

Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана
Факультет “Фундаментальные науки”
Кафедра “Высшая математика”

Математический анализ

Модуль 2

Пределы и непрерывность
функций одной переменной

Лекция 2.4

для ГУИМЦ, 2026

к.ф.-м.н. Семакин А.Н.

Непрерывность функции



Определение

Функция $f(x)$, определенная в некоторой окрестности конечной точки a , называется **непрерывной** в этой точке, если

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$



Эквивалентное определение

Функция $f(x)$, определенная в некоторой окрестности конечной точки a , называется **непрерывной** в этой точке, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 \forall x \in R, |x - a| < \delta: \\ |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$



Непрерывность функции

Обозначение: $f(x) \in C(a)$



Непрерывность функции

Обозначение: $f(x) \in C(a)$ – функция $f(x)$
непрерывна в точке a .



Непрерывность функции

Обозначение: $f(x) \in C(a)$ – функция $f(x)$
непрерывна в точке a .

Замечание



Непрерывность функции

Обозначение: $f(x) \in C(a)$ – функция $f(x)$
непрерывна в точке a .

Замечание

Непрерывность функции предполагает, что эта функция определена в некоторой окрестности точки a , включая саму точку a .



Непрерывность функции

Геометрическая интерпретация



Непрерывность функции

Геометрическая интерпретация

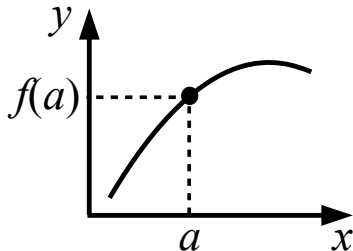
Графически непрерывность функции в конечной точке a означает, что ее график в окрестности точки a представляет собой сплошную линию, которая не претерпевает каких-либо разрывов при переходе через саму точку a .



Непрерывность функции

Геометрическая интерпретация

Графически непрерывность функции в конечной точке a означает, что ее график в окрестности точки a представляет собой сплошную линию, которая не претерпевает каких-либо разрывов при переходе через саму точку a .



Непрерывность функции

$\Leftrightarrow$ – знак равносильности и эквивалентности.



Непрерывность функции

$\Leftrightarrow$ – знак равносильности и эквивалентности.

Если этот знак присутствует в тексте определений и теорем, то он часто читается как



Непрерывность функции

$\Leftrightarrow$ – знак **равносильности** и **эквивалентности**.

Если этот знак присутствует в тексте определений и теорем, то он часто читается как

1) необходимо и достаточно,



Непрерывность функции

$\Leftrightarrow$ – знак равносильности и эквивалентности.

Если этот знак присутствует в тексте определений и теорем, то он часто читается как

- 1) необходимо и достаточно,
- 2) тогда и только тогда, когда.



Непрерывность функции

Например,



Непрерывность функции

Например, выражение $A \Leftrightarrow B$ читается как



Непрерывность функции

Например, выражение $A \Leftrightarrow B$ читается как
1. Утверждение A справедливо тогда и только тогда, когда справедливо утверждение B .



Непрерывность функции

- Например, выражение $A \Leftrightarrow B$ читается как
1. Утверждение A справедливо тогда и только тогда, когда справедливо утверждение B .
 2. Для справедливости утверждения A необходима и достаточна справедливость утверждения B .



Непрерывность функции

Запись $A \Leftrightarrow B$ означает, что утверждения A и B справедливы или нет одновременно:



Непрерывность функции

Запись $A \Leftrightarrow B$ означает, что утверждения A и B справедливы или нет одновременно:
а) если справедливо A , то должно быть справедливо B ,



Непрерывность функции

Запись $A \Leftrightarrow B$ означает, что утверждения A и B справедливы или нет одновременно:

- а) если справедливо A , то должно быть справедливо B ,
- б) если справедливо B , то должно быть справедливо A .



Непрерывность функции

Введем обозначения:



Непрерывность функции

Введем обозначения:

$$\Delta x = x - a$$



Непрерывность функции

Введем обозначения:

$\Delta x = x - a$ – приращение значения аргумента x
в точке a ,



Непрерывность функции

Введем обозначения:

$\Delta x = x - a$ – приращение значения аргумента x
в точке a ,

$$\Delta f = f(a + \Delta x) - f(a)$$



Непрерывность функции

Введем обозначения:

$\Delta x = x - a$ – приращение значения аргумента x
в точке a ,

$\Delta f = f(a + \Delta x) - f(a)$ – приращение значения
функции $f(x)$ в точке a .



Непрерывность функции

Теорема (необходимое и достаточное условие
непрерывности функции в точке)*



Непрерывность функции

Теорема (необходимое и достаточное условие
непрерывности функции в точке)*

$$f(x) \in C(a) \Leftrightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f = 0.$$



Расшифровка математической записи:



Непрерывность функции

Расшифровка математической записи:

$f(x) \in C(a)$ – для того чтобы функция $f(x)$
была непрерывна в точке a



Непрерывность функции

Расшифровка математической записи:

$f(x) \in C(a)$ – для того чтобы функция $f(x)$
была непрерывна в точке a

$\Leftrightarrow$ – необходимо и достаточно, чтобы



Непрерывность функции

Расшифровка математической записи:

$f(x) \in C(a)$ – для того чтобы функция $f(x)$
была непрерывна в точке a

$\Leftrightarrow$ – необходимо и достаточно, чтобы

$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f = 0$ – предел приращения значения
функции в точке a равнялся нулю при
стремлении к нулю приращения аргумента.



Доказательство



Доказательство

1. Необходимость.



Непрерывность функции

Доказательство

1. Необходимость.

Дано: $f(x) \in C(a)$



Непрерывность функции

Доказательство

1. Необходимость.

Дано: $f(x) \in C(a)$

Доказать: $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f = 0$



Непрерывность функции

$$f(x) \in C(a)$$



Непрерывность функции

$$f(x) \in C(a)$$



Непрерывность функции

$$f(x) \in C(a)$$



$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 \forall x \in R, |x - a| < \delta: \\ |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$



Непрерывность функции

$$f(x) \in C(a)$$



$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 \forall x \in R, |x - a| < \delta: \\ |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

$$\Delta x = x - a$$



Непрерывность функции

$$f(x) \in C(a)$$



$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 \forall x \in R, |x - a| < \delta: \\ |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

$$\Delta x = x - a$$



Непрерывность функции

$$f(x) \in C(a)$$



$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 \forall x \in R, |x - a| < \delta: \\ |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

$$\Delta x = x - a$$



$$x = a + \Delta x$$



Непрерывность функции

$$f(x) \in C(a)$$



$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 \forall x \in R, |x - a| < \delta: \\ |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

$$\Delta x = x - a$$



$$x = a + \Delta x$$



Непрерывность функции

$$f(x) \in C(a)$$



$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 \forall x \in R, |x - a| < \delta: \\ |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

$$\Delta x = x - a$$



$$x = a + \Delta x$$



$$f(x) - f(a)$$



Непрерывность функции

$$f(x) \in C(a)$$



$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 \forall x \in R, |x - a| < \delta: \\ |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

$$\Delta x = x - a$$



$$x = a + \Delta x$$



$$f(x) - f(a) = f(a + \Delta x) - f(a)$$



Непрерывность функции

$$f(x) \in C(a)$$



$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 \forall x \in R, |x - a| < \delta: \\ |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

$$\Delta x = x - a$$



$$x = a + \Delta x$$



$$f(x) - f(a) = f(a + \Delta x) - f(a) = \Delta f.$$



Непрерывность функции

Тогда условие непрерывности функции в точке можно переписать в виде:



Непрерывность функции

Тогда условие непрерывности функции в точке можно переписать в виде:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 \forall \Delta x \in R, |\Delta x| < \delta: \\ |\Delta f| < \varepsilon.$$



Непрерывность функции

Тогда условие непрерывности функции в точке можно переписать в виде:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 \forall \Delta x \in R, |\Delta x| < \delta: \\ |\Delta f| < \varepsilon.$$

Это означает, что $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f = 0$.



2. Достаточность.



2. *Достаточность.*

Дано: $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f = 0$



2. *Достаточность.*

Дано: $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f = 0$

Доказать: $f(x) \in C(a)$



Непрерывность функции

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f = 0$$



Непрерывность функции

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f = 0$$

↓



Непрерывность функции

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f = 0$$



$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 \forall \Delta x \in R, |\Delta x| < \delta:$$

$$|\Delta f| < \varepsilon.$$



Непрерывность функции

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f = 0$$



$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 \forall \Delta x \in R, |\Delta x| < \delta:$$

$$|\Delta f| < \varepsilon.$$

$$\Delta x = x - a,$$



Непрерывность функции

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f = 0$$



$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 \forall \Delta x \in R, |\Delta x| < \delta:$$

$$|\Delta f| < \varepsilon.$$

$$\Delta x = x - a, \Delta f = f(a + \Delta x) - f(a)$$



Непрерывность функции

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f = 0$$



$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 \forall \Delta x \in R, |\Delta x| < \delta:$$

$$|\Delta f| < \varepsilon.$$

$$\Delta x = x - a, \Delta f = f(a + \Delta x) - f(a) = f(x) - f(a)$$



Непрерывность функции

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f = 0$$



$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 \forall \Delta x \in R, |\Delta x| < \delta:$$

$$|\Delta f| < \varepsilon.$$

$$\Delta x = x - a, \Delta f = f(a + \Delta x) - f(a) = f(x) - f(a)$$



Непрерывность функции

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f = 0$$



$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 \forall \Delta x \in R, |\Delta x| < \delta:$$

$$|\Delta f| < \varepsilon.$$

$$\Delta x = x - a, \Delta f = f(a + \Delta x) - f(a) = f(x) - f(a)$$



$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 \forall x \in R, |x - a| < \delta:$$

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$



Непрерывность функции

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f = 0$$



$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 \forall \Delta x \in R, |\Delta x| < \delta:$$

$$|\Delta f| < \varepsilon.$$

$$\Delta x = x - a, \Delta f = f(a + \Delta x) - f(a) = f(x) - f(a)$$



$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 \forall x \in R, |x - a| < \delta:$$

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

$$\Rightarrow f(x) \in C(a). \blacksquare$$



Односторонняя непрерывность



Односторонняя непрерывность

Определение

Пусть функция $f(x)$ определена на полуинтервале $(a, c]$. Функция $f(x)$ называется **непрерывной слева** в конечной точке c , если

$$\lim_{x \rightarrow c-0} f(x) = f(c).$$



Односторонняя непрерывность

Определение

Пусть функция $f(x)$ определена на полуинтервале $[c, b)$. Функция $f(x)$ называется **непрерывной справа** в конечной точке c , если

$$\lim_{x \rightarrow c+0} f(x) = f(c).$$



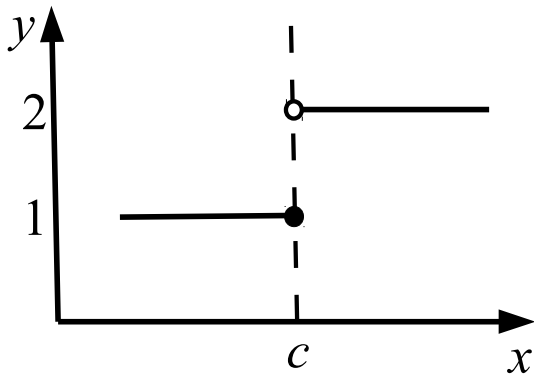
Односторонняя непрерывность

Пример функции, непрерывной слева:



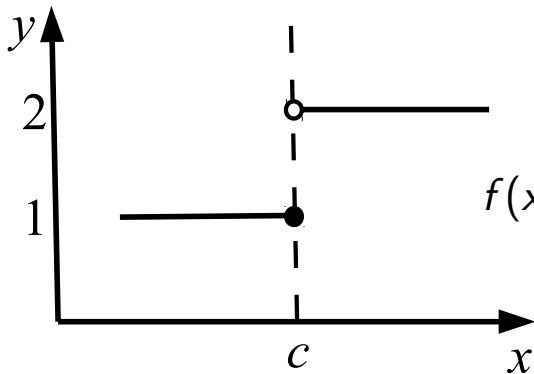
Односторонняя непрерывность

Пример функции, непрерывной слева:



Односторонняя непрерывность

Пример функции, непрерывной слева:



$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \leq c \\ 2, & x > c \end{cases}$$



Точки разрыва



Определение

Конечная точка a называется **точкой разрыва** функции $f(x)$, если $f(x)$ не определена в точке a или определена, но не является в ней непрерывной.



Классификация точек разрыва



Точки разрыва

Классификация точек разрыва

1. Если a – точка разрыва функции $f(x)$ и в этой точке существуют конечные односторонние пределы

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) \text{ и } \lim_{x \rightarrow a+0} f(x),$$

то точка a называется **точкой разрыва первого рода**.



Точки разрыва

Классификация точек разрыва

1.1. Если a – точка разрыва первого рода и

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x),$$

то a называется **точкой устранимого разрыва первого рода**.



Точки разрыва

Классификация точек разрыва

1.2. Если a – точка разрыва первого рода и

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a+0} f(x),$$

то a называется **точкой неустранимого разрыва первого рода**.



Классификация точек разрыва

2. Точка разрыва функции $f(x)$, не являющаяся точкой разрыва первого рода, называется **точкой разрыва второго рода**.



Точки разрыва

Точка разрыва



Точки разрыва

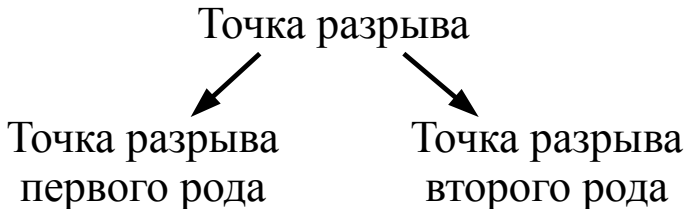
Точка разрыва



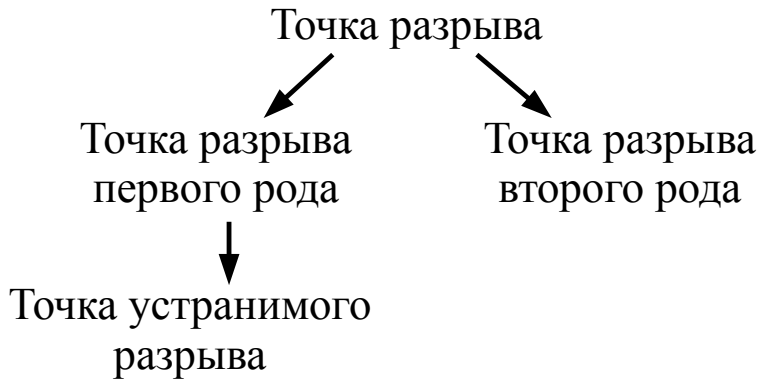
Точка разрыва
первого рода



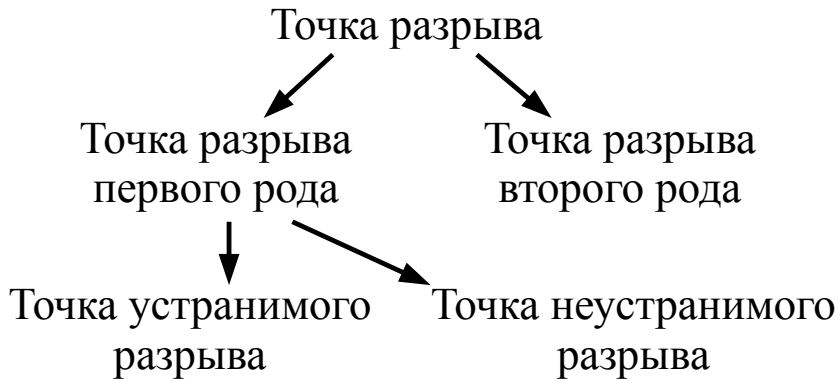
Точки разрыва



Точки разрыва



Точки разрыва



Точки разрыва

Примеры:



Точки разрыва

Примеры:

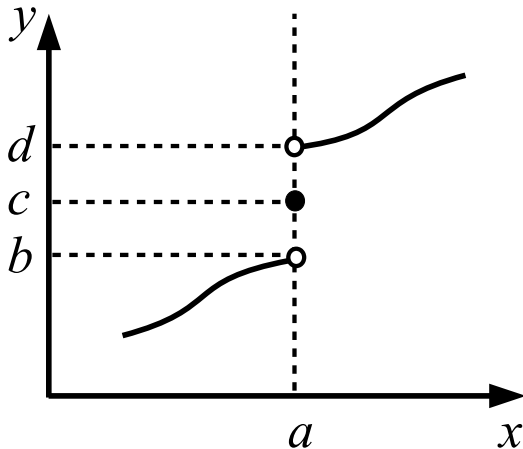
1) точка неустранимого разрыва первого рода



Точки разрыва

Примеры:

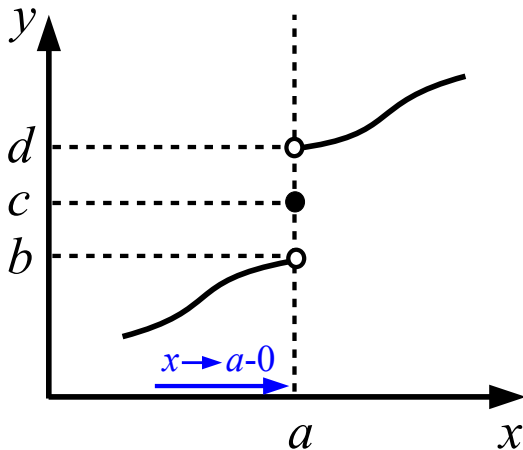
1) точка неустранимого разрыва первого рода



Точки разрыва

Примеры:

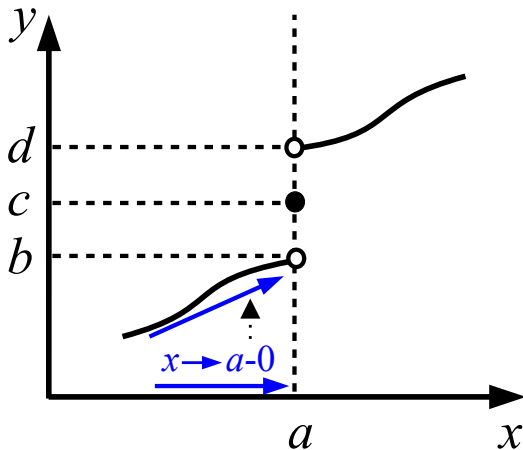
1) точка неустранимого разрыва первого рода



Точки разрыва

Примеры:

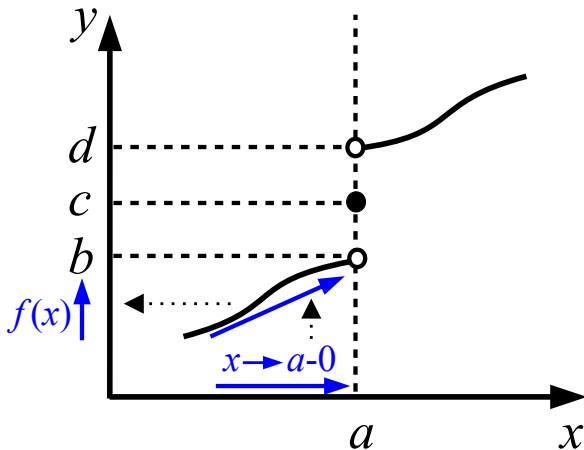
1) точка неустранимого разрыва первого рода



Точки разрыва

Примеры:

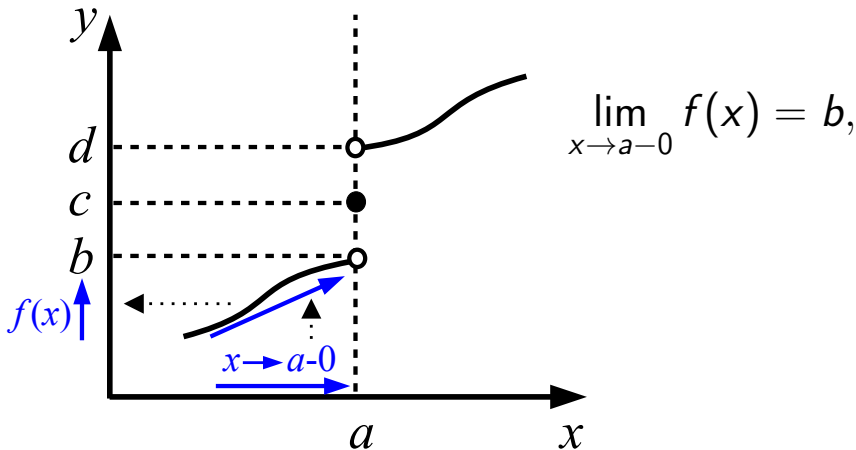
1) точка неустранимого разрыва первого рода



Точки разрыва

Примеры:

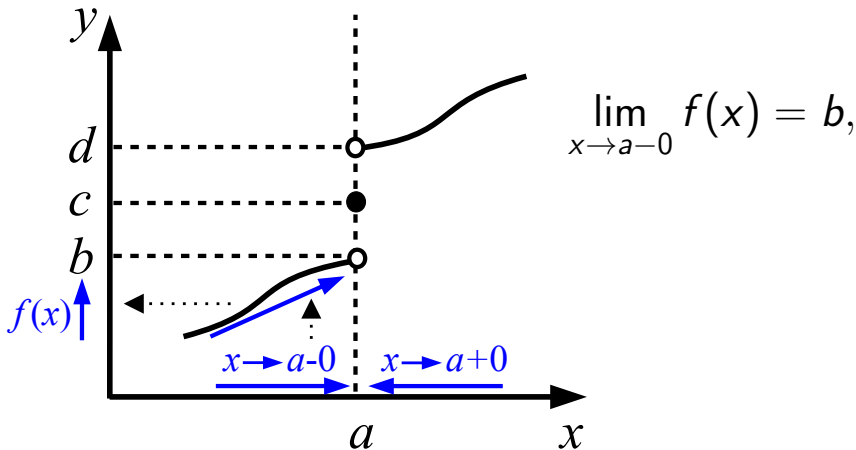
1) точка неустранимого разрыва первого рода



Точки разрыва

Примеры:

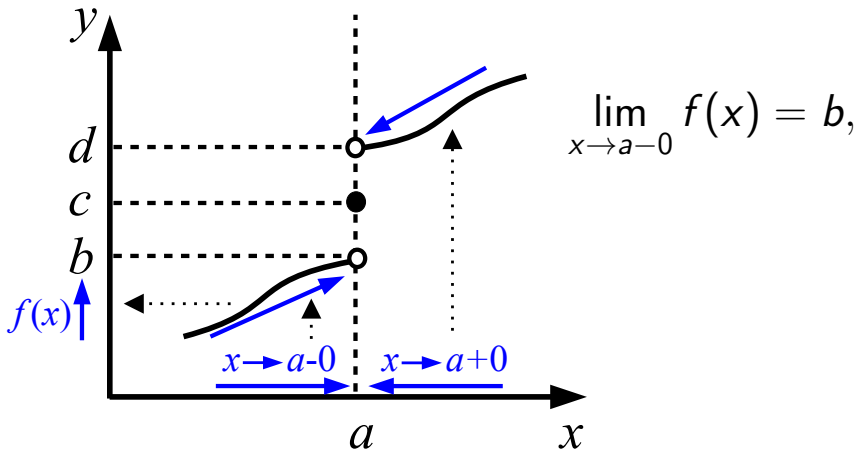
1) точка неустранимого разрыва первого рода



Точки разрыва

Примеры:

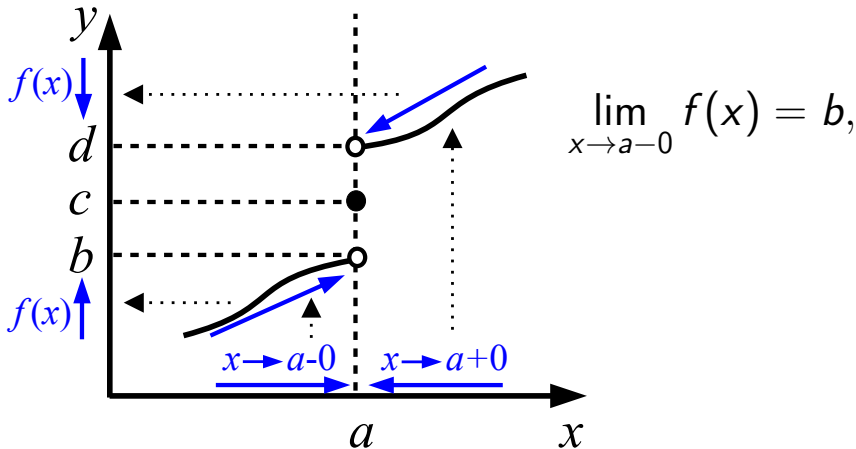
1) точка неустранимого разрыва первого рода



Точки разрыва

Примеры:

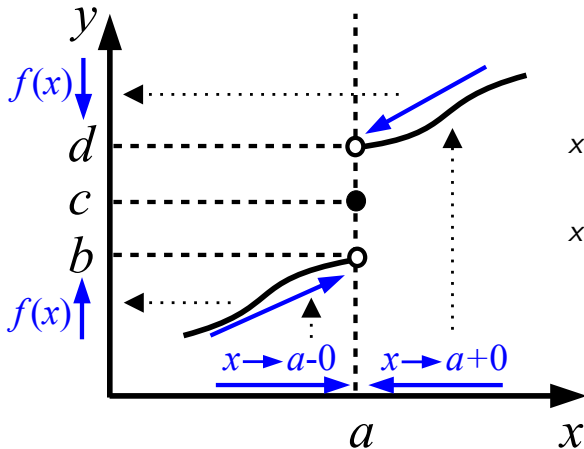
1) точка неустранимого разрыва первого рода



Точки разрыва

Примеры:

1) точка неустранимого разрыва первого рода



$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = b,$$

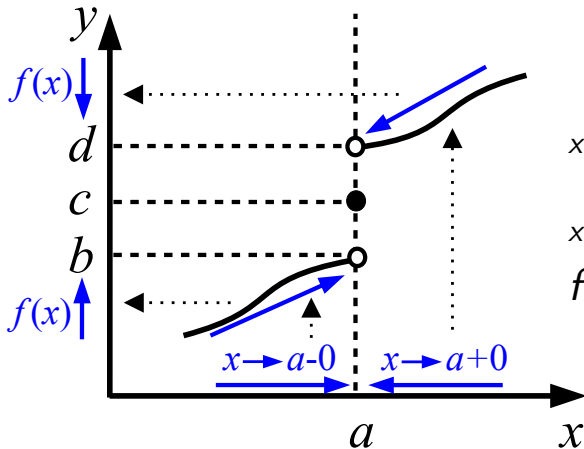
$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = d,$$



Точки разрыва

Примеры:

1) точка неустранимого разрыва первого рода



$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = b,$$

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = d,$$

$$f(a) = c.$$



Точки разрыва

Примеры:

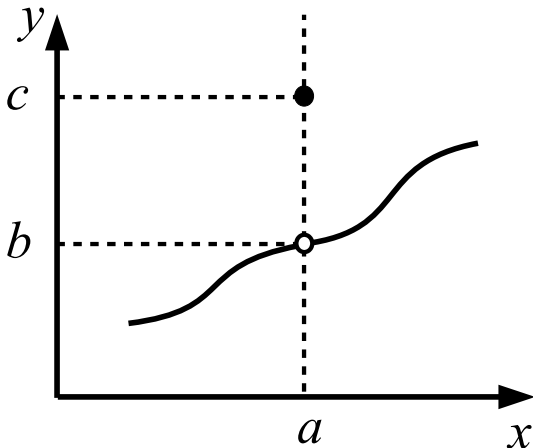
2) точка устранимого разрыва первого рода



Точки разрыва

Примеры:

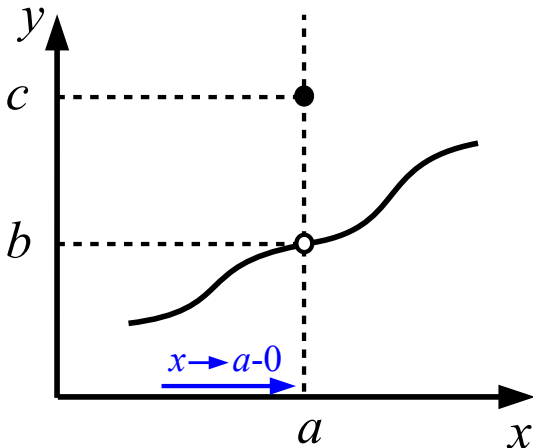
2) точка устранимого разрыва первого рода



Точки разрыва

Примеры:

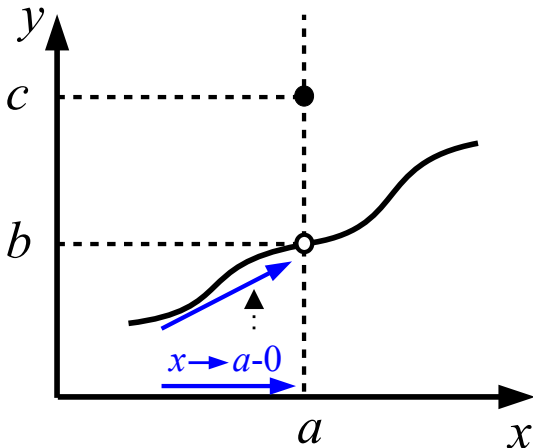
2) точка устранимого разрыва первого рода



Точки разрыва

Примеры:

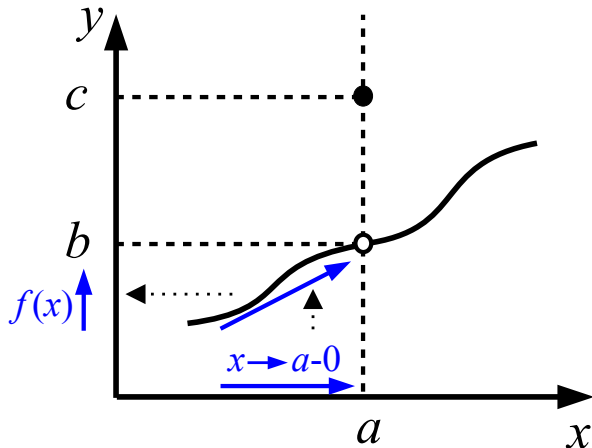
2) точка устранимого разрыва первого рода



Точки разрыва

Примеры:

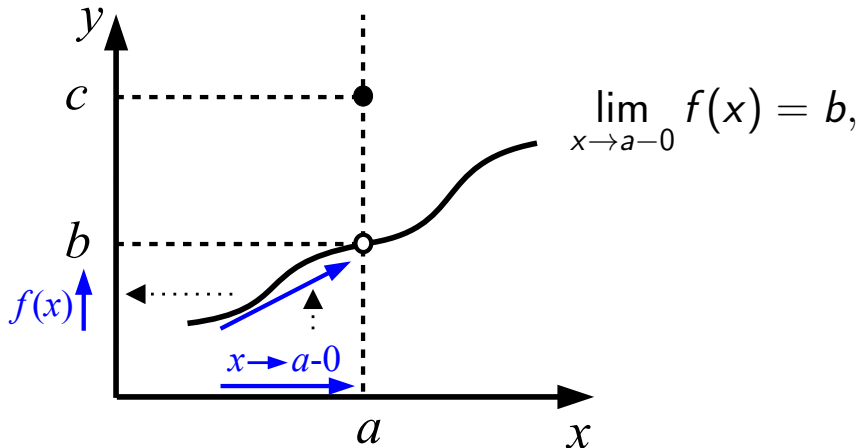
2) точка устранимого разрыва первого рода



Точки разрыва

Примеры:

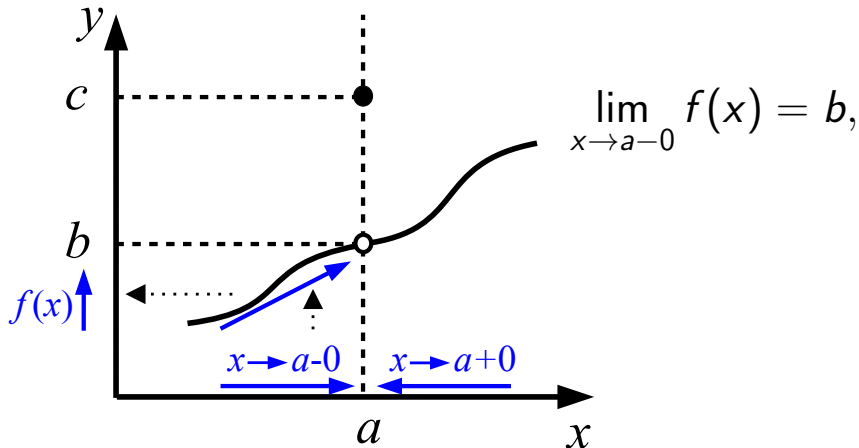
2) точка устранимого разрыва первого рода



Точки разрыва

Примеры:

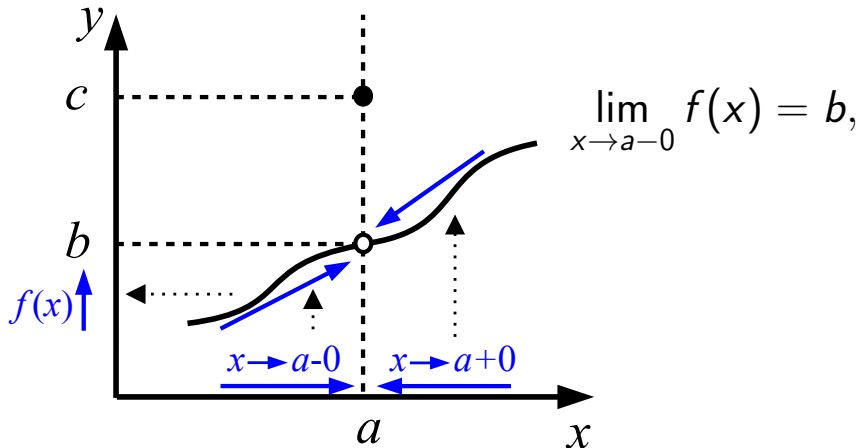
2) точка устранимого разрыва первого рода



Точки разрыва

Примеры:

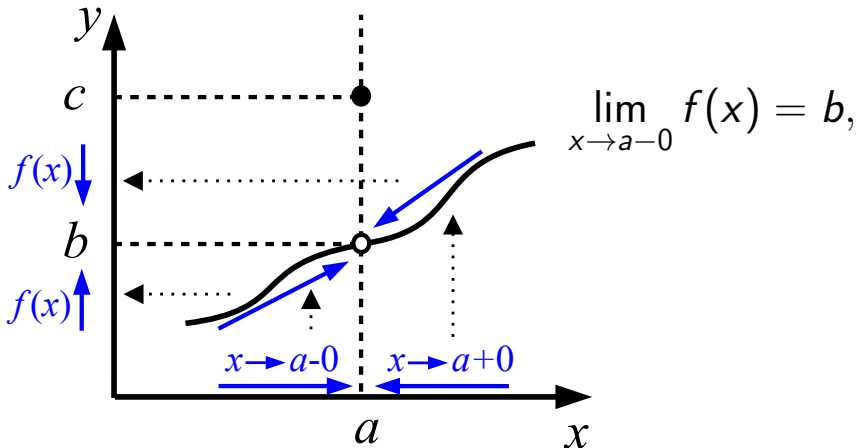
2) точка устранимого разрыва первого рода



Точки разрыва

Примеры:

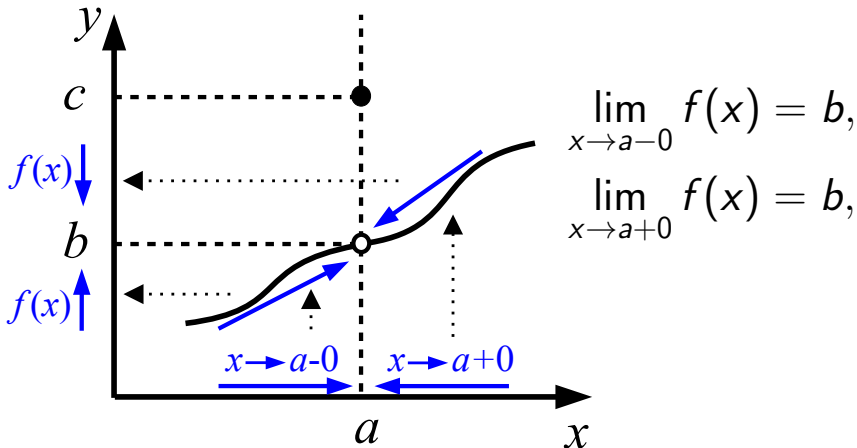
2) точка устранимого разрыва первого рода



Точки разрыва

Примеры:

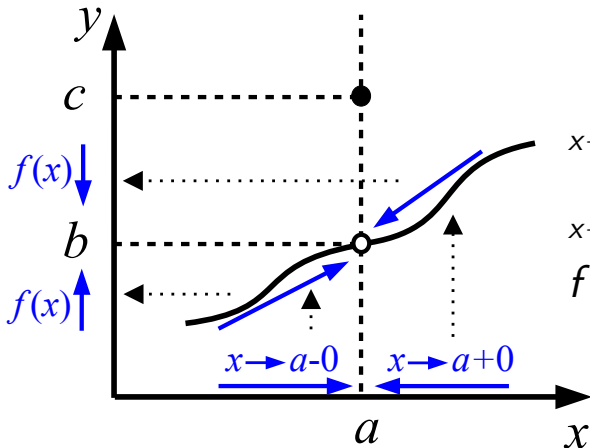
2) точка устранимого разрыва первого рода



Точки разрыва

Примеры:

2) точка устранимого разрыва первого рода



$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = b,$$

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = b,$$

$$f(a) = c.$$



Точки разрыва

Примеры:

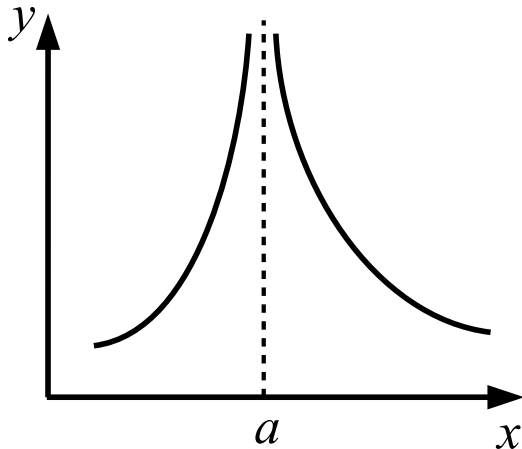
3) точка разрыва второго рода



Точки разрыва

Примеры:

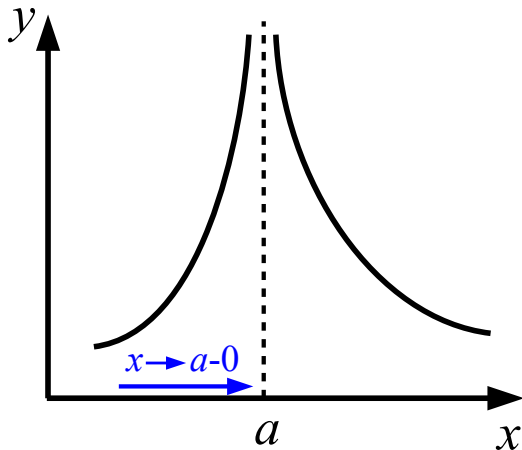
3) точка разрыва второго рода



Точки разрыва

Примеры:

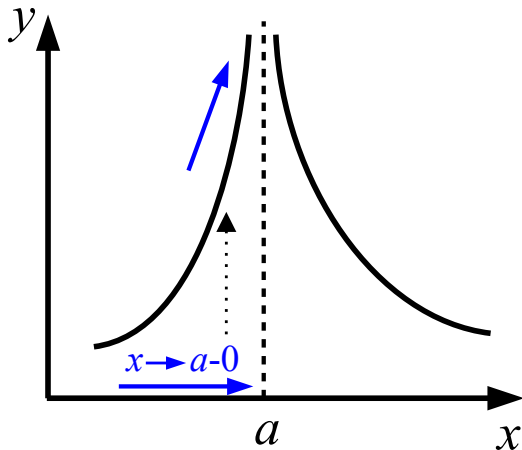
3) точка разрыва второго рода



Точки разрыва

Примеры:

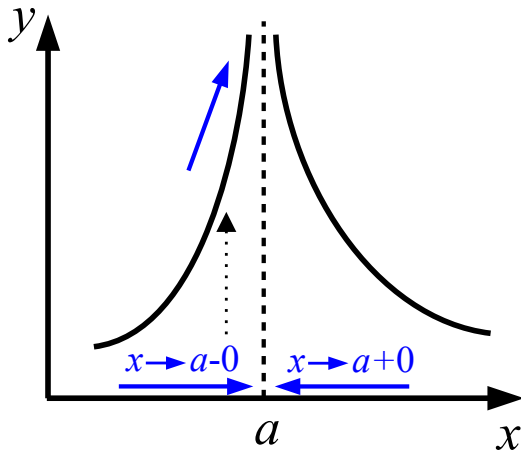
3) точка разрыва второго рода



Точки разрыва

Примеры:

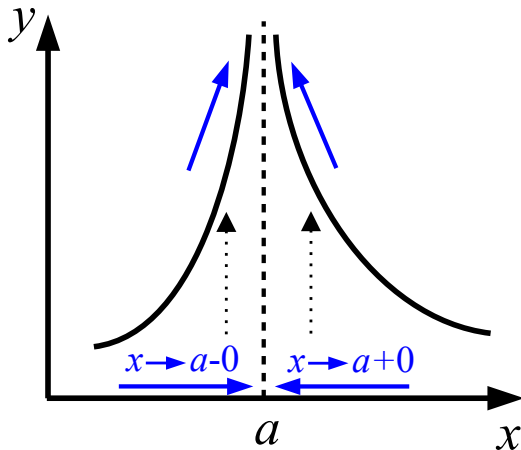
3) точка разрыва второго рода



Точки разрыва

Примеры:

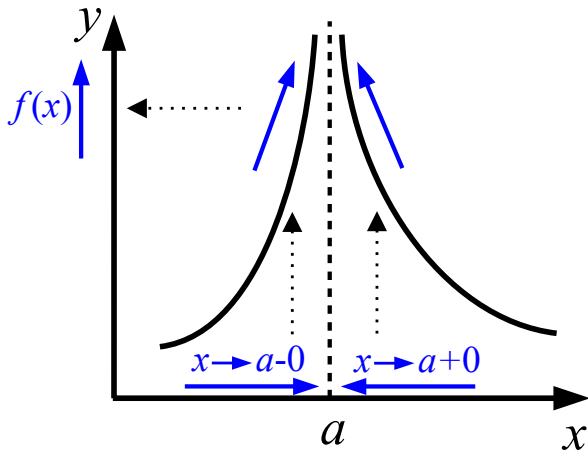
3) точка разрыва второго рода



Точки разрыва

Примеры:

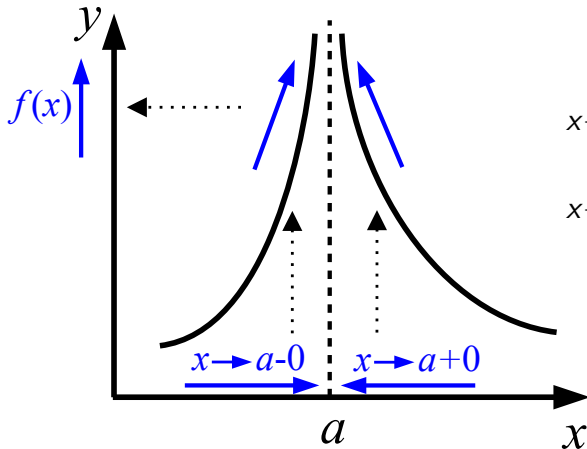
3) точка разрыва второго рода



Точки разрыва

Примеры:

3) точка разрыва второго рода



$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = +\infty,$$

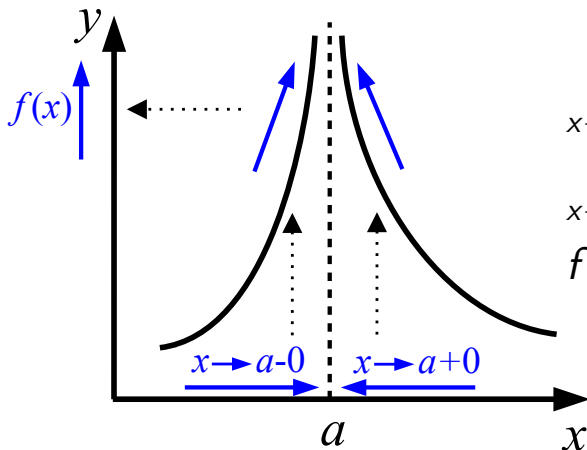
$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = +\infty,$$



Точки разрыва

Примеры:

3) точка разрыва второго рода



$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = +\infty,$$

$f(a)$ - неопределена.



Свойства функций, непрерывных в точке



Теорема (арифметические свойства непрерывных функций)



Теорема (арифметические свойства непрерывных функций)

Если $f(x), g(x) \in C(a)$, то



Теорема (арифметические свойства непрерывных функций)

Если $f(x), g(x) \in C(a)$, то

$$1) f(x) + g(x) \in C(a),$$



Теорема (арифметические свойства непрерывных функций)

Если $f(x), g(x) \in C(a)$, то

$$1) f(x) + g(x) \in C(a),$$

$$2) f(x) \cdot g(x) \in C(a),$$



Теорема (арифметические свойства непрерывных функций)

Если $f(x), g(x) \in C(a)$, то

- 1) $f(x) + g(x) \in C(a)$,
- 2) $f(x) \cdot g(x) \in C(a)$,
- 3) $f(x)/g(x) \in C(a)$, если $g(a) \neq 0$.



Теорема (непрерывность сложной функции)



Теорема (непрерывность сложной функции)

Если $f(x) \in C(a)$ и $g(y) \in C(b)$, где $b = f(a)$, то $g(f(x)) \in C(a)$.



Теорема (непрерывность основных элементарных функций)*



Теорема (непрерывность основных элементарных функций)*

Основные элементарные функции непрерывны всюду в их области определения.



Свойства функций, непрерывных в точке

Доказательство для $y = \sin x$



Свойства функций, непрерывных в точке

Доказательство для $y = \sin x$
 Δf



Свойства функций, непрерывных в точке

Доказательство для $y = \sin x$

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$$



Свойства функций, непрерывных в точке

Доказательство для $y = \sin x$

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) = \sin(x + \Delta x) - \sin x$$



Свойства функций, непрерывных в точке

Доказательство для $y = \sin x$

$$\begin{aligned}\Delta f &= f(x + \Delta x) - f(x) = \sin(x + \Delta x) - \sin x = \\ &= 2 \sin \frac{x + \Delta x - x}{2} \cos \frac{x + \Delta x + x}{2}\end{aligned}$$



Свойства функций, непрерывных в точке

Доказательство для $y = \sin x$

$$\begin{aligned}\Delta f &= f(x + \Delta x) - f(x) = \sin(x + \Delta x) - \sin x = \\&= 2 \sin \frac{x + \Delta x - x}{2} \cos \frac{x + \Delta x + x}{2} = \\&= 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).\end{aligned}$$



Свойства функций, непрерывных в точке

Доказательство для $y = \sin x$

$$\begin{aligned}\Delta f &= f(x + \Delta x) - f(x) = \sin(x + \Delta x) - \sin x = \\&= 2 \sin \frac{x + \Delta x - x}{2} \cos \frac{x + \Delta x + x}{2} = \\&= 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).\end{aligned}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f$$



Свойства функций, непрерывных в точке

Доказательство для $y = \sin x$

$$\begin{aligned}\Delta f &= f(x + \Delta x) - f(x) = \sin(x + \Delta x) - \sin x = \\&= 2 \sin \frac{x + \Delta x - x}{2} \cos \frac{x + \Delta x + x}{2} = \\&= 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).\end{aligned}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$$



Свойства функций, непрерывных в точке

Доказательство для $y = \sin x$

$$\begin{aligned}\Delta f &= f(x + \Delta x) - f(x) = \sin(x + \Delta x) - \sin x = \\&= 2 \sin \frac{x + \Delta x - x}{2} \cos \frac{x + \Delta x + x}{2} = \\&= 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \\&= |\text{бесконечно малая} \cdot \text{ограниченная} = \\&\text{бесконечно малая}| \end{aligned}$$



Свойства функций, непрерывных в точке

Доказательство для $y = \sin x$

$$\begin{aligned}\Delta f &= f(x + \Delta x) - f(x) = \sin(x + \Delta x) - \sin x = \\&= 2 \sin \frac{x + \Delta x - x}{2} \cos \frac{x + \Delta x + x}{2} = \\&= 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \\&= |\text{бесконечно малая} \cdot \text{ограниченная}| = \\&= |\text{бесконечно малая}| = 0\end{aligned}$$



Свойства функций, непрерывных в точке

Доказательство для $y = \sin x$

$$\begin{aligned}\Delta f &= f(x + \Delta x) - f(x) = \sin(x + \Delta x) - \sin x = \\&= 2 \sin \frac{x + \Delta x - x}{2} \cos \frac{x + \Delta x + x}{2} = \\&= 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \\&= |\text{бесконечно малая} \cdot \text{ограниченная}| = \\&= |\text{бесконечно малая}| = 0 \\&\Rightarrow \sin x \in C(x). \blacksquare\end{aligned}$$



Теорема (непрерывность элементарной функции)



Теорема (непрерывность элементарной функции)

Любая элементарная функция непрерывна в любой точке области ее определения.

