

# Математический анализ

## Модуль 3

### Дифференциальное исчисление функций одной переменной

### Лекция 3.3

(для ГУИМЦ, 2026)

#### Аннотация

Теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа и Коши. Правило Лопиталя. Порядок роста функции.

## 1 Производная в экстремальных точках

**Теорема 1** (теорема Ферма\*). Если функция определена в некоторой окрестности точки  $c$ , дифференцируема в самой точке  $c$  и принимает в ней наибольшее или наименьшее значение, то ее производная в этой точке равна нулю.

#### Доказательство

Пусть функция  $f(x)$  определена в окрестности  $U(c)$  точки  $c$  и принимает в этой точке наибольшее значение. Тогда

$$\forall x \in U(c) \quad f(x) \leq f(c).$$

Соответственно,

$$\text{если } x < c, \text{ то } \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0, \quad (1)$$

$$\text{если } x > c, \text{ то } \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0. \quad (2)$$

Перейдем к пределу в данных неравенствах при  $x \rightarrow c$ :

$$(1) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow c-0} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0 \Rightarrow f'_-(c) \geq 0,$$

$$(2) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow c+0} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0 \Rightarrow f'_+(c) \leq 0.$$

Поскольку функция  $f(x)$  дифференцируема в точке  $c$ , то в этой точке существует ее производная  $f'(c)$ , которая по теореме о связи односторонних производных с двусторонней должна равняться их общему значению:

$$f'(c) = f'_-(c) = f'_+(c).$$

Поскольку  $f'_-(c) \geq 0$  и  $f'_+(c) \leq 0$ , данное двойное равенство выполняется, только если

$$f'_-(c) = 0, f'_+(c) = 0, \text{ а значит, и } f'(c) = 0. \blacksquare.$$

## 2 Теоремы о средних значениях

**Теорема 2** (теорема Ролля\*). Пусть функция  $y = f(x)$  определена на отрезке  $[a, b]$  и удовлетворяет условиям:

- 1) она непрерывна на отрезке  $[a, b]$ ,
- 2) она дифференцируема на интервале  $(a, b)$ ,
- 3)  $f(a) = f(b)$ .

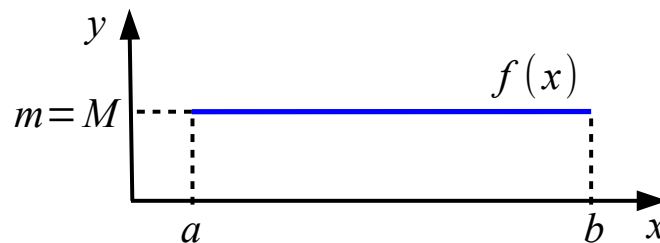
Тогда

$$\exists c \in (a, b) : f'(c) = 0.$$

*Доказательство*

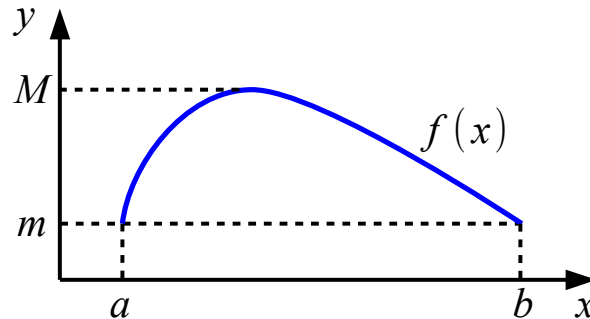
Поскольку  $f(x) \in C[a, b]$ , то она достигает на  $[a, b]$  своего наибольшего  $M$  и наименьшего  $m$  значений по теореме Вейерштрасса для функции, непрерывной на отрезке. Возможны случаи:

- 1)  $m = M$



Тогда, поскольку для всех  $x \in [a, b]$  имеем  $M = m \leq f(x) \leq M$ , то  $f(x) = M = \text{const}$ . Следовательно,  $\forall x \in (a, b) : f'(x) = 0$ . Таким образом, в качестве точки  $c$  в этом случае можно взять любую точку из интервала  $(a, b)$ .

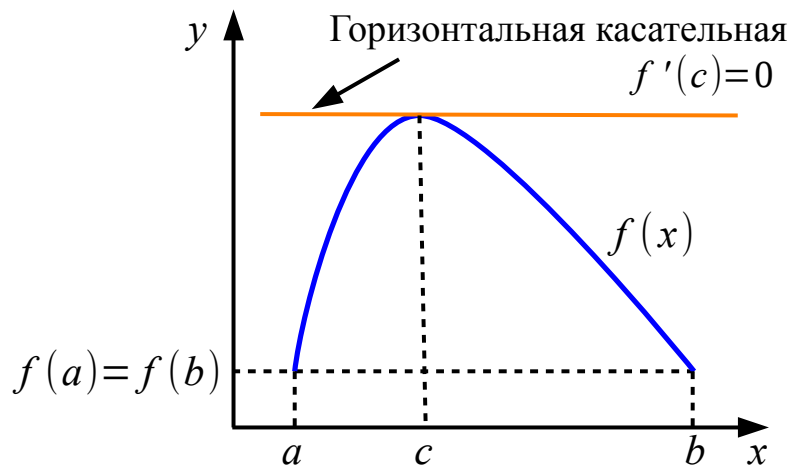
2)  $m \neq M$



Так как  $f(a) = f(b)$ , то хотя бы одно из чисел  $m$  или  $M$  достигается на интервале  $(a, b)$ . Пусть, для определенности,  $M$  достигается на  $(a, b)$ , т.е.  $M = f(c), c \in (a, b)$ . Тогда по теореме Ферма имеем  $f'(c) = 0$ . ■

### Геометрическая интерпретация теоремы

Если функция  $f(x)$  удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля, то на интервале  $(a, b)$  существует точка, в которой эта функция имеет горизонтальную касательную.



**Теорема 3** (теорема Лагранжа, теорема о конечных приращениях\*). Пусть функция  $y = f(x)$  определена на отрезке  $[a, b]$  и удовлетворяет условиям:

- 1) она непрерывна на отрезке  $[a, b]$ ,
- 2) она дифференцируема на интервале  $(a, b)$ .

Тогда

$$\exists c \in (a, b) : \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

*Доказательство*

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Функция  $F(x)$  удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля.

$$\Rightarrow \exists c \in (a, b) : F'(c) = 0.$$

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0.$$

$$\Rightarrow f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \blacksquare$$

**Теорема 4** (теорема Коши). Пусть функции  $y = f(x)$  и  $y = g(x)$  определены на отрезке  $[a, b]$  и удовлетворяют условиям:

- 1) они непрерывны на отрезке  $[a, b]$ ,
- 2) они дифференцируемы на интервале  $(a, b)$ ,
- 3)  $g'(x) \neq 0$  во всех точках интервала  $(a, b)$ .

Тогда

$$\exists c \in (a, b) : \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

### 3 Правило Лопиталья

Правило Лопиталья – это способ нахождения пределов функций через их производные.

Сначала рассмотрим частный случай правила Лопиталья раскрытия неопределенности  $(0/0)$ .

**Теорема 5** (частный случай правила Лопиталья\*). Пусть функции  $f(x)$  и  $g(x)$  удовлетворяют условиям:

1) они непрерывны и дифференцируемы на интервале  $(a, b)$ ,

$$2) \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+0} g(x) = 0,$$

$$3) \forall x \in (a, b) : g'(x) \neq 0,$$

$$4) \exists \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ (конечный или бесконечный).}$$

Тогда

$$\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

*Доказательство*

Доопределим функции  $f(x)$  и  $g(x)$  в точке  $a$ , положив  

$$f(a) = g(a) = 0.$$

В этом случае функции  $f(x)$  и  $g(x)$  становятся непрерывными в точке  $a$  и начинают удовлетворять всем условиям теоремы Коши на любом отрезке  $[a, x]$ , где  $a < x < b$ . Тогда

$$\exists c(x) \in (a, x) : \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - 0}{g(x) - 0} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c(x))}{g'(c(x))}$$

или, убрав промежуточные выкладки,

$$\exists c(x) \in (a, x) : \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c(x))}{g'(c(x))}. \quad (1)$$

Заметим, что здесь мы пишем не  $c$ , а  $c(x)$ , поскольку значение  $c$  зависит от рассматриваемого интервала  $(a, x)$ . Меняя значение переменной  $x$ , мы меняем размер интервала  $(a, x)$ . В результате меняется и значение  $c$ . Поэтому  $c$  является некоторой функцией от  $x$ :  $c = c(x)$ .

Так как  $a < c(x) < x$ , то  $\lim_{x \rightarrow a+0} c(x) = a$ .

По теореме о замене переменной в пределе имеем:

$$\lim_{c \rightarrow a+0} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(c(x))}{g'(c(x))},$$

а по равенству (1)

$$\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(c(x))}{g'(c(x))}.$$

Тогда

$$\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c \rightarrow a+0} \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

или, изменив обозначение переменной в последнем пределе  $c$  на  $x$ ,

$$\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \blacksquare$$

**Общий случай правила Лопиталя:**

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \left( \frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

где  $a$  – это конечное число или одна из бесконечностей.

## 4 Порядок роста функций

**Определение 1.** Говорят, что бесконечно большая при  $x \rightarrow a$  функция  $f(x)$  имеет **более высокий порядок роста**, чем бесконечно большая при  $x \rightarrow a$  функция  $g(x)$ , если

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty.$$

Рассмотрим примеры:

**Пример 1.**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{\ln x} = \left( \frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^n)'}{(\ln x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{nx^{n-1}}{1/x} =$   
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} nx^n = +\infty$

**Пример 2.**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{x^n} = \left( \frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(a^x)'}{(x^n)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x \ln a}{nx^{n-1}} = \left( \frac{\infty}{\infty} \right) =$   
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(a^x \ln a)'}{(nx^{n-1})'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x \ln^2 a}{n(n-1)x^{n-2}} = \dots =$   
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x \ln^n a}{n!} = +\infty, a > 1$

**Вывод:** показательная функция растет быстрее степенной, а степенная функция растет быстрее логарифмической.

