

Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана
Факультет “Фундаментальные науки”
Кафедра “Высшая математика”

Математический анализ

Модуль 2

Пределы и непрерывность
функций одной переменной

Лекция 2.3

для ГУИМЦ, 2026

к.ф.-м.н. Семакин А.Н.

Сравнение функций



Сравнение функций

Пусть $\mathring{U}(a)$ – некоторая проколота окрестность точки a .



Сравнение функций

Пусть $\mathring{U}(a)$ – некоторая проколота окрестность точки a .

Определение

Функция $f(x)$ называется **ограниченной по сравнению** с функцией $g(x)$ в $\mathring{U}(a)$, если $\exists c > 0 \forall x \in \mathring{U}(a): |f(x)| \leq c \cdot |g(x)|$.



Сравнение функций

Пусть $\mathring{U}(a)$ – некоторая проколота окрестность точки a .

Определение

Функция $f(x)$ называется **ограниченной по сравнению** с функцией $g(x)$ в $\mathring{U}(a)$, если

$$\exists c > 0 \forall x \in \mathring{U}(a): |f(x)| \leq c \cdot |g(x)|.$$

Обозначение: $f(x) = O(g(x)), x \rightarrow a$.



Сравнение функций

Пусть $\overset{\circ}{U}(a)$ – некоторая проколота окрестность точки a .

Определение

Функция $f(x)$ называется **ограниченной по сравнению** с функцией $g(x)$ в $\overset{\circ}{U}(a)$, если

$$\exists c > 0 \forall x \in \overset{\circ}{U}(a): |f(x)| \leq c \cdot |g(x)|.$$

Обозначение: $f(x) = O(g(x)), x \rightarrow a$.

Произношение: f – это “О”-большое от g при $x \rightarrow a$.



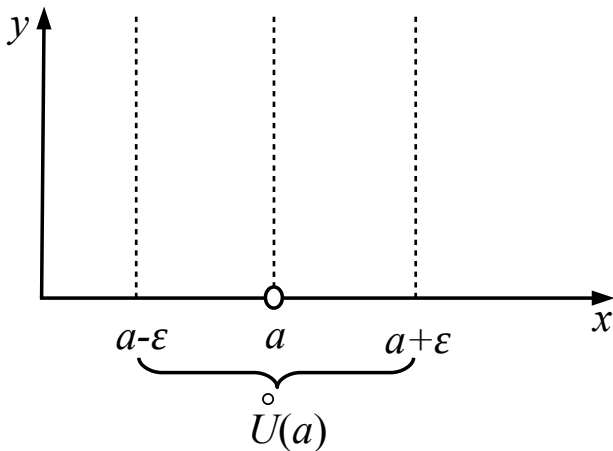
Сравнение функций

Пример:



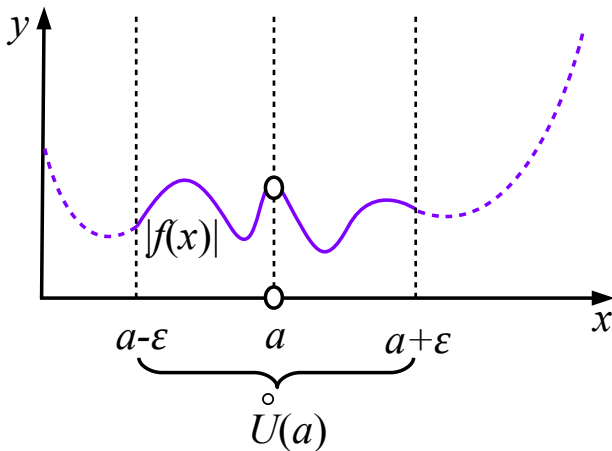
Сравнение функций

Пример:



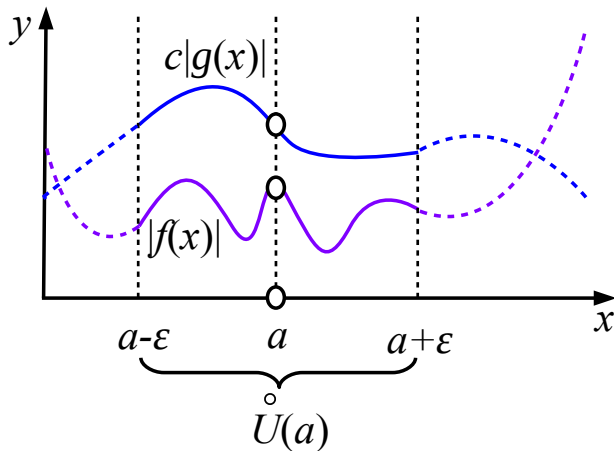
Сравнение функций

Пример:



Сравнение функций

Пример:



Определение

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ таковы, что $f(x) = O(g(x))$ и $g(x) = O(f(x))$ при $x \rightarrow a$, то они называются **функциями одного порядка** при $x \rightarrow a$.



Сравнение функций

Определение

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ таковы, что $f(x) = O(g(x))$ и $g(x) = O(f(x))$ при $x \rightarrow a$, то они называются **функциями одного порядка** при $x \rightarrow a$.

Обозначение: $f(x) \asymp g(x), x \rightarrow a$.



Сравнение функций

Определение

Пусть $\forall x \in \overset{\circ}{U}(a)$ $f(x) \neq 0$ и $g(x) \neq 0$. Тогда функции $f(x)$ и $g(x)$ называются

эквивалентными при $x \rightarrow a$, если

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$



Сравнение функций

Определение

Пусть $\forall x \in \overset{\circ}{U}(a)$ $f(x) \neq 0$ и $g(x) \neq 0$. Тогда функции $f(x)$ и $g(x)$ называются

эквивалентными при $x \rightarrow a$, если

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Обозначение: $f(x) \sim g(x), x \rightarrow a$.



Свойства эквивалентных функций



Сравнение функций

Свойства эквивалентных функций

1) если $f(x) \sim g(x), x \rightarrow a$, то

$$g(x) \sim f(x), x \rightarrow a,$$



Сравнение функций

Свойства эквивалентных функций

1) если $f(x) \sim g(x), x \rightarrow a$, то

$$g(x) \sim f(x), x \rightarrow a,$$

2) если $f(x) \sim g(x), g(x) \sim h(x), x \rightarrow a$, то

$$f(x) \sim h(x), x \rightarrow a.$$



Сравнение функций

Определение

Пусть $\forall x \in \overset{\circ}{U}(a) \ f(x) \neq 0$. Тогда функция $g(x)$ называется **бесконечно малой по сравнению** с функцией $f(x)$ при $x \rightarrow a$, если

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)} = 0.$$



Сравнение функций

Определение

Пусть $\forall x \in \overset{\circ}{U}(a) \ f(x) \neq 0$. Тогда функция $g(x)$ называется **бесконечно малой по сравнению** с функцией $f(x)$ при $x \rightarrow a$, если

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)} = 0.$$

Обозначение: $g(x) = o(f(x)), x \rightarrow a$.



Сравнение функций

Определение

Пусть $\forall x \in \overset{\circ}{U}(a) \ f(x) \neq 0$. Тогда функция $g(x)$ называется **бесконечно малой по сравнению** с функцией $f(x)$ при $x \rightarrow a$, если

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)} = 0.$$

Обозначение: $g(x) = o(f(x)), x \rightarrow a$.

Произношение: g – это “о”-малое от f при $x \rightarrow a$.



Сравнение функций

Определение

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ – бесконечно малые функции при $x \rightarrow a$ и $g(x) = o(f(x))$, $x \rightarrow a$. Тогда говорят, что $g(x)$ является **бесконечно малой более высокого порядка**, чем $f(x)$.



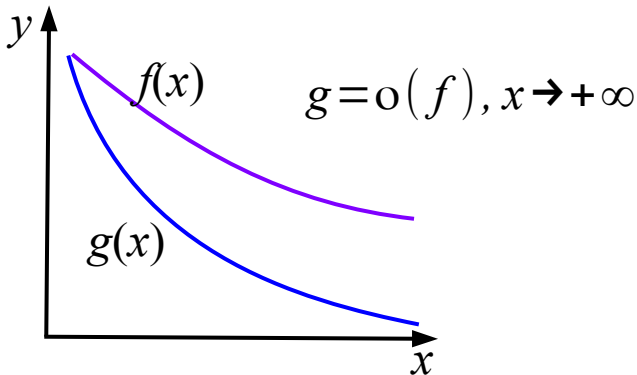
Сравнение функций

Пример:



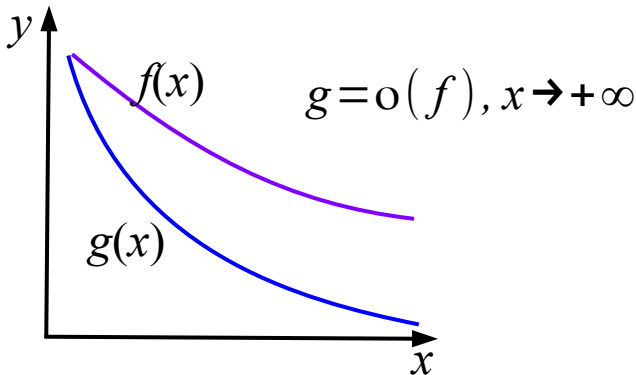
Сравнение функций

Пример:



Сравнение функций

Пример:



Здесь обе функции $f(x)$ и $g(x)$ стремятся к нулю при $x \rightarrow +\infty$, только функция $g(x)$ убывает быстрее, чем функция $f(x)$.



Сравнение функций

Определение

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ – бесконечно малые функции при $x \rightarrow a$ и $g(x) = o(f(x))$, $x \rightarrow a$.

Тогда функция $g(x)$ называется **бесконечно малой порядка r относительно** функции $f(x)$, если существует не равный нулю конечный предел

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{(f(x))^r}.$$



Свойства “о”-малое



Свойства “о”-малое

$$1) \circ(f) + \circ(f) = \circ(f),$$



Свойства “о”-малое

$$1) \circ(f) + \circ(f) = \circ(f),$$

$$2) \circ(cf) = \circ(f), c \neq 0,$$



Свойства “о”-малое

$$1) \circ(f) + \circ(f) = \circ(f),$$

$$2) \circ(cf) = \circ(f), c \neq 0,$$

$$3) c \cdot \circ(f) = \circ(f), c \neq 0,$$



Свойства “о”-малое

- 1) $\circ(f) + \circ(f) = \circ(f)$,
- 2) $\circ(cf) = \circ(f)$, $c \neq 0$,
- 3) $c \cdot \circ(f) = \circ(f)$, $c \neq 0$,
- 4) $\circ(\circ(f)) = \circ(f)$.



Теорема (о связи эквивалентности и
“о”-малое)*



Сравнение функций

Теорема (о связи эквивалентности и
“о”-малое)*

Для того чтобы функции $f(x)$ и $g(x)$ были эквивалентны при $x \rightarrow a$, необходимо и достаточно, чтобы

$$f(x) = g(x) + o(g(x)), x \rightarrow a.$$



Замечание



Замечание

Фраза "необходимо и достаточно" в формулировке теоремы означает, что данная теорема определяет условие, которое одновременно является и необходимым, и достаточным.



Замечание

Фраза "необходимо и достаточно" в формулировке теоремы означает, что данная теорема определяет условие, которое одновременно является и необходимым, и достаточным. Чтобы доказать теорему, нужно доказать отдельно необходимость данного условия и отдельно его достаточность.



Сравнение функций

Введем обозначения:



Сравнение функций

Введем обозначения:

Утверждение A



Сравнение функций

Введем обозначения:

Утверждение A – "функции $f(x)$ и $g(x)$
эквивалентны при $x \rightarrow a$ ".



Сравнение функций

Введем обозначения:

Утверждение A – "функции $f(x)$ и $g(x)$
эквивалентны при $x \rightarrow a$ ".

Условие B



Сравнение функций

Введем обозначения:

Утверждение A – "функции $f(x)$ и $g(x)$
эквивалентны при $x \rightarrow a$ ".

Условие B – " $f(x) = g(x) + o(g(x)), x \rightarrow a$ ".



Сравнение функций

Введем обозначения:

Утверждение A – "функции $f(x)$ и $g(x)$
эквивалентны при $x \rightarrow a$ ".

Условие B – " $f(x) = g(x) + o(g(x)), x \rightarrow a$ ".

Тогда наша теорема переписется в виде:



Сравнение функций

Введем обозначения:

Утверждение A – "функции $f(x)$ и $g(x)$
эквивалентны при $x \rightarrow a$ ".

Условие B – " $f(x) = g(x) + o(g(x)), x \rightarrow a$ ".

Тогда наша теорема переписется в виде:

Для истинности **утверждения** A необходима и достаточна истинность **условия** B .



Сравнение функций

Необходимость условия B означает, что утверждение A не может быть истинным, если условие B ложно.



Сравнение функций

Необходимость условия B означает, что утверждение A не может быть истинным, если условие B ложно. Соответственно, если утверждение A истинно, то условие B также должно быть истинным.



Сравнение функций

Необходимость условия B означает, что утверждение A не может быть истинным, если условие B ложно. Соответственно, если утверждение A истинно, то условие B также должно быть истинным.

Достаточность условия B означает, что, если условие B истинно, то утверждение A также истинно.



Таким образом,



Сравнение функций

Таким образом, фраза "необходимо и достаточно" означает, что из истинности утверждения A следует истинность условия B



Сравнение функций

Таким образом, фраза "необходимо и достаточно" означает, что из истинности утверждения A следует истинность условия B (читаем исходную теорему слева направо),



Сравнение функций

Таким образом, фраза "необходимо и достаточно" означает, что из истинности утверждения A следует истинность условия B (читаем исходную теорему слева направо), а из истинности условия B следует истинность утверждения A



Сравнение функций

Таким образом, фраза "необходимо и достаточно" означает, что из истинности утверждения A следует истинность условия B (читаем исходную теорему слева направо), а из истинности условия B следует истинность утверждения A (читаем теорему справа налево).



Доказательство теоремы



Доказательство теоремы

1. Необходимость.



Доказательство теоремы

1. Необходимость.

Дано: $f(x) \sim g(x), x \rightarrow a$



Сравнение функций

Доказательство теоремы

1. Необходимость.

Дано: $f(x) \sim g(x)$, $x \rightarrow a$ (утверждение A).



Сравнение функций

Доказательство теоремы

1. Необходимость.

Дано: $f(x) \sim g(x), x \rightarrow a$ (утверждение A).

Доказать: $f(x) = g(x) + o(g(x)), x \rightarrow a$



Сравнение функций

Доказательство теоремы

1. Необходимость.

Дано: $f(x) \sim g(x), x \rightarrow a$ (утверждение A).

Доказать: $f(x) = g(x) + o(g(x)), x \rightarrow a$
(условие B).



Сравнение функций

Введем функцию $\varphi(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.



Сравнение функций

Введем функцию $\varphi(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.

Так как $f(x) \sim g(x), x \rightarrow a$, то



Сравнение функций

Введем функцию $\varphi(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.

Так как $f(x) \sim g(x), x \rightarrow a$, то

$$\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x)$$



Сравнение функций

Введем функцию $\varphi(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.

Так как $f(x) \sim g(x), x \rightarrow a$, то

$$\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$$



Сравнение функций

Введем функцию $\varphi(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.

Так как $f(x) \sim g(x), x \rightarrow a$, то

$$\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$



Сравнение функций

Введем функцию $\varphi(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.

Так как $f(x) \sim g(x), x \rightarrow a$, то

$$\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Далее,

$$f(x) - g(x)$$



Сравнение функций

Введем функцию $\varphi(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.

Так как $f(x) \sim g(x), x \rightarrow a$, то

$$\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Далее,

$$f(x) - g(x) = \varphi(x)g(x) - g(x)$$



Сравнение функций

Введем функцию $\varphi(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.

Так как $f(x) \sim g(x), x \rightarrow a$, то

$$\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Далее,

$$f(x) - g(x) = \varphi(x)g(x) - g(x) = (\varphi(x) - 1)g(x).$$



Сравнение функций

Откуда,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - g(x)}{g(x)}$$



Сравнение функций

Откуда,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - g(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(\varphi(x) - 1)g(x)}{g(x)}$$



Сравнение функций

Откуда,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - g(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(\varphi(x) - 1)g(x)}{g(x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} (\varphi(x) - 1)\end{aligned}$$



Сравнение функций

Откуда,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - g(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(\varphi(x) - 1)g(x)}{g(x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} (\varphi(x) - 1) = 1 - 1 = 0.\end{aligned}$$



Сравнение функций

Откуда,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - g(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(\varphi(x) - 1)g(x)}{g(x)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} (\varphi(x) - 1) = 1 - 1 = 0.$$



$$f(x) - g(x) = o(g(x)), x \rightarrow a$$



Сравнение функций

Откуда,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - g(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(\varphi(x) - 1)g(x)}{g(x)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} (\varphi(x) - 1) = 1 - 1 = 0.$$



$$f(x) - g(x) = o(g(x)), x \rightarrow a$$

и

$$f(x) = g(x) + o(g(x)), x \rightarrow a.$$



2. Достаточность.



2. *Достаточность.*

Дано: $f(x) = g(x) + o(g(x)), x \rightarrow a$



Сравнение функций

2. Достаточность.

Дано: $f(x) = g(x) + o(g(x)), x \rightarrow a$
(условие B).



Сравнение функций

2. Достаточность.

Дано: $f(x) = g(x) + o(g(x)), x \rightarrow a$
(условие B).

Доказать: $f(x) \sim g(x), x \rightarrow a$



Сравнение функций

2. Достаточность.

Дано: $f(x) = g(x) + o(g(x)), x \rightarrow a$
(условие B).

Доказать: $f(x) \sim g(x), x \rightarrow a$
(утверждение A).



Сравнение функций

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$$



Сравнение функций

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) + o(g(x))}{g(x)}$$



Сравнение функций

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) + o(g(x))}{g(x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \left(1 + \frac{o(g(x))}{g(x)}\right)\end{aligned}$$



Сравнение функций

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) + o(g(x))}{g(x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \left(1 + \frac{o(g(x))}{g(x)}\right) = 1 + \lim_{x \rightarrow a} \frac{o(g(x))}{g(x)}\end{aligned}$$



Сравнение функций

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) + o(g(x))}{g(x)} = \\&= \lim_{x \rightarrow a} \left(1 + \frac{o(g(x))}{g(x)}\right) = 1 + \lim_{x \rightarrow a} \frac{o(g(x))}{g(x)} = \\&= 1 + 0 = 1.\end{aligned}$$



Сравнение функций

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) + o(g(x))}{g(x)} = \\&= \lim_{x \rightarrow a} \left(1 + \frac{o(g(x))}{g(x)}\right) = 1 + \lim_{x \rightarrow a} \frac{o(g(x))}{g(x)} = \\&= 1 + 0 = 1. \\&\Rightarrow f(x) \sim g(x), x \rightarrow a. \blacksquare\end{aligned}$$



Определение

Если функция $f(x)$ представима в виде

$$f(x) = g(x) + o(g(x)), x \rightarrow a,$$

то функция $g(x)$ называется **главной частью** функции $f(x)$.



Сравнение функций

Теорема (о пределах эквивалентных функций)*



Сравнение функций

Теорема (о пределах эквивалентных функций)*

Пусть $f(x) \sim f_1(x)$ и $g(x) \sim g_1(x)$ при $x \rightarrow a$.
Тогда если существует $\lim_{x \rightarrow a} f_1(x)/g_1(x)$, то
существует и $\lim_{x \rightarrow a} f(x)/g(x)$, причем

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}.$$



Доказательство



Сравнение функций

Доказательство

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f}{g}$$



Сравнение функций

Доказательство

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f}{g} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f \cdot f_1 \cdot g_1}{f_1 \cdot g_1 \cdot g}$$



Сравнение функций

Доказательство

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} \frac{f}{g} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f \cdot f_1 \cdot g_1}{f_1 \cdot g_1 \cdot g} = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f}{f_1} \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{f_1}{g_1} \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{g_1}{g}\end{aligned}$$



Сравнение функций

Доказательство

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} \frac{f}{g} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f \cdot f_1 \cdot g_1}{f_1 \cdot g_1 \cdot g} = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f}{f_1} \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{f_1}{g_1} \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{g_1}{g} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f}{g_1}. \blacksquare\end{aligned}$$



Сравнение функций

Для применения этой теоремы необходимо знать таблицу эквивалентных функций.



Сравнение функций

Таблица эквивалентных бесконечно малых функций



Таблица эквивалентных бесконечно малых функций

1) $\sin x \sim x, x \rightarrow 0$

2) $\operatorname{tg} x \sim x, x \rightarrow 0$



Таблица эквивалентных бесконечно малых функций

1) $\sin x \sim x, x \rightarrow 0$

2) $\operatorname{tg} x \sim x, x \rightarrow 0$

3) $\arcsin x \sim x, x \rightarrow 0$

4) $\operatorname{arctg} x \sim x, x \rightarrow 0$



Сравнение функций

Таблица эквивалентных бесконечно малых функций

1) $\sin x \sim x, x \rightarrow 0$

2) $\operatorname{tg} x \sim x, x \rightarrow 0$

3) $\arcsin x \sim x, x \rightarrow 0$

4) $\operatorname{arctg} x \sim x, x \rightarrow 0$

5) $1 - \cos x \sim x^2/2, x \rightarrow 0$



Сравнение функций

Таблица эквивалентных бесконечно малых функций

$$6) \ln(1 + x) \sim x, x \rightarrow 0$$



Таблица эквивалентных бесконечно малых функций

$$6) \ln(1 + x) \sim x, x \rightarrow 0$$

$$7) a^x - 1 \sim x \ln a, x \rightarrow 0$$

$$8) e^x - 1 \sim x, x \rightarrow 0$$



Таблица эквивалентных бесконечно малых функций

$$6) \ln(1 + x) \sim x, x \rightarrow 0$$

$$7) a^x - 1 \sim x \ln a, x \rightarrow 0$$

$$8) e^x - 1 \sim x, x \rightarrow 0$$

$$9) (1 + x)^m - 1 \sim mx, x \rightarrow 0$$



Сравнение функций

Используя теорему о замене переменной можно показать, что в данной таблице отношение эквивалентности сохранится, если переменную x заменить на какую-либо функцию u при условии, что $u \rightarrow 0$.



Сравнение функций

Примеры:



Сравнение функций

Примеры:

$$1) \sin u \sim u, u \rightarrow 0$$

$$2) \operatorname{tg} u \sim u, u \rightarrow 0$$

$$3) e^u - 1 \sim u, u \rightarrow 0$$



Сравнение функций

Примеры:

$$1) \sin u \sim u, u \rightarrow 0$$

$$2) \operatorname{tg} u \sim u, u \rightarrow 0$$

$$3) e^u - 1 \sim u, u \rightarrow 0$$

Здесь $u = u(x)$ – некоторая функция, которая должна стремиться к нулю: $u \rightarrow 0$.

