

Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана
Факультет “Фундаментальные науки”
Кафедра “Высшая математика”

Математический анализ

Модуль 2

Пределы и непрерывность
функций одной переменной

Лекция 2.5

для ГУИМЦ, 2026

к.ф.-м.н. Семакин А.Н.

Свойства функций, непрерывных в точке



Теорема (локальная ограниченность непрерывной функции)*



Теорема (локальная ограниченность непрерывной функции)*

Если $f(x) \in C(a)$, то существует такая окрестность точки a , в которой функция $f(x)$ ограничена.



Свойства функций, непрерывных в точке

Доказательство



Свойства функций, непрерывных в точке

Доказательство

$$f(x) \in C(a)$$



Свойства функций, непрерывных в точке

Доказательство

$$f(x) \in C(a)$$



$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 \forall x \in R, |x - a| < \delta:$$

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$



Свойства функций, непрерывных в точке

Доказательство

$$f(x) \in C(a)$$



$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 \forall x \in R, |x - a| < \delta:$$

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Пусть $\varepsilon = 1$.



Свойства функций, непрерывных в точке

Доказательство

$$f(x) \in C(a)$$



$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 \forall x \in R, |x - a| < \delta:$$

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Пусть $\varepsilon = 1$. Тогда $\exists \delta_1 = \delta(1)$,



Свойства функций, непрерывных в точке

Доказательство

$$f(x) \in C(a)$$



$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 \forall x \in R, |x - a| < \delta:$$

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Пусть $\varepsilon = 1$. Тогда $\exists \delta_1 = \delta(1)$, такое что

$$\forall x \in R, |x - a| < \delta_1: |f(x) - f(a)| < 1$$



Свойства функций, непрерывных в точке

Доказательство

$$f(x) \in C(a)$$



$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 \forall x \in R, |x - a| < \delta:$$

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Пусть $\varepsilon = 1$. Тогда $\exists \delta_1 = \delta(1)$, такое что

$$\forall x \in R, |x - a| < \delta_1: |f(x) - f(a)| < 1$$

или

$$\forall x \in U(a, \delta_1): |f(x) - f(a)| < 1.$$



Свойства функций, непрерывных в точке

Откуда получаем, что

$$\forall x \in U(a, \delta_1): f(a) - 1 < f(x) < f(a) + 1.$$



Свойства функций, непрерывных в точке

Откуда получаем, что

$$\forall x \in U(a, \delta_1): f(a) - 1 < f(x) < f(a) + 1.$$

Это означает, что существует окрестность точки a , в которой функция $f(x)$ ограничена.



Теорема (локальное знакопостоянство непрерывной функции)*



Теорема (локальное знакопостоянство непрерывной функции)*

Если $f(x) \in C(a)$ и $f(a) \neq 0$, то в некоторой окрестности точки a функция $f(x)$ сохраняет свой знак.



Свойства функций, непрерывных в точке

Доказательство



Свойства функций, непрерывных в точке

Доказательство

Рассмотрим случай $f(a) > 0$.



Свойства функций, непрерывных в точке

Доказательство

Рассмотрим случай $f(a) > 0$.

$$f(x) \in C(a)$$



Свойства функций, непрерывных в точке

Доказательство

Рассмотрим случай $f(a) > 0$.

$$f(x) \in C(a)$$



$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 \forall x \in R, |x - a| < \delta:$$

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$



Свойства функций, непрерывных в точке

Доказательство

Рассмотрим случай $f(a) > 0$.

$$f(x) \in C(a)$$



$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 \forall x \in R, |x - a| < \delta:$$

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Пусть $\varepsilon = f(a)$.



Свойства функций, непрерывных в точке

Доказательство

Рассмотрим случай $f(a) > 0$.

$$f(x) \in C(a)$$



$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 \forall x \in R, |x - a| < \delta:$$

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Пусть $\varepsilon = f(a)$. Тогда $\exists \delta_1 = \delta(f(a))$,



Свойства функций, непрерывных в точке

Доказательство

Рассмотрим случай $f(a) > 0$.

$$f(x) \in C(a)$$



$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 \forall x \in R, |x - a| < \delta:$$

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Пусть $\varepsilon = f(a)$. Тогда $\exists \delta_1 = \delta(f(a))$, такое что

$$\forall x \in R, |x - a| < \delta_1: |f(x) - f(a)| < f(a)$$



Свойства функций, непрерывных в точке

Доказательство

Рассмотрим случай $f(a) > 0$.

$$f(x) \in C(a)$$



$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 \forall x \in R, |x - a| < \delta:$$

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Пусть $\varepsilon = f(a)$. Тогда $\exists \delta_1 = \delta(f(a))$, такое что

$$\forall x \in R, |x - a| < \delta_1: |f(x) - f(a)| < f(a)$$

или

$$\forall x \in U(a, \delta_1): |f(x) - f(a)| < f(a).$$



Свойства функций, непрерывных в точке

Откуда получаем, что

$$\forall x \in U(a, \delta_1): 0 < f(x) < 2f(a).$$



Свойства функций, непрерывных в точке

Откуда получаем, что

$$\forall x \in U(a, \delta_1): 0 < f(x) < 2f(a).$$

Это означает, что существует окрестность точки a , в которой $f(x) > 0$,



Свойства функций, непрерывных в точке

Откуда получаем, что

$$\forall x \in U(a, \delta_1): 0 < f(x) < 2f(a).$$

Это означает, что существует окрестность точки a , в которой $f(x) > 0$, т.е. функция $f(x)$ сохраняет свой знак.



Свойства функций, непрерывных в точке

Откуда получаем, что

$$\forall x \in U(a, \delta_1): 0 < f(x) < 2f(a).$$

Это означает, что существует окрестность точки a , в которой $f(x) > 0$, т.е. функция $f(x)$ сохраняет свой знак.

Аналогично доказывается для $f(a) < 0$. ■



Непрерывность функции на промежутке



Непрерывность функции на промежутке

Определение

Функция, определенная на интервале (a, b) и непрерывная в каждой его точке, называется **непрерывной на этом интервале**.



Непрерывность функции на промежутке

Определение

Функция, определенная на интервале (a, b) и непрерывная в каждой его точке, называется **непрерывной на этом интервале**.

Обозначение: $f(x) \in C(a, b)$.



Непрерывность функции на промежутке

Определение

Функция, определенная на отрезке $[a, b]$, называется **непрерывной на этом отрезке**, если она непрерывна на интервале (a, b) , непрерывна справа в точке a и непрерывна слева в точке b .



Непрерывность функции на промежутке

Определение

Функция, определенная на отрезке $[a, b]$, называется **непрерывной на этом отрезке**, если она непрерывна на интервале (a, b) , непрерывна справа в точке a и непрерывна слева в точке b .

Обозначение: $f(x) \in C[a, b]$.



Непрерывность функции на промежутке

Теорема (теорема Вейерштрасса)



Теорема (теорема Вейерштрасса)

Всякая непрерывная на отрезке функция ограничена на этом отрезке и достигает на нем своих точной верхней и точной нижней граней.



Непрерывность функции на промежутке

Математическая формулировка теоремы:



Непрерывность функции на промежутке

Математическая формулировка теоремы:

$$f(x) \in C[a, b]$$



Непрерывность функции на промежутке

Математическая формулировка теоремы:

$$f(x) \in C[a, b] \Rightarrow$$



Непрерывность функции на промежутке

Математическая формулировка теоремы:

$$f(x) \in C[a, b] \Rightarrow \exists x', x'' \in [a, b]:$$



Непрерывность функции на промежутке

Математическая формулировка теоремы:

$$f(x) \in C[a, b] \Rightarrow \exists x', x'' \in [a, b]:$$

$$\sup_{[a, b]} f(x) = f(x'),$$



Непрерывность функции на промежутке

Математическая формулировка теоремы:

$$f(x) \in C[a, b] \Rightarrow \exists x', x'' \in [a, b]:$$

$$\sup_{[a,b]} f(x) = f(x'),$$

$$\inf_{[a,b]} f(x) = f(x''),$$



Непрерывность функции на промежутке

Математическая формулировка теоремы:

$$f(x) \in C[a, b] \Rightarrow \exists x', x'' \in [a, b]:$$

$$\sup_{[a, b]} f(x) = f(x'),$$

$$\inf_{[a, b]} f(x) = f(x''),$$

$$\forall x \in [a, b] : f(x'') \leq f(x) \leq f(x').$$



Непрерывность функции на промежутке

Теорема (теорема Больцано-Коши о промежуточном значении непрерывной функции)



Непрерывность функции на промежутке

Теорема (теорема Больцано-Коши о промежуточном значении непрерывной функции)

Если $f(x) \in C[a, b]$, то для любого числа C , заключенного между $f(a)$ и $f(b)$, существует такая точка $c \in [a, b]$, что $f(c) = C$.



Непрерывность функции на промежутке

Теорема (о непрерывности обратной функции)



Теорема (о непрерывности обратной функции)

Пусть функция $f(x)$ определена, строго возрастает (убывает) и непрерывна на отрезке $[a, b]$,



Непрерывность функции на промежутке

Теорема (о непрерывности обратной функции)

Пусть функция $f(x)$ определена, строго возрастает (убывает) и непрерывна на отрезке $[a, b]$, тогда обратная функция $f^{-1}(y)$ определена, однозначна, строго возрастает (убывает) и непрерывна на отрезке с концами в точках $f(a)$ и $f(b)$.



Асимптоты графика функции



Определение

Пусть функция $f(x)$ определена для всех $x > a$ (или $x < a$).



Асимптоты графика функции

Определение

Пусть функция $f(x)$ определена для всех $x > a$ (или $x < a$). Если существуют такие числа k и b , что функция $f(x) - (kx + b)$ является бесконечно малой при $x \rightarrow +\infty$ (или $x \rightarrow -\infty$),



Определение

Пусть функция $f(x)$ определена для всех $x > a$ (или $x < a$). Если существуют такие числа k и b , что функция $f(x) - (kx + b)$ является бесконечно малой при $x \rightarrow +\infty$ (или $x \rightarrow -\infty$), то прямая $y = kx + b$ называется **наклонной асимптотой** графика функции $f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$ (или $x \rightarrow -\infty$).



Асимптоты графика функции

Графически асимптота является прямой, расстояние до которой от графика функции стремится к нулю.



Асимптоты графика функции

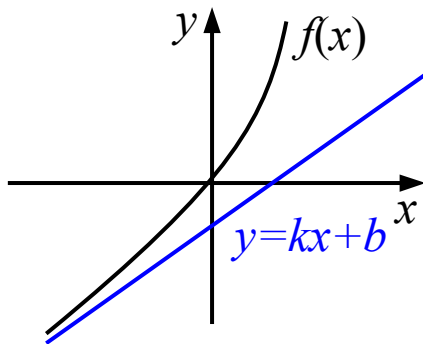


Рис.: Левая наклонная асимптота



Асимптоты графика функции

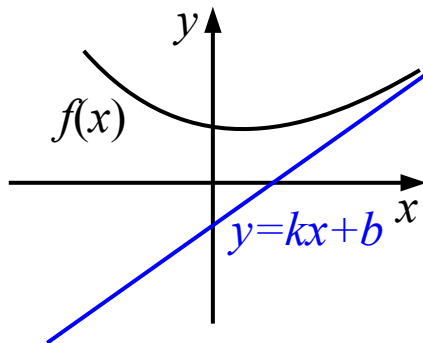


Рис.: Правая наклонная асимптота



Асимптоты графика функции

Коэффициенты наклонных асимптот находят по формулам:



Асимптоты графика функции

Коэффициенты наклонных асимптот находят по формулам:

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x},$$



Асимптоты графика функции

Коэффициенты наклонных асимптот находят по формулам:

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x},$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx).$$



Асимптоты графика функции

Коэффициенты наклонных асимптот находят по формулам:

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x},$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx).$$

Если хотя бы один из коэффициентов k и b равен бесконечности или не существует, то функция не имеет соответствующей наклонной асимптоты.



Асимптоты графика функции

Определение

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой проколотой окрестности точки a , и пусть выполняется хотя бы одно из условий

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \infty.$$



Асимптоты графика функции

Определение

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой проколотой окрестности точки a , и пусть выполняется хотя бы одно из условий

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \infty.$$

Тогда прямая $x = a$ называется **вертикальной асимптотой** графика функции $f(x)$.



Асимптоты графика функции

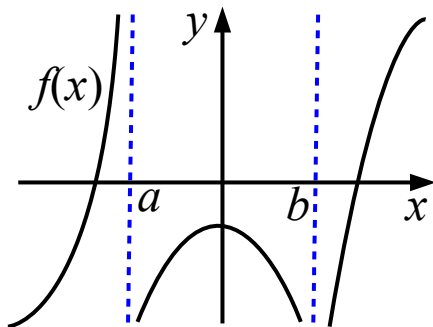


Рис.: Вертикальные асимптоты $x = a$ и $x = b$

