

Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана
Факультет “Фундаментальные науки”
Кафедра “Высшая математика”

Математический анализ

Модуль 2

Пределы и непрерывность
функций одной переменной

Лекция 2.2

для ГУИМЦ, 2026

к.ф.-м.н. Семакин А.Н.

Общие свойства пределов



Общие свойства пределов

*Теорема (локальная ограниченность функции)**



Общие свойства пределов

*Теорема (локальная ограниченность функции)**

Если функция $f(x)$ имеет в точке a конечный предел, то существует такая проколота окрестность точки a , в которой функция $f(x)$ ограничена.



Общие свойства пределов

Доказательство



Общие свойства пределов

Доказательство

Пусть $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, где b - конечное число.



Общие свойства пределов

Доказательство

Пусть $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, где b - конечное число.

Тогда по определению предела в терминах окрестностей



Общие свойства пределов

Доказательство

Пусть $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, где b - конечное число.

Тогда по определению предела в терминах окрестностей

$$\forall U(b, \varepsilon) \exists \overset{\circ}{U}(a, \delta) \forall x \in \overset{\circ}{U}(a, \delta): f(x) \in U(b, \varepsilon).$$



Общие свойства пределов

Доказательство

Пусть $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, где b - конечное число.

Тогда по определению предела в терминах окрестностей

$$\forall U(b, \varepsilon) \exists \overset{\circ}{U}(a, \delta) \forall x \in \overset{\circ}{U}(a, \delta): f(x) \in U(b, \varepsilon).$$

Поскольку b - конечное число, то

$$U(b, \varepsilon) = (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$$



Общие свойства пределов

Доказательство

Пусть $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, где b - конечное число.

Тогда по определению предела в терминах окрестностей

$$\forall U(b, \varepsilon) \exists \overset{\circ}{U}(a, \delta) \forall x \in \overset{\circ}{U}(a, \delta): f(x) \in U(b, \varepsilon).$$

Поскольку b - конечное число, то

$$U(b, \varepsilon) = (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$$

и

$$f(x) \in U(b, \varepsilon) \Leftrightarrow f(x) \in (b - \varepsilon, b + \varepsilon),$$



Общие свойства пределов

Доказательство

Пусть $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, где b - конечное число.

Тогда по определению предела в терминах окрестностей

$$\forall U(b, \varepsilon) \exists \overset{\circ}{U}(a, \delta) \forall x \in \overset{\circ}{U}(a, \delta): f(x) \in U(b, \varepsilon).$$

Поскольку b - конечное число, то

$$U(b, \varepsilon) = (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$$

и

$$f(x) \in U(b, \varepsilon) \Leftrightarrow f(x) \in (b - \varepsilon, b + \varepsilon),$$
$$\forall U(b, \varepsilon) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0.$$



Общие свойства пределов

Соответственно, рассмотренное выше определение предела можно переписать в виде:



Общие свойства пределов

Соответственно, рассмотренное выше определение предела можно переписать в виде:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \overset{\circ}{U}(a, \delta) \forall x \in \overset{\circ}{U}(a, \delta): \\ f(x) \in (b - \varepsilon, b + \varepsilon).$$



Общие свойства пределов

Соответственно, рассмотренное выше определение предела можно переписать в виде:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \overset{\circ}{U}(a, \delta) \forall x \in \overset{\circ}{U}(a, \delta): \\ f(x) \in (b - \varepsilon, b + \varepsilon).$$

Положим $\varepsilon = 1$.



Общие свойства пределов

Соответственно, рассмотренное выше определение предела можно переписать в виде:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \overset{\circ}{U}(a, \delta) \forall x \in \overset{\circ}{U}(a, \delta): \\ f(x) \in (b - \varepsilon, b + \varepsilon).$$

Положим $\varepsilon = 1$. Тогда

$$\exists \overset{\circ}{U}(a, \delta_1) \forall x \in \overset{\circ}{U}(a, \delta_1): f(x) \in (b - 1, b + 1),$$



Общие свойства пределов

Соответственно, рассмотренное выше определение предела можно переписать в виде:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \overset{\circ}{U}(a, \delta) \forall x \in \overset{\circ}{U}(a, \delta): \\ f(x) \in (b - \varepsilon, b + \varepsilon).$$

Положим $\varepsilon = 1$. Тогда

$\exists \overset{\circ}{U}(a, \delta_1) \forall x \in \overset{\circ}{U}(a, \delta_1): f(x) \in (b - 1, b + 1)$,
где δ_1 - значение δ , соответствующее
выбранному значению $\varepsilon = 1$.



Общие свойства пределов

Мы получили, что у точки a имеется проколота окрестность, в которой значения функции $f(x)$ заключены между числами $b - 1$ (нижняя граница) и $b + 1$ (верхняя граница).



Общие свойства пределов

Мы получили, что у точки a имеется проколота окрестность, в которой значения функции $f(x)$ заключены между числами $b - 1$ (нижняя граница) и $b + 1$ (верхняя граница). Это означает ограниченность функции в некоторой проколоте окрестности точки a . ■



Теорема (локальная знакоопределенность функции)*



Теорема (локальная знакоопределенность функции)*

Если в точке a функция $f(x)$ имеет не равный нулю конечный предел, то в некоторой проколотой окрестности точки a функция имеет **тот же знак**, что и сам предел.



Общие свойства пределов

Доказательство



Общие свойства пределов

Доказательство

Пусть $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, b - конечное число, $b > 0$.



Общие свойства пределов

Доказательство

Пусть $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, b - конечное число, $b > 0$.

Ранее было показано, что для конечного числа b определение предела можно записать в виде

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \overset{\circ}{U}(a, \delta) \forall x \in \overset{\circ}{U}(a, \delta): \\ f(x) \in (b - \varepsilon, b + \varepsilon).$$



Общие свойства пределов

Доказательство

Пусть $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, b - конечное число, $b > 0$.

Ранее было показано, что для конечного числа b определение предела можно записать в виде

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \overset{\circ}{U}(a, \delta) \forall x \in \overset{\circ}{U}(a, \delta): \\ f(x) \in (b - \varepsilon, b + \varepsilon).$$

Положим $\varepsilon = b$.



Общие свойства пределов

Доказательство

Пусть $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, b - конечное число, $b > 0$.

Ранее было показано, что для конечного числа b определение предела можно записать в виде

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \overset{\circ}{U}(a, \delta) \forall x \in \overset{\circ}{U}(a, \delta): f(x) \in (b - \varepsilon, b + \varepsilon).$$

Положим $\varepsilon = b$. Тогда

$$\exists \overset{\circ}{U}(a, \delta_b) \forall x \in \overset{\circ}{U}(a, \delta_b): f(x) \in (0, 2b),$$



Общие свойства пределов

Доказательство

Пусть $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, b - конечное число, $b > 0$.

Ранее было показано, что для конечного числа b определение предела можно записать в виде

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \overset{\circ}{U}(a, \delta) \forall x \in \overset{\circ}{U}(a, \delta): f(x) \in (b - \varepsilon, b + \varepsilon).$$

Положим $\varepsilon = b$. Тогда

$$\exists \overset{\circ}{U}(a, \delta_b) \forall x \in \overset{\circ}{U}(a, \delta_b): f(x) \in (0, 2b),$$

где δ_b - значение δ , соответствующее выбранному значению $\varepsilon = b$.



Общие свойства пределов

Мы получили, что в некоторой проколотой окрестности точки a функция $f(x)$ положительна, т.е. ее знак совпадает со знаком числа b .



Общие свойства пределов

Мы получили, что в некоторой проколотой окрестности точки a функция $f(x)$ положительна, т.е. ее знак совпадает со знаком числа b .

Случай $b < 0$ доказывается аналогично. ■



Общие свойства пределов

Теорема (1-ая теорема о предельном переходе в неравенстве)



Общие свойства пределов

Теорема (1-ая теорема о предельном переходе в неравенстве)

Если $f(x) \geq A$ в некоторой проколотой окрестности точки a и имеет в этой точке конечный или бесконечный определенный знака предел, то

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \geq A.$$



Общие свойства пределов

Теорема (2-ая теорема о предельном переходе в неравенстве)



Общие свойства пределов

Теорема (2-ая теорема о предельном переходе в неравенстве)

Если $\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x)$ в некоторой
проколотой окрестности точки a и

$$\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow a} \psi(x) = A,$$

где A – конечное число или бесконечность
определенного знака, то

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A.$$



Теорема (единственность предела)



Общие свойства пределов

Теорема (единственность предела)

Если функция $f(x)$ имеет в точке a конечный предел, то этот предел **единственный**.



Общие свойства пределов

Теорема (предел сложной функции и замена переменной)



Общие свойства пределов

Теорема (предел сложной функции и замена переменной)

Пусть существуют конечные или бесконечные пределы $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ и $\lim_{y \rightarrow b} g(y)$,



Теорема (предел сложной функции и замена переменной)

Пусть существуют конечные или бесконечные пределы $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ и $\lim_{y \rightarrow b} g(y)$, и пусть в некоторой проколотой окрестности точки a имеет место $f(x) \neq b$.



Общие свойства пределов

Теорема (предел сложной функции и замена переменной)

Пусть существуют конечные или бесконечные пределы $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ и $\lim_{y \rightarrow b} g(y)$, и пусть в некоторой проколотой окрестности точки a имеет место $f(x) \neq b$. Тогда в точке a существует предел сложной функции $g(f(x))$



Общие свойства пределов

Теорема (предел сложной функции и замена переменной)

Пусть существуют конечные или бесконечные пределы $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ и $\lim_{y \rightarrow b} g(y)$, и пусть в некоторой проколотой окрестности точки a имеет место $f(x) \neq b$. Тогда в точке a существует предел сложной функции $g(f(x))$ и $\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = \lim_{y \rightarrow b} g(y)$.



Замечательные пределы



Замечательные пределы

Первый замечательный предел:



Замечательные пределы

Первый замечательный предел:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = 1$$



Замечательные пределы

Первый замечательный предел:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = 1$$

Здесь u – произвольная функция, которая обладает свойством: $u \rightarrow 0$.



Замечательные пределы

Примеры:



Замечательные пределы

Примеры:

1) $u = 5x \rightarrow 0$ при $x \rightarrow 0$



Замечательные пределы

Примеры:

$$1) u = 5x \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x} = 1,$$



Замечательные пределы

Примеры:

$$1) u = 5x \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x} = 1,$$

$$2) u = 2x - 2 \rightarrow -2 \text{ при } x \rightarrow 0$$



Замечательные пределы

Примеры:

$$1) u = 5x \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x} = 1,$$

$$2) u = 2x - 2 \rightarrow -2 \text{ при } x \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x - 2)}{2x - 2} \neq 1.$$



Следствия:



Замечательные пределы

Следствия:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$$

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} u}{u} = 1$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$$

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\arcsin u}{u} = 1$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$$

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} u}{u} = 1$$



Второй замечательный предел:



Замечательные пределы

Второй замечательный предел:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{1/x} = e$$

$$\lim_{u \rightarrow 0} (1 + u)^{1/u} = e$$



Замечательные пределы

Второй замечательный предел:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{1/x} = e$$

$$\lim_{u \rightarrow 0} (1 + u)^{1/u} = e$$

Здесь u – произвольная функция, которая обладает свойством: $u \rightarrow 0$.



Замечательные пределы

Примеры:



Замечательные пределы

Примеры:

1) $u = 3x \rightarrow 0$ при $x \rightarrow 0$



Примеры:

$$1) u = 3x \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow 0$$
$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x)^{1/3x} = e,$$



Замечательные пределы

Примеры:

$$1) u = 3x \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x)^{1/3x} = e,$$

$$2) u = 4x - 1 \rightarrow -1 \text{ при } x \rightarrow 0$$



Замечательные пределы

Примеры:

$$1) u = 3x \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x)^{1/3x} = e,$$

$$2) u = 4x - 1 \rightarrow -1 \text{ при } x \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} (1 + (4x - 1))^{1/(4x-1)} \neq e.$$



Замечательные пределы

Следствия:



Замечательные пределы

Следствия:

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{u}\right)^u = e$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\ln(1+u)}{u} = 1$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$$

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{a^u - 1}{u} = \ln a$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{e^u - 1}{u} = 1$$



Бесконечно малые функции



Бесконечно малые функции

Определение

Функция $\alpha(x)$ называется **бесконечно малой** при $x \rightarrow a$, если $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$.



Бесконечно малые функции

Теорема (о связи функции, ее предела и
бесконечно малой)*



Бесконечно малые функции

Теорема (о связи функции, ее предела и
бесконечно малой)*

Конечный предел функции $f(x)$ при $x \rightarrow a$ существует и равен b тогда и только тогда, когда $f(x) = b + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ – бесконечно малая при $x \rightarrow a$.



Замечание



Замечание

Фраза "тогда и только тогда, когда" в формулировке теоремы означает, что данная теорема является составной и состоит из двух простых теорем – прямой и обратной.



Бесконечно малые функции

Прямая теорема читается слева направо:



Бесконечно малые функции

Прямая теорема читается слева направо:
Если конечный предел функции $f(x)$ при $x \rightarrow a$ существует и равен b , то $f(x) = b + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ - бесконечно малая при $x \rightarrow a$.



Обратная теорема читается справа налево:



Бесконечно малые функции

Обратная теорема читается справа налево:
Если $f(x) = b + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ – бесконечно малая при $x \rightarrow a$, то конечный предел функции $f(x)$ при $x \rightarrow a$ существует и равен b .



Бесконечно малые функции

Чтобы доказать исходную составную теорему, нужно доказать каждую из составляющих ее простых теорем.



Доказательство теоремы



Доказательство теоремы

1. Прямая теорема.



Доказательство теоремы

1. Прямая теорема.

Дано: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, b - конечное число.



Бесконечно малые функции

Доказательство теоремы

1. Прямая теорема.

Дано: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, b - конечное число.

Доказать: $f(x) = b + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ -
бесконечно малая при $x \rightarrow a$.



Бесконечно малые функции

Пусть $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$.



Бесконечно малые функции

Пусть $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$.

Зададим функцию $\alpha(x) = f(x) - b$



Бесконечно малые функции

Пусть $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$.

Зададим функцию $\alpha(x) = f(x) - b$ и рассмотрим ее предел:



Бесконечно малые функции

Пусть $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$.

Зададим функцию $\alpha(x) = f(x) - b$ и рассмотрим ее предел:

$$\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x)$$



Бесконечно малые функции

Пусть $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$.

Зададим функцию $\alpha(x) = f(x) - b$ и рассмотрим ее предел:

$$\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = \lim_{x \rightarrow a} (f(x) - b)$$



Бесконечно малые функции

Пусть $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$.

Зададим функцию $\alpha(x) = f(x) - b$ и рассмотрим ее предел:

$$\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = \lim_{x \rightarrow a} (f(x) - b) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} b$$



Бесконечно малые функции

Пусть $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$.

Зададим функцию $\alpha(x) = f(x) - b$ и рассмотрим ее предел:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) &= \lim_{x \rightarrow a} (f(x) - b) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} b = \\ &= b - b\end{aligned}$$



Бесконечно малые функции

Пусть $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$.

Зададим функцию $\alpha(x) = f(x) - b$ и рассмотрим ее предел:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) &= \lim_{x \rightarrow a} (f(x) - b) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} b = \\ &= b - b = 0.\end{aligned}$$



Бесконечно малые функции

Пусть $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$.

Зададим функцию $\alpha(x) = f(x) - b$ и рассмотрим ее предел:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) &= \lim_{x \rightarrow a} (f(x) - b) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} b = \\ &= b - b = 0.\end{aligned}$$

Получаем, что $\alpha(x)$ - это бесконечно малая при $x \rightarrow a$.



Бесконечно малые функции

Пусть $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$.

Зададим функцию $\alpha(x) = f(x) - b$ и рассмотрим ее предел:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) &= \lim_{x \rightarrow a} (f(x) - b) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} b = \\ &= b - b = 0.\end{aligned}$$

Получаем, что $\alpha(x)$ - это бесконечно малая при $x \rightarrow a$.

Т.к. $\alpha(x) = f(x) - b$,



Бесконечно малые функции

Пусть $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$.

Зададим функцию $\alpha(x) = f(x) - b$ и рассмотрим ее предел:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) &= \lim_{x \rightarrow a} (f(x) - b) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} b = \\ &= b - b = 0.\end{aligned}$$

Получаем, что $\alpha(x)$ - это бесконечно малая при $x \rightarrow a$.

Т.к. $\alpha(x) = f(x) - b$, то $f(x) = b + \alpha(x)$.



2. Обратная теорема.



2. Обратная теорема.

Дано: $f(x) = b + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ -
бесконечно малая при $x \rightarrow a$.



2. Обратная теорема.

Дано: $f(x) = b + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ -
бесконечно малая при $x \rightarrow a$.

Доказать: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, b - конечное число.



Бесконечно малые функции

Пусть $f(x) = b + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ - бесконечно малая при $x \rightarrow a$.



Бесконечно малые функции

Пусть $f(x) = b + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ - бесконечно малая при $x \rightarrow a$.

Тогда $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$



Бесконечно малые функции

Пусть $f(x) = b + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ - бесконечно малая при $x \rightarrow a$.

$$\text{Тогда } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} (b + \alpha(x))$$



Бесконечно малые функции

Пусть $f(x) = b + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ - бесконечно малая при $x \rightarrow a$.

$$\begin{aligned}\text{Тогда } \lim_{x \rightarrow a} f(x) &= \lim_{x \rightarrow a} (b + \alpha(x)) = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} b + \lim_{x \rightarrow a} \alpha(x)\end{aligned}$$



Бесконечно малые функции

Пусть $f(x) = b + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ - бесконечно малая при $x \rightarrow a$.

$$\begin{aligned}\text{Тогда } \lim_{x \rightarrow a} f(x) &= \lim_{x \rightarrow a} (b + \alpha(x)) = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} b + \lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = b + 0\end{aligned}$$



Бесконечно малые функции

Пусть $f(x) = b + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ - бесконечно малая при $x \rightarrow a$.

$$\begin{aligned} \text{Тогда } \lim_{x \rightarrow a} f(x) &= \lim_{x \rightarrow a} (b + \alpha(x)) = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} b + \lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = b + 0 = b. \blacksquare \end{aligned}$$



Бесконечно малые функции

Свойства бесконечно малых функций*



Бесконечно малые функции

Свойства бесконечно малых функций*

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – бесконечно малые при $x \rightarrow a$, а $\gamma(x)$ – ограниченная функция. Тогда



Свойства бесконечно малых функций*

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – бесконечно малые при $x \rightarrow a$, а $\gamma(x)$ – ограниченная функция. Тогда
1) $\alpha(x) + \beta(x)$ – бесконечно малая при $x \rightarrow a$



Свойства бесконечно малых функций*

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – бесконечно малые при $x \rightarrow a$, а $\gamma(x)$ – ограниченная функция. Тогда

- 1) $\alpha(x) + \beta(x)$ – бесконечно малая при $x \rightarrow a$
- 2) $\alpha(x) \cdot \beta(x)$ – бесконечно малая при $x \rightarrow a$



Свойства бесконечно малых функций*

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – бесконечно малые при $x \rightarrow a$, а $\gamma(x)$ – ограниченная функция. Тогда

- 1) $\alpha(x) + \beta(x)$ – бесконечно малая при $x \rightarrow a$
- 2) $\alpha(x) \cdot \beta(x)$ – бесконечно малая при $x \rightarrow a$
- 3) $\alpha(x) \cdot \gamma(x)$ – бесконечно малая при $x \rightarrow a$



Доказательство свойства 1



Доказательство свойства 1

$$\lim_{x \rightarrow a} (\alpha(x) + \beta(x))$$



Доказательство свойства 1

$$\lim_{x \rightarrow a} (\alpha(x) + \beta(x)) = \lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) + \lim_{x \rightarrow a} \beta(x)$$



Доказательство свойства 1

$$\lim_{x \rightarrow a} (\alpha(x) + \beta(x)) = \lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) + \lim_{x \rightarrow a} \beta(x) = 0 + 0 = 0.$$



Бесконечно малые функции

Доказательство свойства 1

$$\lim_{x \rightarrow a} (\alpha(x) + \beta(x)) = \lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) + \lim_{x \rightarrow a} \beta(x) = 0 + 0 = 0.$$

$\Rightarrow \alpha(x) + \beta(x)$ - бесконечно малая при $x \rightarrow a$.



Бесконечно большие функции



Бесконечно большие функции

Определение

Функция $f(x)$ называется **бесконечно большой** при $x \rightarrow a$, если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$.



Бесконечно большие функции

Теорема (о связи бесконечно большой и
бесконечно малой функций)



Бесконечно большие функции

Теорема (о связи бесконечно большой и бесконечно малой функций)

Если функция $f(x)$ бесконечно большая при $x \rightarrow a$, то функция $1/f(x)$ является бесконечно малой при $x \rightarrow a$.

