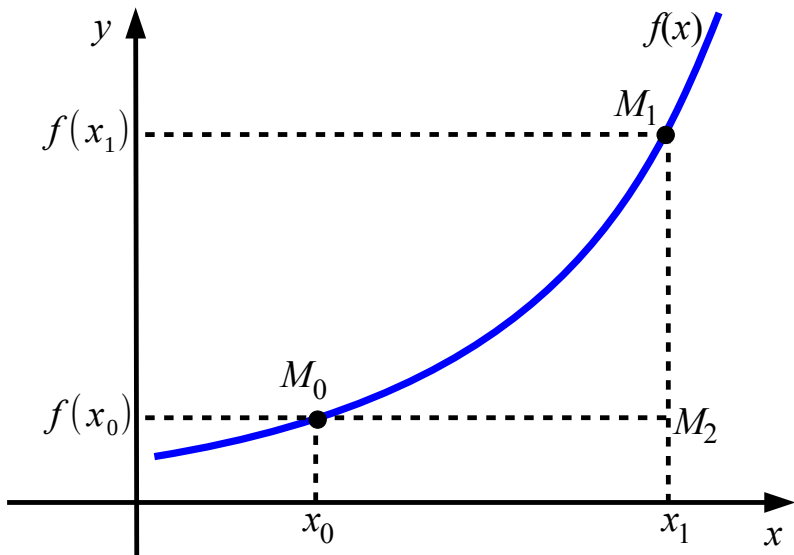
Геометрический смысл производной



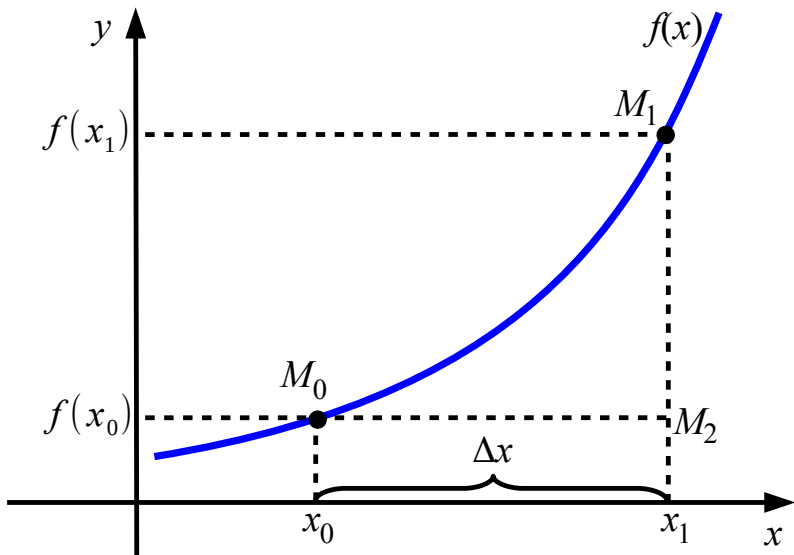
Геометрический смысл производной



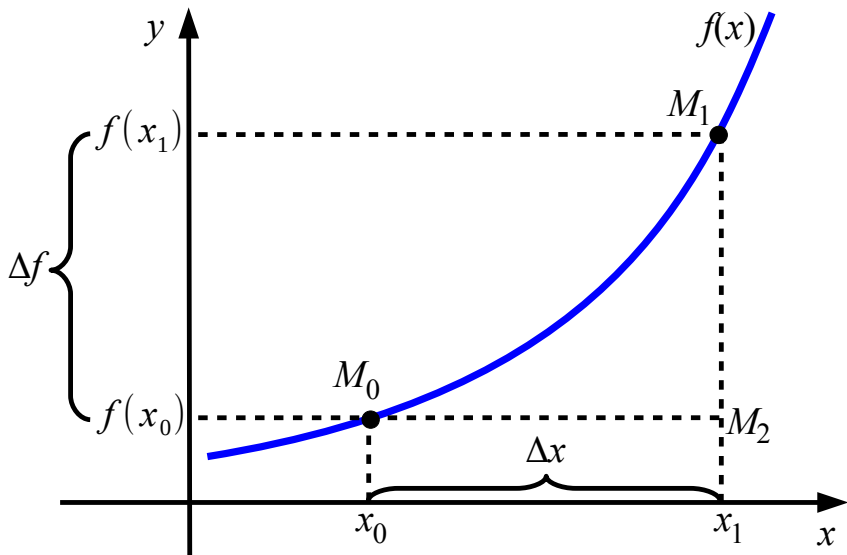
Геометрический смысл производной



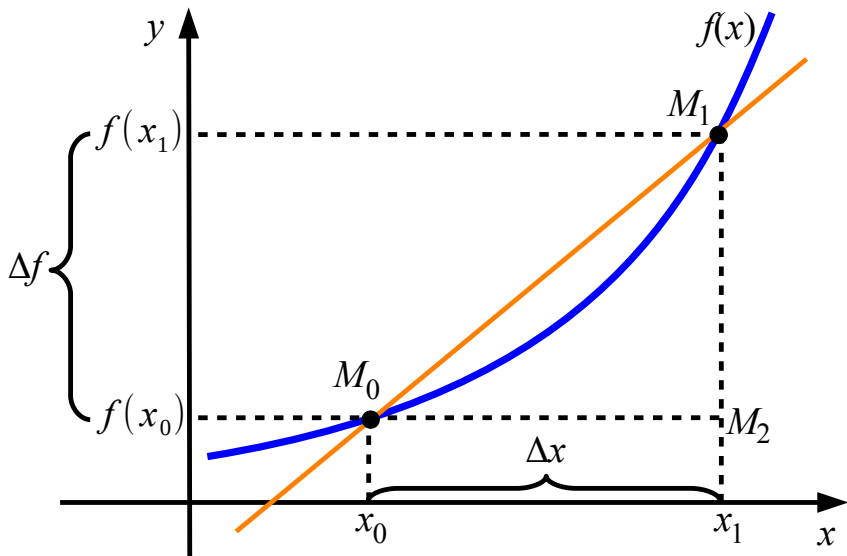
Геометрический смысл производной



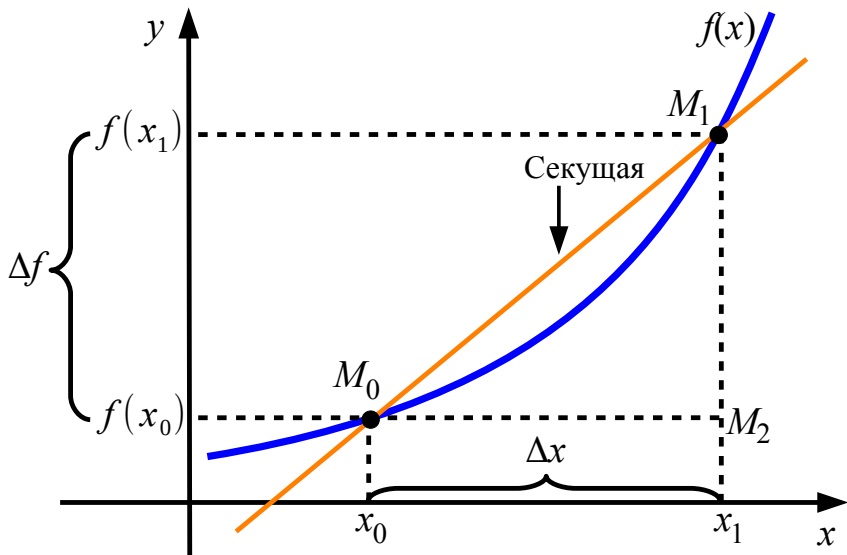
Геометрический смысл производной



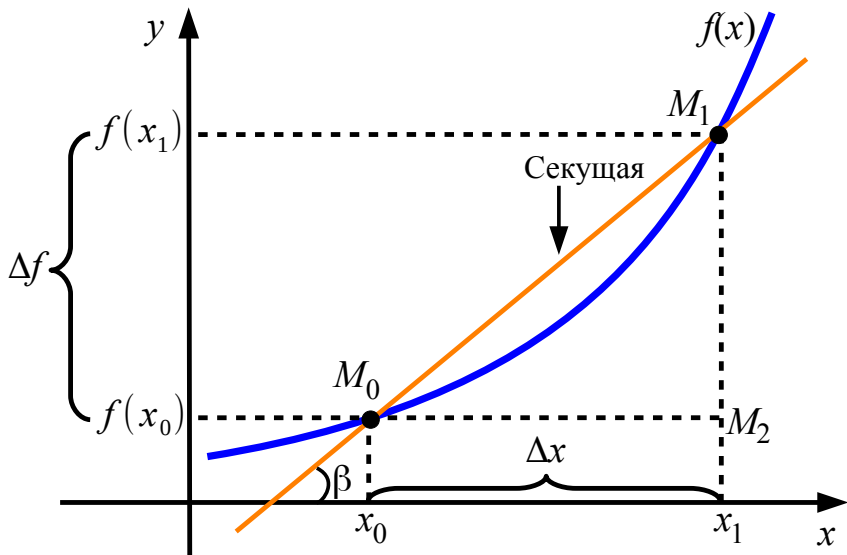
Геометрический смысл производной



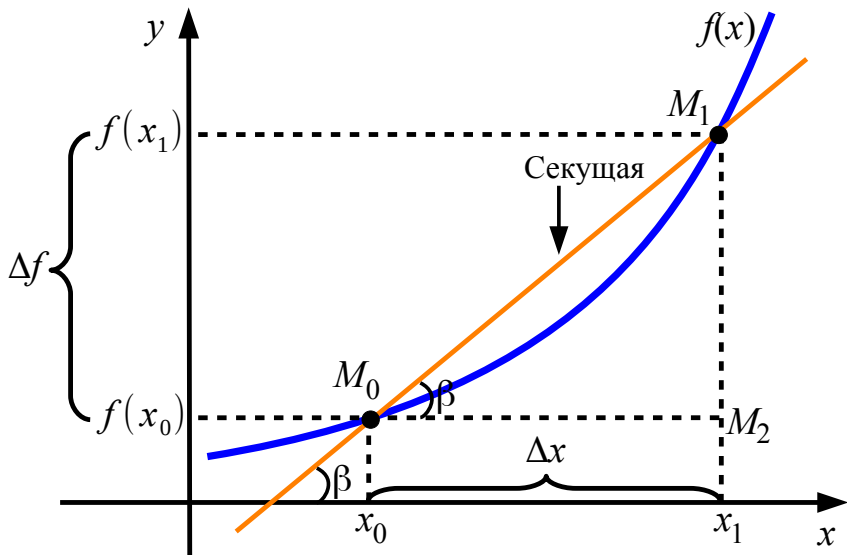
Геометрический смысл производной



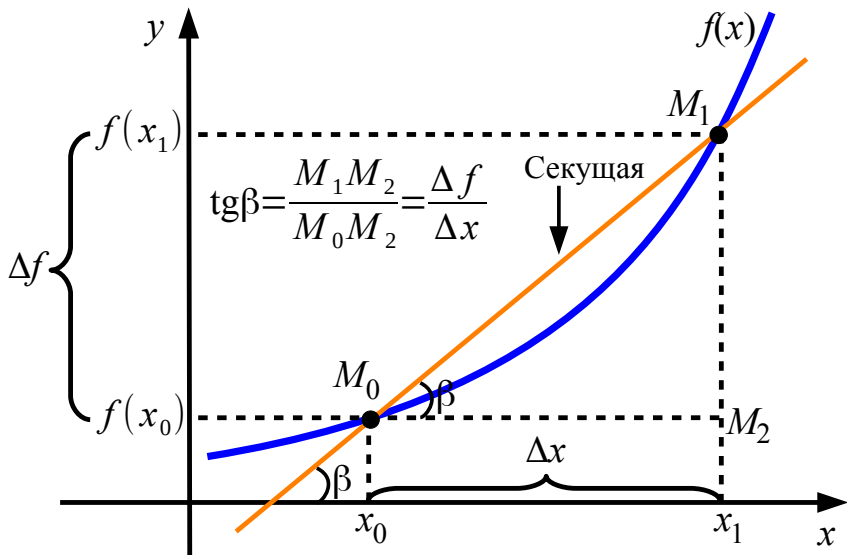
Геометрический смысл производной



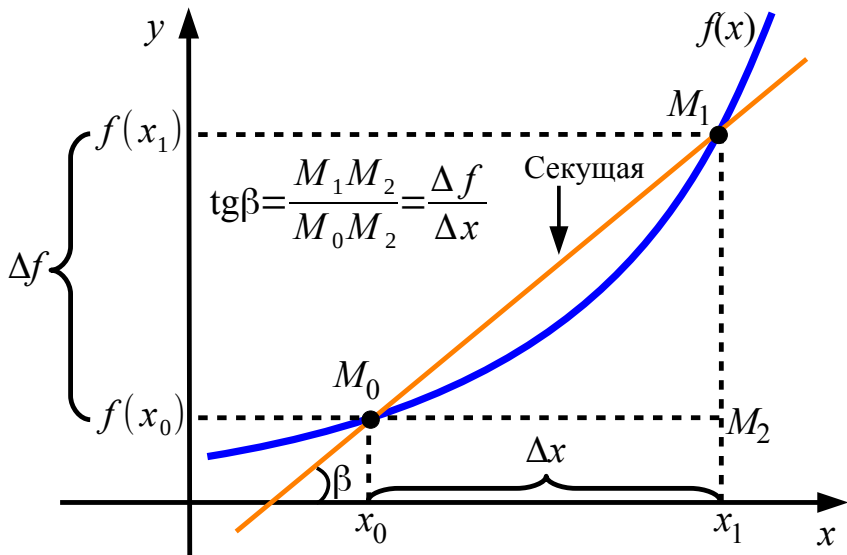
Геометрический смысл производной



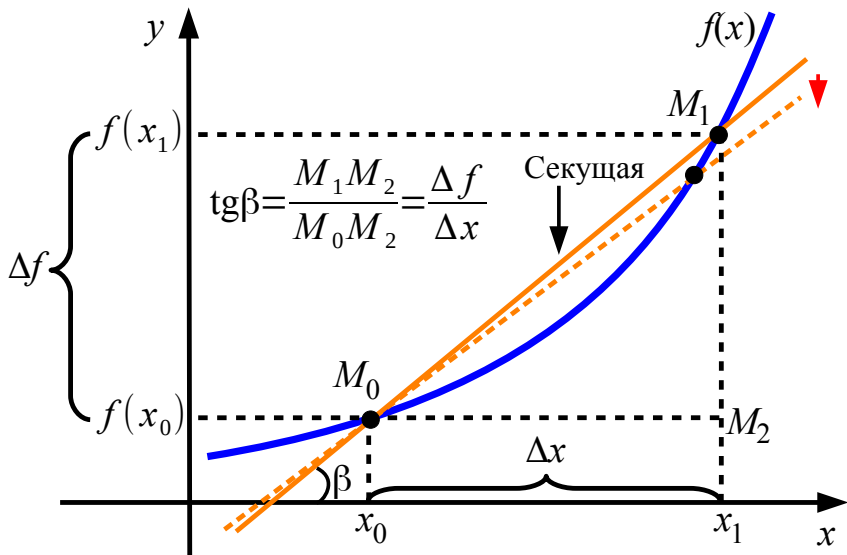
Геометрический смысл производной



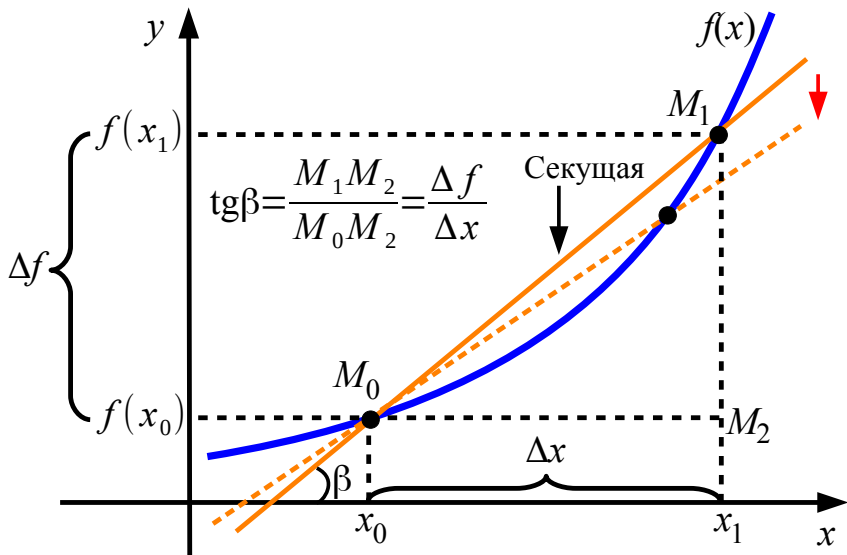
Геометрический смысл производной



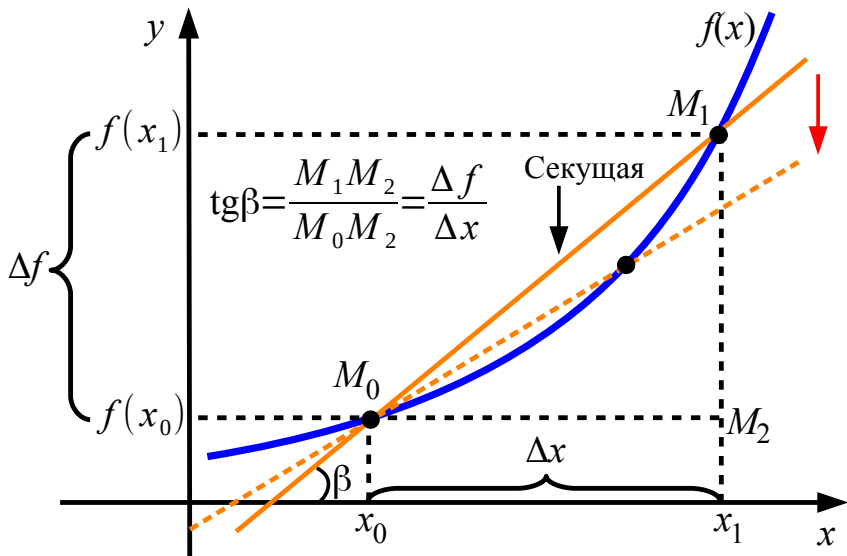
Геометрический смысл производной



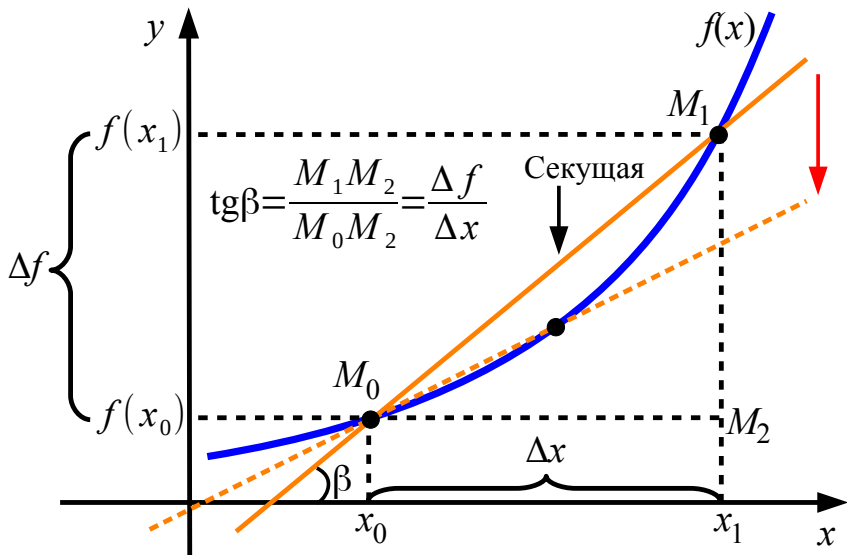
Геометрический смысл производной



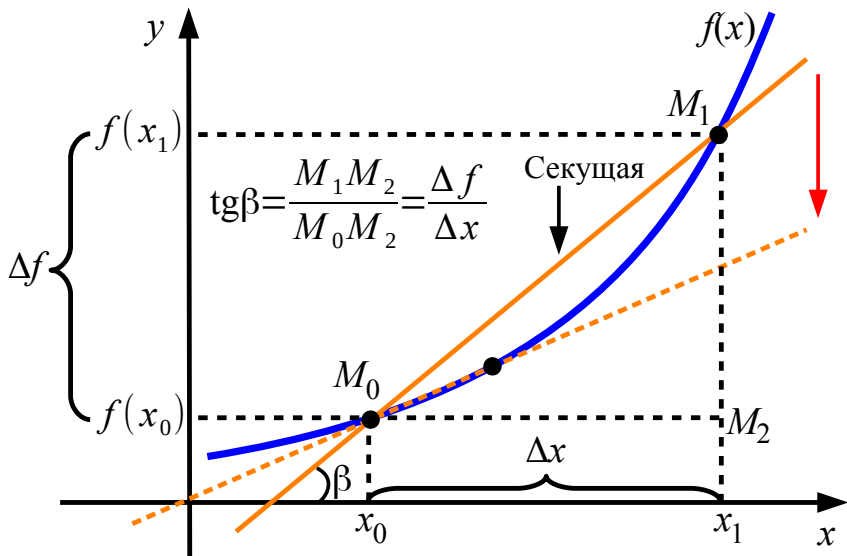
Геометрический смысл производной



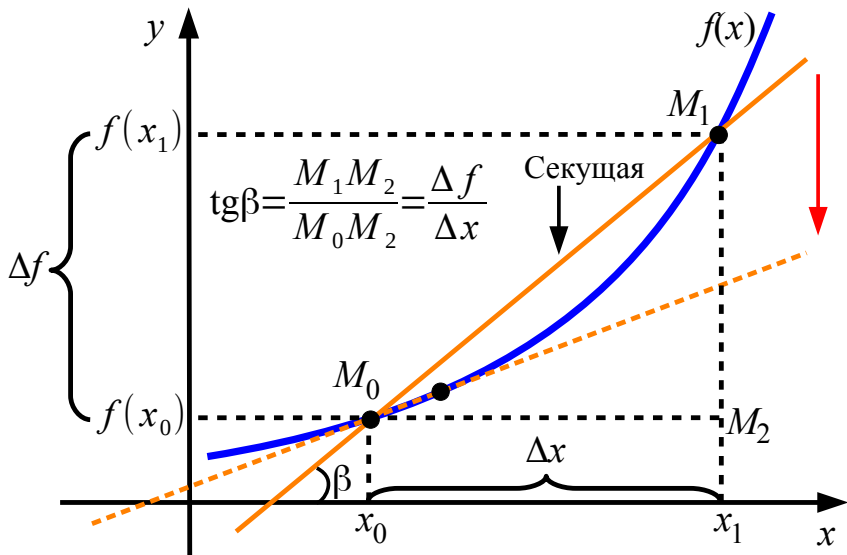
Геометрический смысл производной



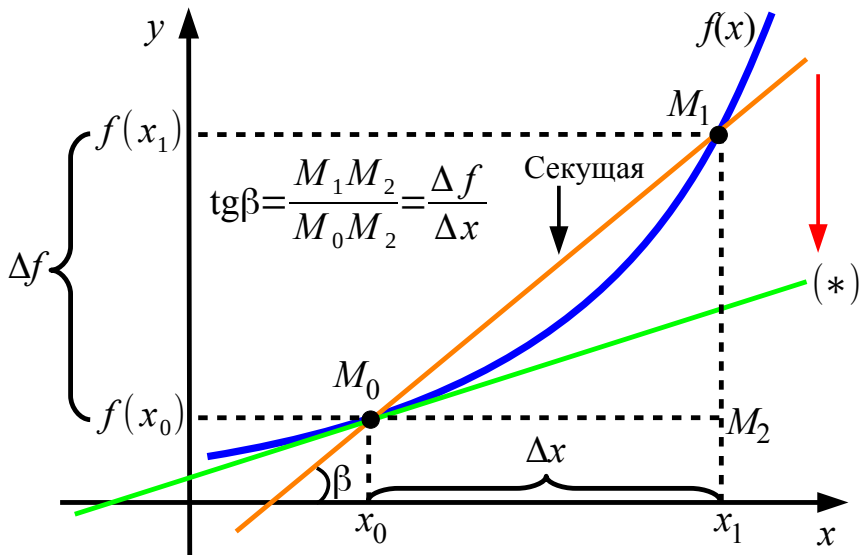
Геометрический смысл производной



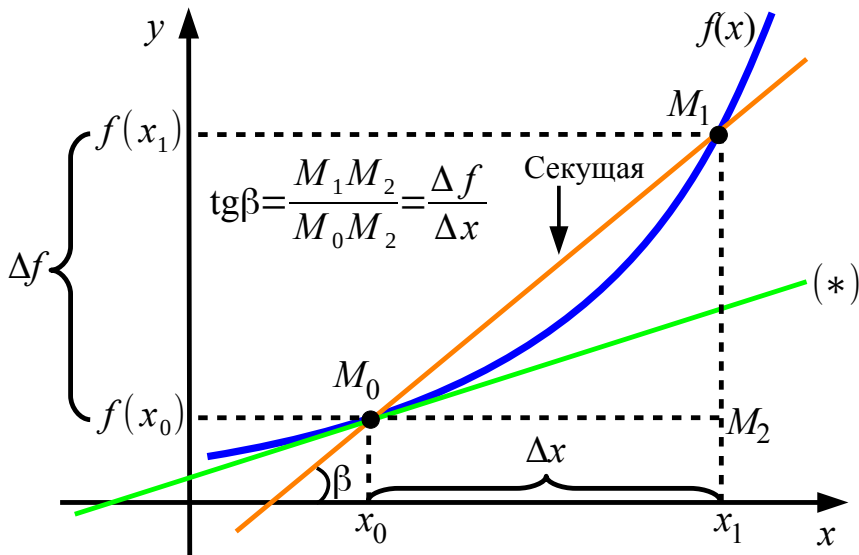
Геометрический смысл производной



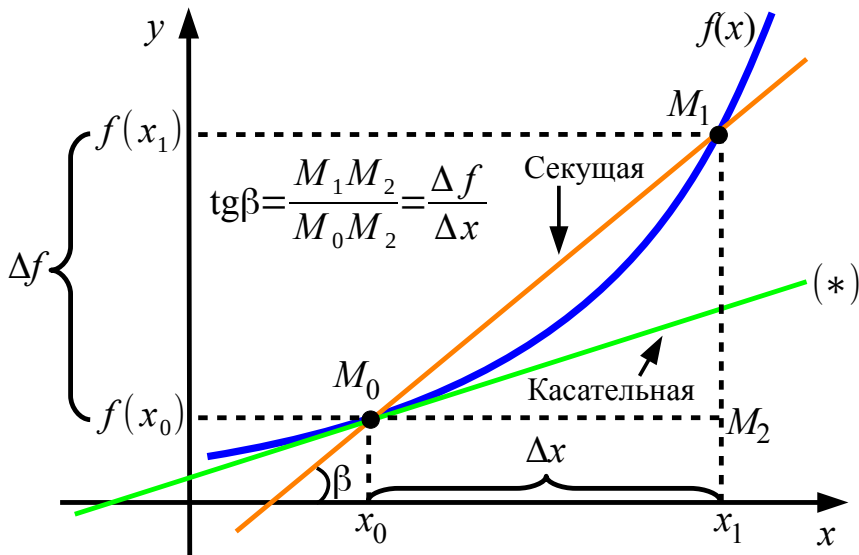
Геометрический смысл производной



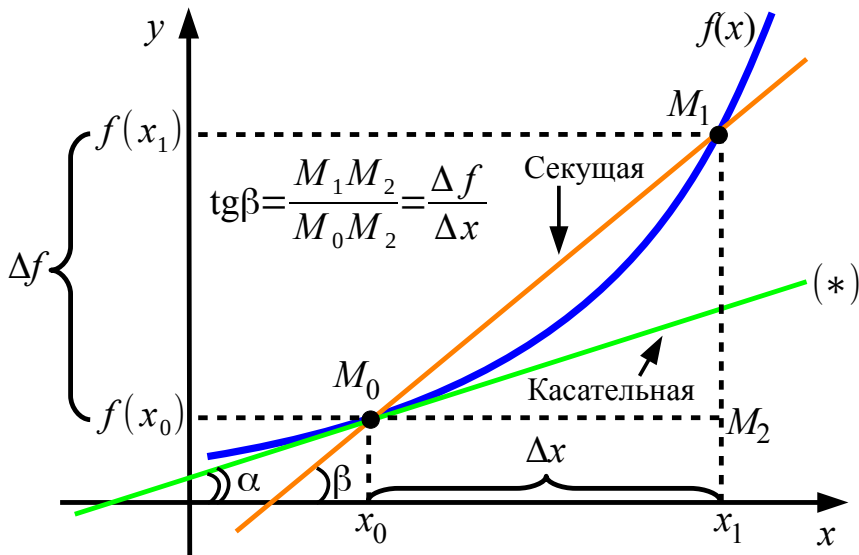
Геометрический смысл производной



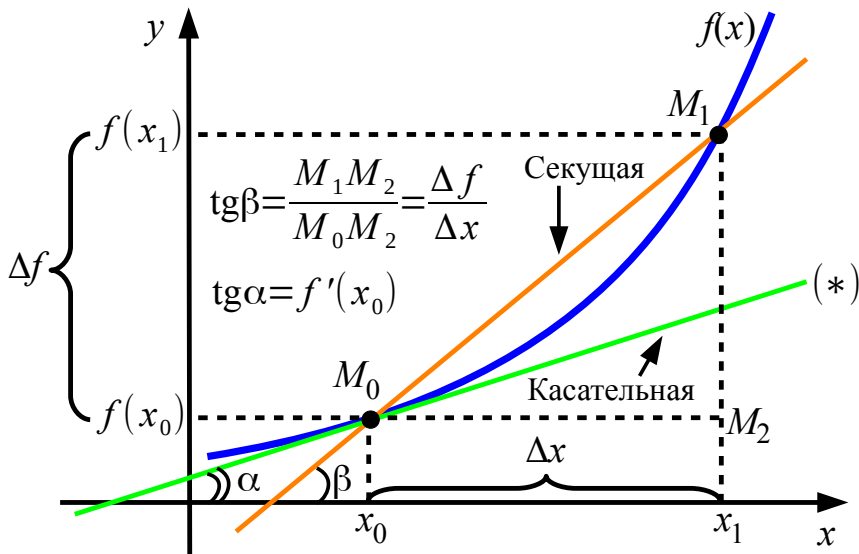
Геометрический смысл производной



Геометрический смысл производной



Геометрический смысл производной



Геометрический смысл производной

Пусть $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и имеет в ней конечную производную.



Геометрический смысл производной

Пусть $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и имеет в ней конечную производную.

Через точки $M_0(x_0, y_0)$ и $M_1(x_1, y_1)$, где $y_0 = f(x_0)$ и $y_1 = f(x_1)$, проведем секущую M_0M_1 графика функции $y = f(x)$.



Геометрический смысл производной

Пусть $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и имеет в ней конечную производную.

Через точки $M_0(x_0, y_0)$ и $M_1(x_1, y_1)$, где $y_0 = f(x_0)$ и $y_1 = f(x_1)$, проведем секущую M_0M_1 графика функции $y = f(x)$.

Постепенно перемещая точку M_1 по графику функции $f(x)$ к точке M_0 , мы переведем секущую M_0M_1 в прямую (*), которая в окрестности точки x_0 имеет с графиком функции $f(x)$ только одну общую точку M_0 .



Определение

Прямая (*), получающаяся из секущей M_0M_1 , когда M_1 устремляется к M_0 вдоль графика функции $f(x)$, называется **наклонной касательной** к графику функции $f(x)$ в точке x_0 .



Геометрический смысл производной

Коэффициенты уравнения

$$y = kx + b$$

секущей M_0M_1 находим из условий



Геометрический смысл производной

Коэффициенты уравнения

$$y = kx + b$$

секущей M_0M_1 находим из условий

$$M_0 : y_0 = kx_0 + b$$



Геометрический смысл производной

Коэффициенты уравнения

$$y = kx + b$$

секущей M_0M_1 находим из условий

$$M_0 : y_0 = kx_0 + b \text{ и } M_1 : y_1 = kx_1 + b.$$



Геометрический смысл производной

Коэффициенты уравнения

$$y = kx + b$$

секущей M_0M_1 находим из условий

$$M_0 : y_0 = kx_0 + b \text{ и } M_1 : y_1 = kx_1 + b.$$

Откуда получаем

$$y_{\text{сек}} = \frac{\Delta f}{\Delta x}(x - x_0) + y_0,$$



Геометрический смысл производной

Коэффициенты уравнения

$$y = kx + b$$

секущей M_0M_1 находим из условий

$$M_0 : y_0 = kx_0 + b \text{ и } M_1 : y_1 = kx_1 + b.$$

Откуда получаем

$$y_{\text{сек}} = \frac{\Delta f}{\Delta x}(x - x_0) + y_0,$$

где $\Delta f = y_1 - y_0$, $\Delta x = x_1 - x_0$.



Геометрический смысл производной

$$y_{\text{сек}} = \frac{\Delta f}{\Delta x}(x - x_0) + y_0,$$



Геометрический смысл производной

$$y_{\text{сек}} = \frac{\Delta f}{\Delta x}(x - x_0) + y_0,$$



Геометрический смысл производной

$$y_{\text{сек}} = \frac{\Delta f}{\Delta x}(x - x_0) + y_0,$$



Геометрический смысл производной

$$y_{\text{сек}} = \frac{\Delta f}{\Delta x}(x - x_0) + y_0,$$



Геометрический смысл производной

$$y_{\text{сек}} = \frac{\Delta f}{\Delta x}(x - x_0) + y_0,$$



Геометрический смысл производной

$$y_{\text{сек}} = \frac{\Delta f}{\Delta x}(x - x_0) + y_0,$$

Переходим в этом уравнении к пределу при $x_1 \rightarrow x_0$ или $\Delta x \rightarrow 0$:



Геометрический смысл производной

$$y_{\text{сек}} = \frac{\Delta f}{\Delta x}(x - x_0) + y_0,$$

Переходим в этом уравнении к пределу при $x_1 \rightarrow x_0$ или $\Delta x \rightarrow 0$:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} y_{\text{сек}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta f}{\Delta x}(x - x_0) + y_0 \right).$$



Геометрический смысл производной

$$y_{\text{сек}} = \frac{\Delta f}{\Delta x}(x - x_0) + y_0,$$

Переходим в этом уравнении к пределу при $x_1 \rightarrow x_0$ или $\Delta x \rightarrow 0$:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} y_{\text{сек}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta f}{\Delta x}(x - x_0) + y_0 \right).$$

Т.к. x , x_0 , y_0 не зависят от x_1 ,



Геометрический смысл производной

$$y_{\text{сек}} = \frac{\Delta f}{\Delta x}(x - x_0) + y_0,$$

Переходим в этом уравнении к пределу при $x_1 \rightarrow x_0$ или $\Delta x \rightarrow 0$:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} y_{\text{сек}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta f}{\Delta x}(x - x_0) + y_0 \right).$$

Т.к. x , x_0 , y_0 не зависят от x_1 , то

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} y_{\text{сек}} = \left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \right) (x - x_0) + y_0.$$



Геометрический смысл производной

$$y_{\text{сек}} = \frac{\Delta f}{\Delta x}(x - x_0) + y_0,$$

Переходим в этом уравнении к пределу при $x_1 \rightarrow x_0$ или $\Delta x \rightarrow 0$:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} y_{\text{сек}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta f}{\Delta x}(x - x_0) + y_0 \right).$$

Т.к. x , x_0 , y_0 не зависят от x_1 , то

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} y_{\text{сек}} = \left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \right) (x - x_0) + y_0.$$



Геометрический смысл производной

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} y_{\text{сек}} = \left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \right) (x - x_0) + y_0.$$



Геометрический смысл производной

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} y_{\text{сек}} = \left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \right) (x - x_0) + y_0.$$



Геометрический смысл производной

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} y_{\text{сек}} = \left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \right) (x - x_0) + y_0.$$



Геометрический смысл производной

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} y_{\text{сек}} = \left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \right) (x - x_0) + y_0.$$



Геометрический смысл производной

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} y_{\text{сек}} = \left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \right) (x - x_0) + y_0.$$



Геометрический смысл производной

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} y_{\text{сек}} = \left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \right) (x - x_0) + y_0.$$



Геометрический смысл производной

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} y_{\text{сек}} = \left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \right) (x - x_0) + y_0.$$

По определению

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$



Геометрический смысл производной

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} y_{\text{сек}} = \left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \right) (x - x_0) + y_0.$$

По определению

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Тогда

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} y_{\text{сек}} = f'(x_0)(x - x_0) + y_0.$$



Геометрический смысл производной

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} y_{\text{сек}} = \left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \right) (x - x_0) + y_0.$$

По определению

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Тогда

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} y_{\text{сек}} = f'(x_0)(x - x_0) + y_0.$$



Геометрический смысл производной

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} y_{\text{сек}} = f'(x_0)(x - x_0) + y_0.$$



Геометрический смысл производной

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} y_{\text{сек}} = f'(x_0)(x - x_0) + y_0.$$



Геометрический смысл производной

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} y_{\text{сек}} = f'(x_0)(x - x_0) + y_0.$$



Геометрический смысл производной

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} y_{\text{сек}} = f'(x_0)(x - x_0) + y_0.$$



Геометрический смысл производной

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} y_{\text{сек}} = f'(x_0)(x - x_0) + y_0.$$



Геометрический смысл производной

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} y_{\text{сек}} = f'(x_0)(x - x_0) + y_0.$$

Обозначив

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} y_{\text{сек}} = y_{\text{кас}},$$



Геометрический смысл производной

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} y_{\text{сек}} = f'(x_0)(x - x_0) + y_0.$$

Обозначив

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} y_{\text{сек}} = y_{\text{кас}},$$

получаем **уравнение касательной**

$$y_{\text{кас}} = f'(x_0)(x - x_0) + y_0.$$



уравнение касательной

$$y_{\text{кас}} = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$$



уравнение касательной

$$y_{\text{кас}} = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$$



уравнение касательной

$$y_{\text{кас}} = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$$



уравнение касательной

$$y_{\text{кас}} = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$$



уравнение касательной

$$y_{\text{кас}} = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$$

Из этого уравнения следует **геометрический смысл** конечной производной:

$$f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha,$$

где α – угол наклона касательной к графику функции $f(x)$ в точке x_0 .



Вычисление производных



Вычисление производных подобно игре в «конструктор».



Вычисление производных

Вычисление производных подобно игре в «конструктор». Кубиками конструктора являются основные элементарные функции, а правилами игры – арифметические свойства производных и их поведение при обращении и композиции функций.



Вычисление производных

Вычисление производных подобно игре в «конструктор». Кубиками конструктора являются основные элементарные функции, а правилами игры – арифметические свойства производных и их поведение при обращении и композиции функций.

Начнем с кубиков.



Таблица производных:

$$1) c' = 0, c = \text{const},$$

$$2) (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1},$$

$$3) (a^x)' = a^x \ln a,$$

$$4) (e^x)' = e^x,$$

$$5) (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a},$$



Таблица производных:

$$6) (\ln x)' = \frac{1}{x},$$

$$7) (\sin x)' = \cos x,$$

$$8) (\cos x)' = -\sin x,$$

$$9) (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x},$$



Таблица производных:

$$10) (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x},$$

$$11) (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$12) (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$



Таблица производных:

$$13) (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2},$$

$$14) (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$



Вывод формулы №3: $(a^x)' = a^x \ln a$.

Здесь $f(x) = a^x$. Имеем:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^x(a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = \end{aligned}$$



Вывод формулы №3: $(a^x)' = a^x \ln a$.

$$\begin{aligned} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^x(a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = a^x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = \\ &= \left| \lim_{u \rightarrow 0} \frac{a^u - 1}{u} = \ln a - \right. \begin{array}{l} \text{следствие 3} \\ \text{второго} \\ \text{замечательного} \\ \text{предела} \end{array} \left. \right| = \\ &= a^x \ln a. \blacksquare \end{aligned}$$



Вывод формулы №7: $(\sin x)' = \cos x$

Здесь $f(x) = \sin x$. Имеем:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \cos(x + \Delta x/2) \sin \Delta x/2}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos(x + \Delta x/2) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta x/2}{\Delta x/2} = \end{aligned}$$



Вывод формулы №7: $(\sin x)' = \cos x$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos(x + \Delta x/2) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta x/2}{\Delta x/2} =$$

$$= \left| \begin{array}{c} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = 1 \\ \text{первый} \\ \text{замечательный} \\ \text{предел} \end{array} \right| =$$

$$= \cos(x + 0/2) \cdot 1 = \cos x. \blacksquare$$



Арифметические свойства производных:

$$1) (cu)' = c \cdot u', \quad c = \text{const},$$

$$2) (u \pm v)' = u' \pm v',$$

$$3) (uv)' = u'v + uv',$$

$$4) \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$



Вывод формулы №2: $(u \pm v)' = u' \pm v'$

Здесь $f(x) = u(x) \pm v(x)$. Имеем:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(u(x + \Delta x) \pm v(x + \Delta x)) - (u(x) \pm v(x))}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(u(x + \Delta x) - u(x)) \pm (v(x + \Delta x) - v(x))}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u \pm \Delta v}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} \pm \frac{\Delta v}{\Delta x} \right) = \end{aligned}$$



Вывод формулы №2: $(u \pm v)' = u' \pm v'$

$$\begin{aligned} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} \pm \frac{\Delta v}{\Delta x} \right) = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \pm \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = \\ &= u' \pm v'. \blacksquare \end{aligned}$$



Вывод формулы №3: $(uv)' = u'v + uv'$

Здесь $f(x) = u(x) \cdot v(x)$,

$$\Delta u = u(x + \Delta x) - u(x) \Rightarrow u(x + \Delta x) = u(x) + \Delta u,$$

$$\Delta v = v(x + \Delta x) - v(x) \Rightarrow v(x + \Delta x) = v(x) + \Delta v,$$



Вывод формулы №3: $(uv)' = u'v + uv'$

поэтому

$$\begin{aligned}\Delta f &= f(x + \Delta x) - f(x) = \\ &= u(x + \Delta x) \cdot v(x + \Delta x) - u(x) \cdot v(x) = \\ &= (u(x) + \Delta u) \cdot (v(x) + \Delta v) - u(x) \cdot v(x) = \\ &= u(x) \cdot \Delta v + \Delta u \cdot v(x) + \Delta u \cdot \Delta v,\end{aligned}$$



Вывод формулы №3: $(uv)' = u'v + uv'$

и

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x) \cdot \Delta v + \Delta u \cdot v(x) + \Delta u \cdot \Delta v}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(u(x) \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot v(x) + \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \Delta v \right) = \end{aligned}$$



Вывод формулы №3: $(uv)' = u'v + uv'$

$$\begin{aligned} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(u(x) \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot v(x) + \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \Delta v \right) = \\ &= u(x) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot v(x) + \\ &\quad + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta v = \\ &= uv' + u'v + u' \cdot 0 = uv' + u'v. \blacksquare \end{aligned}$$



Производная обратной функции

$$(f^{-1}(y_0))' = \frac{1}{f'(x_0)}$$



Производная обратной функции

$$(f^{-1}(y_0))' = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Вывод формулы:

$$(f^{-1}(y_0))' = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(x_0)}. \blacksquare$$



Производная сложной функции

Если $f(x) = v(u(x))$ – сложная функция, образованная путем композиции функций $u(x)$ и $v(u)$, а также существуют производные $u'(x_0)$ и $v'(u_0)$, где $u_0 = u(x_0)$, то

$$f'(x_0) = v'(u_0) \cdot u'(x_0).$$



Приведем примеры.



Вычисление производных

Найти производную сложной функции
 $f(x) = \ln(3x^2 + 5)$.

Разложим данную сложную функцию на составляющие ее простые функции $u(x)$, $v(u)$ и найдем их производные:

$$u(x) = 3x^2 + 5, \quad u'(x) = 6x,$$

$$v(u) = \ln u, \quad v'(u) = 1/u.$$



Вычисление производных

Найти производную сложной функции $f(x) = \ln(3x^2 + 5)$.

Далее формируем производную сложной функции $f'(x)$ как произведение найденных производных простых функций $v'(u)$ и $u'(x)$:

$$f'(x) = v' \cdot u' = \frac{1}{u} \cdot 6x = \frac{1}{3x^2 + 5} \cdot 6x = \frac{6x}{3x^2 + 5}.$$



Вычисление производных

Найти производную сложной функции
 $f(x) = (1 + 2x^5)^{15}$.

Разложим данную сложную функцию на составляющие ее простые функции $u(x)$, $v(u)$ и найдем их производные:

$$\begin{aligned} u(x) &= 1 + 2x^5, & u'(x) &= 10x^4, \\ v(u) &= u^{15}, & v'(u) &= 15u^{14}. \end{aligned}$$



Найти производную сложной функции
 $f(x) = (1 + 2x^5)^{15}$.

Далее формируем производную сложной функции $f'(x)$ как произведение найденных производных простых функций $v'(u)$ и $u'(x)$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= v' \cdot u' = 15u^{14} \cdot 10x^4 = \\ &= 15(1 + 2x^5)^{14} \cdot 10x^4 = 150x^4(1 + 2x^5)^{14}. \end{aligned}$$

