

Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана
Факультет “Фундаментальные науки”
Кафедра “Высшая математика”

Математический анализ

Модуль 2

Пределы и непрерывность
функций одной переменной

Лекция 2.1

для ГУИМЦ, 2026

к.ф.-м.н. Семакин А.Н.

Окрестность точки



Окрестность точки

Здесь и далее под **точкой** будем понимать как конечное, так и бесконечное число.



Окрестность точки

Определение

ε -окрестность точки a обозначается как $U(a, \varepsilon)$ и определяется по формулам:



Окрестность точки

Определение

ε -окрестность точки a обозначается как $U(a, \varepsilon)$ и определяется по формулам:

1) a – действительное число



Окрестность точки

Определение

ε -окрестность точки a обозначается как $U(a, \varepsilon)$ и определяется по формулам:

1) a – действительное число

$$U(a, \varepsilon) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$$



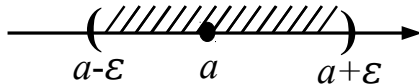
Окрестность точки

Определение

ε -**окрестность** точки a обозначается как $U(a, \varepsilon)$ и определяется по формулам:

1) a – действительное число

$$U(a, \varepsilon) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$$



Окрестность точки

Определение

ε -окрестность точки a обозначается как $U(a, \varepsilon)$ и определяется по формулам:

2) $a = +\infty$



Окрестность точки

Определение

ε -**окрестность** точки a обозначается как $U(a, \varepsilon)$ и определяется по формулам:

2) $a = +\infty$

$$U(+\infty, \varepsilon) = (\varepsilon, +\infty]$$



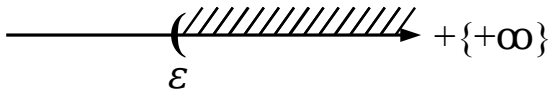
Окрестность точки

Определение

ε -**окрестность** точки a обозначается как $U(a, \varepsilon)$ и определяется по формулам:

2) $a = +\infty$

$$U(+\infty, \varepsilon) = (\varepsilon, +\infty]$$



Окрестность точки

Определение

ε -окрестность точки a обозначается как $U(a, \varepsilon)$ и определяется по формулам:

3) $a = -\infty$



Окрестность точки

Определение

ε -окрестность точки a обозначается как $U(a, \varepsilon)$ и определяется по формулам:

3) $a = -\infty$

$$U(-\infty, \varepsilon) = [-\infty, -\varepsilon)$$



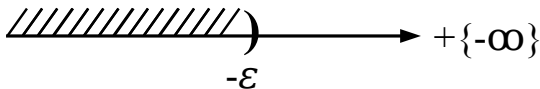
Окрестность точки

Определение

ε -окрестность точки a обозначается как $U(a, \varepsilon)$ и определяется по формулам:

3) $a = -\infty$

$$U(-\infty, \varepsilon) = [-\infty, -\varepsilon)$$



Окрестность точки

Определение

ε -окрестность точки a обозначается как $U(a, \varepsilon)$ и определяется по формулам:

4) $a = \infty$



Окрестность точки

Определение

ε -**окрестность** точки a обозначается как $U(a, \varepsilon)$ и определяется по формулам:

4) $a = \infty$

$$U(\infty, \varepsilon) = (-\infty, -\varepsilon) \cup (\varepsilon, +\infty) \cup \{\infty\}$$



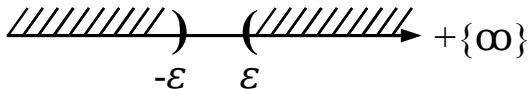
Окрестность точки

Определение

ε -окрестность точки a обозначается как $U(a, \varepsilon)$ и определяется по формулам:

4) $a = \infty$

$$U(\infty, \varepsilon) = (-\infty, -\varepsilon) \cup (\varepsilon, +\infty) \cup \{\infty\}$$



Окрестность точки

ε -окрестность часто называют **окрестностью** и обозначают $U(a)$, опуская символ ε .



Окрестность точки

ε -окрестность часто называют **окрестностью** и обозначают $U(a)$, опуская символ ε . В этом случае ε просто подразумевается.



Окрестность точки

ε -окрестность часто называют **окрестностью** и обозначают $U(a)$, опуская символ ε . В этом случае ε просто подразумевается. Обозначения $U(a, \varepsilon)$ и $U(a)$ эквивалентны.



Окрестность точки

ε -окрестность часто называют **окрестностью** и обозначают $U(a)$, опуская символ ε . В этом случае ε просто подразумевается. Обозначения $U(a, \varepsilon)$ и $U(a)$ эквивалентны.

Если a – действительное число, то ее окрестность $U(a)$ также называют **двусторонней окрестностью**.



Определение

Проколотой окрестностью точки a называется окрестность без самой точки a , т.е.

$$\overset{\circ}{U}(a, \varepsilon) = U(a, \varepsilon) \setminus a.$$

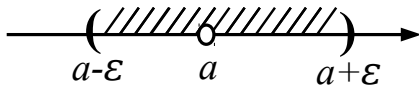


Окрестность точки

Определение

Проколотой окрестностью точки a называется окрестность без самой точки a , т.е.

$$\mathring{U}(a, \varepsilon) = U(a, \varepsilon) \setminus a.$$



Окрестность точки

Помимо двусторонней окрестности $U(a, \varepsilon)$ для действительных чисел можно ввести **односторонние окрестности**:



Окрестность точки

Помимо двусторонней окрестности $U(a, \varepsilon)$ для действительных чисел можно ввести **односторонние окрестности**:

1) правосторонняя окрестность



Окрестность точки

Помимо двусторонней окрестности $U(a, \varepsilon)$ для действительных чисел можно ввести **односторонние окрестности**:

1) правосторонняя окрестность

$$U_+(a, \varepsilon) = [a, a + \varepsilon), \mathring{U}_+(a, \varepsilon) = (a, a + \varepsilon)$$



Окрестность точки

Помимо двусторонней окрестности $U(a, \varepsilon)$ для действительных чисел можно ввести **односторонние окрестности**:

1) правосторонняя окрестность

$$U_+(a, \varepsilon) = [a, a + \varepsilon), \mathring{U}_+(a, \varepsilon) = (a, a + \varepsilon)$$

2) левосторонняя окрестность



Окрестность точки

Помимо двусторонней окрестности $U(a, \varepsilon)$ для действительных чисел можно ввести **односторонние окрестности**:

1) правосторонняя окрестность

$$U_+(a, \varepsilon) = [a, a + \varepsilon), \mathring{U}_+(a, \varepsilon) = (a, a + \varepsilon)$$

2) левосторонняя окрестность

$$U_-(a, \varepsilon) = (a - \varepsilon, a], \mathring{U}_-(a, \varepsilon) = (a - \varepsilon, a)$$



Типы стремления переменной к точке



Типы стремления переменной к точке

Рассмотрим произвольную переменную x ,
которая принимает последовательно значения

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$



Типы стремления переменной к точке

Рассмотрим произвольную переменную x , которая принимает последовательно значения

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

В зависимости от вида последовательности $\{x_n\}$ можно выделить несколько типов стремления переменной x к точке a .



Типы стремления переменной к точке

1. Одностороннее стремление (a – конеч. число)



Типы стремления переменной к точке

1. Одностороннее стремление (a – конеч. число)

X : $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$



Типы стремления переменной к точке

1. Одностороннее стремление (a – конеч. число)

$$X: x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

Говорят, что x **стремится** к a **справа**, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n(\varepsilon): x_n \in \overset{\circ}{U}_+(a, \varepsilon).$$



Типы стремления переменной к точке

1. Одностороннее стремление (a – конеч. число)

$$X: x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

Говорят, что x **стремится** к a **справа**, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n(\varepsilon): x_n \in \overset{\circ}{U}_+(a, \varepsilon).$$

Обозначение: $x \rightarrow a + 0$.



Типы стремления переменной к точке

1. Одностороннее стремление (a – конеч. число)

$$X: x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

Говорят, что x **стремится** к a **справа**, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n(\varepsilon): x_n \in \overset{\circ}{U}_+(a, \varepsilon).$$

Обозначение: $x \rightarrow a + 0$.

Пример:



Типы стремления переменной к точке

1. Одностороннее стремление (a – конеч. число)

$$X: x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

Говорят, что x **стремится** к a **справа**, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n(\varepsilon): x_n \in \overset{\circ}{U}_+(a, \varepsilon).$$

Обозначение: $x \rightarrow a + 0$.

Пример:

выбираем ε ,



Типы стремления переменной к точке

1. Одностороннее стремление (a – конеч. число)

$$x: x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

Говорят, что x **стремится** к a **справа**, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n(\varepsilon): x_n \in \overset{\circ}{U}_+(a, \varepsilon).$$

Обозначение: $x \rightarrow a + 0$.

Пример:

выбираем ε ,

$$n(\varepsilon) = 1,$$



Типы стремления переменной к точке

1. Одностороннее стремление (a – конеч. число)

$$x: x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

Говорят, что x **стремится** к a **справа**, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n(\varepsilon): x_n \in \overset{\circ}{U}_+(a, \varepsilon).$$

Обозначение: $x \rightarrow a + 0$.

Пример:

выбираем ε ,

$$n(\varepsilon) = 1,$$

$$\forall n > 1:$$

$$x_n \in \overset{\circ}{U}_+(a, \varepsilon)$$



Типы стремления переменной к точке

1. Одностороннее стремление (a – конеч. число)

$$x: x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

Говорят, что x **стремится** к a **справа**, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n(\varepsilon): x_n \in \overset{\circ}{U}_+(a, \varepsilon).$$

Обозначение: $x \rightarrow a + 0$.

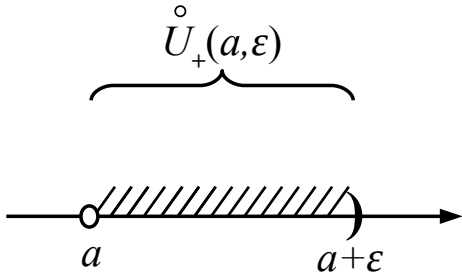
Пример:

выбираем ε ,

$$n(\varepsilon) = 1,$$

$$\forall n > 1:$$

$$x_n \in \overset{\circ}{U}_+(a, \varepsilon)$$



Типы стремления переменной к точке

1. Одностороннее стремление (a – конеч. число)

$$x: x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

Говорят, что x **стремится** к a **справа**, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n(\varepsilon): x_n \in \overset{\circ}{U}_+(a, \varepsilon).$$

Обозначение: $x \rightarrow a + 0$.

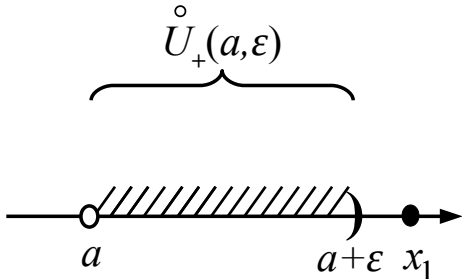
Пример:

выбираем ε ,

$$n(\varepsilon) = 1,$$

$$\forall n > 1:$$

$$x_n \in \overset{\circ}{U}_+(a, \varepsilon)$$



Типы стремления переменной к точке

1. Одностороннее стремление (a – конеч. число)

$$x: x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

Говорят, что x **стремится** к a **справа**, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n(\varepsilon): x_n \in \overset{\circ}{U}_+(a, \varepsilon).$$

Обозначение: $x \rightarrow a + 0$.

Пример:

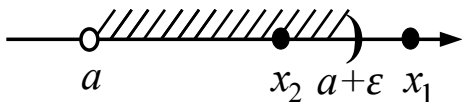
выбираем ε ,

$$n(\varepsilon) = 1,$$

$$\forall n > 1:$$

$$x_n \in \overset{\circ}{U}_+(a, \varepsilon)$$

$$\overset{\circ}{U}_+(a, \varepsilon)$$



Типы стремления переменной к точке

1. Одностороннее стремление (a – конеч. число)

$$X: x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

Говорят, что x **стремится** к a **справа**, если

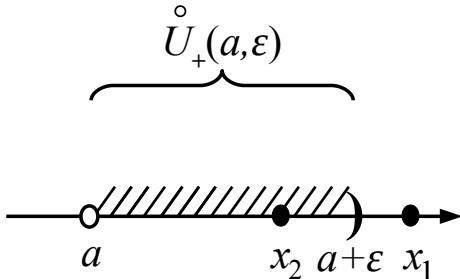
$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n(\varepsilon): x_n \in \overset{\circ}{U}_+(a, \varepsilon).$$

Обозначение: $x \rightarrow a + 0$.

Пример:

выбираем ε ,

$$n(\varepsilon/2) = 2,$$



Типы стремления переменной к точке

1. Одностороннее стремление (a – конеч. число)

$$x: x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

Говорят, что x **стремится** к a **справа**, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n(\varepsilon): x_n \in \overset{\circ}{U}_+(a, \varepsilon).$$

Обозначение: $x \rightarrow a + 0$.

Пример:

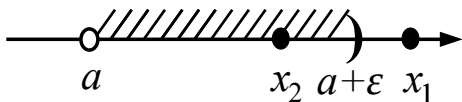
выбираем ε ,

$$n(\varepsilon/2) = 2,$$

$$\forall n > 2:$$

$$x_n \in \overset{\circ}{U}_+(a, \varepsilon/2)$$

$$\overset{\circ}{U}_+(a, \varepsilon)$$



Типы стремления переменной к точке

1. Одностороннее стремление (a – конеч. число)

$$x: x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

Говорят, что x **стремится** к a **справа**, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n(\varepsilon): x_n \in \overset{\circ}{U}_+(a, \varepsilon).$$

Обозначение: $x \rightarrow a + 0$.

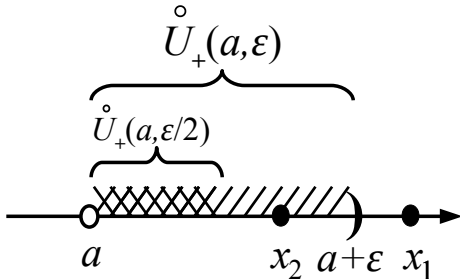
Пример:

выбираем ε ,

$$n(\varepsilon/2) = 2,$$

$$\forall n > 2:$$

$$x_n \in \overset{\circ}{U}_+(a, \varepsilon/2)$$



Типы стремления переменной к точке

1. Одностороннее стремление (a – конеч. число)

$$x: x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

Говорят, что x **стремится** к a **справа**, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n(\varepsilon): x_n \in \overset{\circ}{U}_+(a, \varepsilon).$$

Обозначение: $x \rightarrow a + 0$.

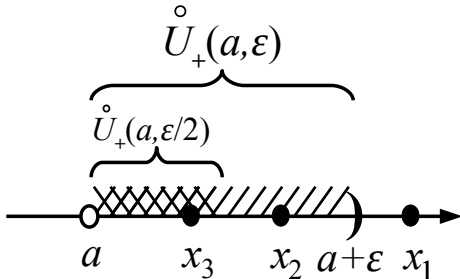
Пример:

выбираем ε ,

$$n(\varepsilon/2) = 2,$$

$$\forall n > 2:$$

$$x_n \in \overset{\circ}{U}_+(a, \varepsilon/2)$$



Типы стремления переменной к точке

1. Одностороннее стремление (a – конеч. число)

$$x: x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

Говорят, что x **стремится** к a **справа**, если

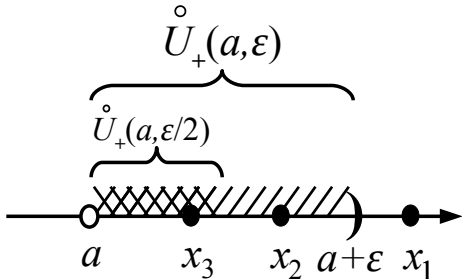
$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n(\varepsilon): x_n \in \overset{\circ}{U}_+(a, \varepsilon).$$

Обозначение: $x \rightarrow a + 0$.

Пример:

выбираем ε ,

$$n(\varepsilon/4) = 3,$$



Типы стремления переменной к точке

1. Одностороннее стремление (a – конеч. число)

$$x: x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

Говорят, что x **стремится** к a **справа**, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n(\varepsilon): x_n \in \overset{\circ}{U}_+(a, \varepsilon).$$

Обозначение: $x \rightarrow a + 0$.

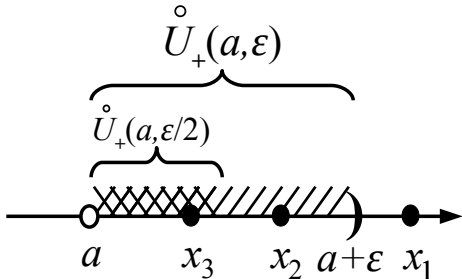
Пример:

выбираем ε ,

$$n(\varepsilon/4) = 3,$$

$$\forall n > 3:$$

$$x_n \in \overset{\circ}{U}_+(a, \varepsilon/4)$$



Типы стремления переменной к точке

1. Одностороннее стремление (a – конеч. число)

$$x: x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

Говорят, что x **стремится** к a **справа**, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n(\varepsilon): x_n \in \overset{\circ}{U}_+(a, \varepsilon).$$

Обозначение: $x \rightarrow a + 0$.

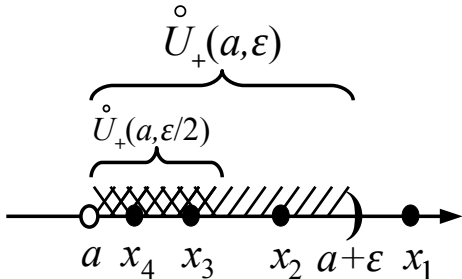
Пример:

выбираем ε ,

$$n(\varepsilon/4) = 3,$$

$$\forall n > 3:$$

$$x_n \in \overset{\circ}{U}_+(a, \varepsilon/4)$$



Типы стремления переменной к точке

1. Одностороннее стремление (a – конеч. число)

$$x: x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

Говорят, что x **стремится** к a **справа**, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n(\varepsilon): x_n \in \overset{\circ}{U}_+(a, \varepsilon).$$

Обозначение: $x \rightarrow a + 0$.

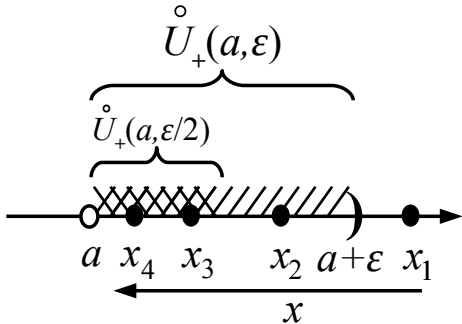
Пример:

выбираем ε ,

$$n(\varepsilon/4) = 3,$$

$$\forall n > 3:$$

$$x_n \in \overset{\circ}{U}_+(a, \varepsilon/4)$$



Типы стремления переменной к точке

1. Одностороннее стремление (a – конеч. число)

$$x: x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

Говорят, что x **стремится** к a **справа**, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n(\varepsilon): x_n \in \overset{\circ}{U}_+(a, \varepsilon).$$

Обозначение: $x \rightarrow a + 0$.

Переменная x принимает значения $x_1, x_2, \dots$, которые постепенно приближаются к точке a , при этом располагаются правее от нее на числовой прямой.



Типы стремления переменной к точке

1. Одностороннее стремление (a – конеч. число)

X : $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$



Типы стремления переменной к точке

1. Одностороннее стремление (a – конеч. число)

$x: x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$

Говорят, что x **стремится** к a **слева**, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n(\varepsilon): x_n \in \overset{\circ}{U}_{-}(a, \varepsilon).$$



Типы стремления переменной к точке

1. Одностороннее стремление (a – конеч. число)

$$x: x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

Говорят, что x **стремится** к a **слева**, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n(\varepsilon): x_n \in \overset{\circ}{U}_{-}(a, \varepsilon).$$

Обозначение: $x \rightarrow a - 0$.



Типы стремления переменной к точке

1. Одностороннее стремление (a – конеч. число)

$$X: x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

Говорят, что x **стремится** к a **слева**, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n(\varepsilon): x_n \in \overset{\circ}{U}_{-}(a, \varepsilon).$$

Обозначение: $x \rightarrow a - 0$.

Пример:



Типы стремления переменной к точке

1. Одностороннее стремление (a – конеч. число)

$$X: x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

Говорят, что x **стремится** к a **слева**, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n(\varepsilon): x_n \in \overset{\circ}{U}_{-}(a, \varepsilon).$$

Обозначение: $x \rightarrow a - 0$.

Пример:

выбираем ε ,



Типы стремления переменной к точке

1. Одностороннее стремление (a – конеч. число)

$$x: x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

Говорят, что x **стремится** к a **слева**, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n(\varepsilon): x_n \in \overset{\circ}{U}_{-}(a, \varepsilon).$$

Обозначение: $x \rightarrow a - 0$.

Пример:

выбираем ε ,

$$n(\varepsilon) = 1,$$



Типы стремления переменной к точке

1. Одностороннее стремление (a – конеч. число)

$$x: x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

Говорят, что x **стремится** к a **слева**, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n(\varepsilon): x_n \in \overset{\circ}{U}_{-}(a, \varepsilon).$$

Обозначение: $x \rightarrow a - 0$.

Пример:

выбираем ε ,

$$n(\varepsilon) = 1,$$

$$\forall n > 1:$$

$$x_n \in \overset{\circ}{U}_{-}(a, \varepsilon)$$



Типы стремления переменной к точке

1. Одностороннее стремление (a – конеч. число)

$$x: x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

Говорят, что x **стремится** к a **слева**, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n(\varepsilon): x_n \in \overset{\circ}{U}_-(a, \varepsilon).$$

Обозначение: $x \rightarrow a - 0$.

Пример:

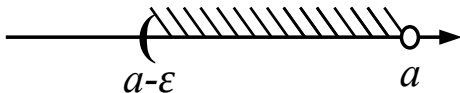
выбираем ε ,

$$n(\varepsilon) = 1,$$

$$\forall n > 1:$$

$$x_n \in \overset{\circ}{U}_-(a, \varepsilon)$$

$$\overset{\circ}{U}_-(a, \varepsilon)$$



Типы стремления переменной к точке

1. Одностороннее стремление (a – конеч. число)

$$x: x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

Говорят, что x **стремится** к a **слева**, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n(\varepsilon): x_n \in \overset{\circ}{U}_-(a, \varepsilon).$$

Обозначение: $x \rightarrow a - 0$.

Пример:

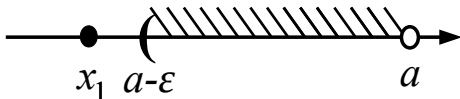
выбираем ε ,

$$n(\varepsilon) = 1,$$

$$\forall n > 1:$$

$$x_n \in \overset{\circ}{U}_-(a, \varepsilon)$$

$$\overset{\circ}{U}_-(a, \varepsilon)$$



Типы стремления переменной к точке

1. Одностороннее стремление (a – конеч. число)

$$x: x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

Говорят, что x **стремится** к a **слева**, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n(\varepsilon): x_n \in \overset{\circ}{U}_-(a, \varepsilon).$$

Обозначение: $x \rightarrow a - 0$.

Пример:

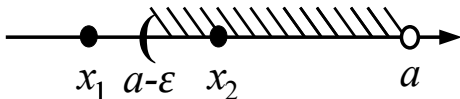
выбираем ε ,

$$n(\varepsilon) = 1,$$

$$\forall n > 1:$$

$$x_n \in \overset{\circ}{U}_-(a, \varepsilon)$$

$$\overset{\circ}{U}_-(a, \varepsilon)$$



Типы стремления переменной к точке

1. Одностороннее стремление (a – конеч. число)

$$X: x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

Говорят, что x **стремится** к a **слева**, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n(\varepsilon): x_n \in \overset{\circ}{U}_-(a, \varepsilon).$$

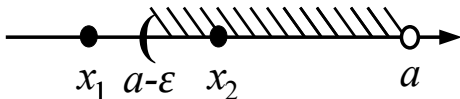
Обозначение: $x \rightarrow a - 0$.

Пример:

выбираем ε ,

$$n(\varepsilon/2) = 2,$$

$$\overset{\circ}{U}_-(a, \varepsilon)$$



Типы стремления переменной к точке

1. Одностороннее стремление (a – конеч. число)

$$x: x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

Говорят, что x **стремится** к a **слева**, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n(\varepsilon): x_n \in \overset{\circ}{U}_-(a, \varepsilon).$$

Обозначение: $x \rightarrow a - 0$.

Пример:

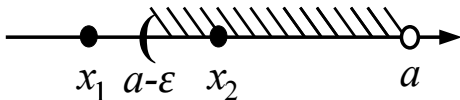
выбираем ε ,

$$n(\varepsilon/2) = 2,$$

$$\forall n > 2:$$

$$x_n \in \overset{\circ}{U}_-(a, \varepsilon/2)$$

$$\overset{\circ}{U}_-(a, \varepsilon)$$



Типы стремления переменной к точке

1. Одностороннее стремление (a – конеч. число)

$$x: x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

Говорят, что x **стремится** к a **слева**, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n(\varepsilon): x_n \in \overset{\circ}{U}_-(a, \varepsilon).$$

Обозначение: $x \rightarrow a - 0$.

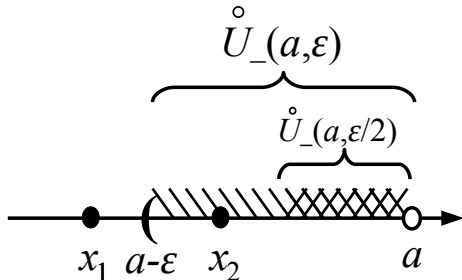
Пример:

выбираем ε ,

$$n(\varepsilon/2) = 2,$$

$$\forall n > 2:$$

$$x_n \in \overset{\circ}{U}_-(a, \varepsilon/2)$$



Типы стремления переменной к точке

1. Одностороннее стремление (a – конеч. число)

$$x: x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

Говорят, что x **стремится** к a **слева**, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n(\varepsilon): x_n \in \mathring{U}_-(a, \varepsilon).$$

Обозначение: $x \rightarrow a - 0$.

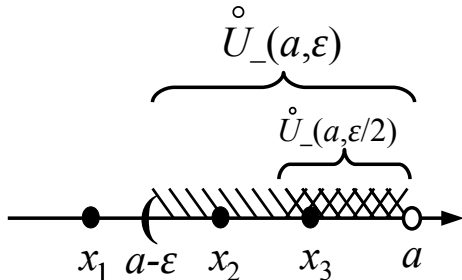
Пример:

выбираем ε ,

$$n(\varepsilon/2) = 2,$$

$$\forall n > 2:$$

$$x_n \in \mathring{U}_-(a, \varepsilon/2)$$



Типы стремления переменной к точке

1. Одностороннее стремление (a – конеч. число)

$$X: x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

Говорят, что x **стремится** к a **слева**, если

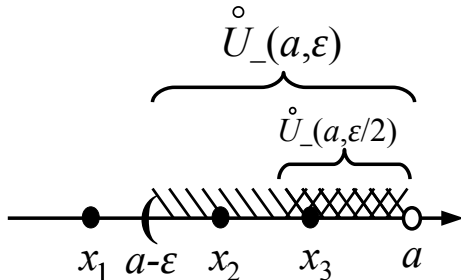
$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n(\varepsilon): x_n \in \overset{\circ}{U}_-(a, \varepsilon).$$

Обозначение: $x \rightarrow a - 0$.

Пример:

выбираем ε ,

$$n(\varepsilon/4) = 3,$$



Типы стремления переменной к точке

1. Одностороннее стремление (a – конеч. число)

$$x: x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

Говорят, что x **стремится** к a **слева**, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n(\varepsilon): x_n \in \overset{\circ}{U}_-(a, \varepsilon).$$

Обозначение: $x \rightarrow a - 0$.

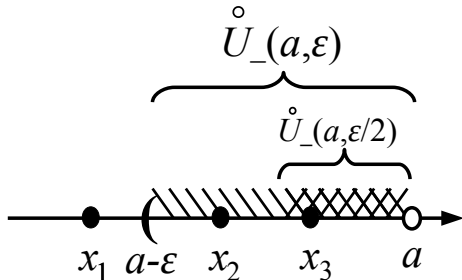
Пример:

выбираем ε ,

$$n(\varepsilon/4) = 3,$$

$$\forall n > 3:$$

$$x_n \in \overset{\circ}{U}_-(a, \varepsilon/4)$$



Типы стремления переменной к точке

1. Одностороннее стремление (a – конеч. число)

$$x: x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

Говорят, что x **стремится** к a **слева**, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n(\varepsilon): x_n \in \overset{\circ}{U}_-(a, \varepsilon).$$

Обозначение: $x \rightarrow a - 0$.

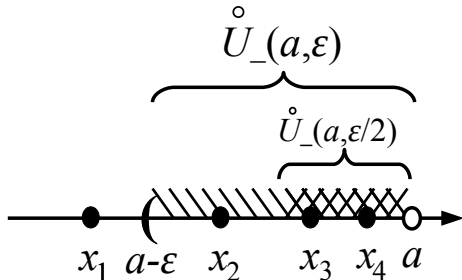
Пример:

выбираем ε ,

$$n(\varepsilon/4) = 3,$$

$$\forall n > 3:$$

$$x_n \in \overset{\circ}{U}_-(a, \varepsilon/4)$$



Типы стремления переменной к точке

1. Одностороннее стремление (a – конеч. число)

$$x: x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

Говорят, что x **стремится** к a **слева**, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n(\varepsilon): x_n \in \overset{\circ}{U}_-(a, \varepsilon).$$

Обозначение: $x \rightarrow a - 0$.

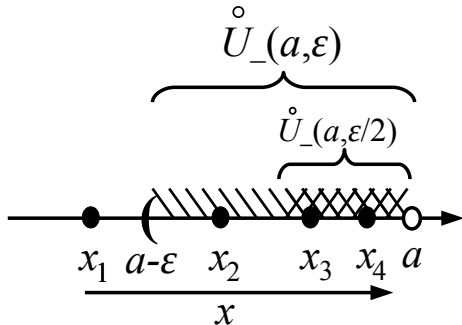
Пример:

выбираем ε ,

$$n(\varepsilon/4) = 3,$$

$$\forall n > 3:$$

$$x_n \in \overset{\circ}{U}_-(a, \varepsilon/4)$$



Типы стремления переменной к точке

1. Одностороннее стремление (a – конеч. число)

$$x: x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

Говорят, что x **стремится** к a **слева**, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n(\varepsilon): x_n \in \overset{\circ}{U}_-(a, \varepsilon).$$

Обозначение: $x \rightarrow a - 0$.

Переменная x принимает значения $x_1, x_2, \dots$, которые постепенно приближаются к точке a , при этом располагаются левее от нее на числовой прямой.



Типы стремления переменной к точке

2. Двустороннее стремление (a – любое число)



Типы стремления переменной к точке

2. Двустороннее стремление (a – любое число)

$X: x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$



Типы стремления переменной к точке

2. Двустороннее стремление (a – любое число)

$x: x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$

Говорят, что x **стремится** к a , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n(\varepsilon): x_n \in \overset{\circ}{U}(a, \varepsilon).$$



Типы стремления переменной к точке

2. Двустороннее стремление (a – любое число)

$$x: x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

Говорят, что x **стремится** к a , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n(\varepsilon): x_n \in \overset{\circ}{U}(a, \varepsilon).$$

Обозначение: $x \rightarrow a$.



Типы стремления переменной к точке

2. Двустороннее стремление (a – любое число)

$$X: x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

Говорят, что x **стремится** к a , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n(\varepsilon): x_n \in \overset{\circ}{U}(a, \varepsilon).$$

Обозначение: $x \rightarrow a$.

Пример:



Типы стремления переменной к точке

2. Двустороннее стремление (a – любое число)

$$x: x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

Говорят, что x **стремится** к a , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n(\varepsilon): x_n \in \overset{\circ}{U}(a, \varepsilon).$$

Обозначение: $x \rightarrow a$.

Пример:

выбираем ε ,



Типы стремления переменной к точке

2. Двустороннее стремление (a – любое число)

$$X: x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

Говорят, что x **стремится** к a , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n(\varepsilon): x_n \in \overset{\circ}{U}(a, \varepsilon).$$

Обозначение: $x \rightarrow a$.

Пример:

выбираем ε ,

$$n(\varepsilon) = 1,$$



Типы стремления переменной к точке

2. Двустороннее стремление (a – любое число)

$$X: x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

Говорят, что x **стремится** к a , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n(\varepsilon): x_n \in \overset{\circ}{U}(a, \varepsilon).$$

Обозначение: $x \rightarrow a$.

Пример:

выбираем ε ,

$$n(\varepsilon) = 1,$$

$$\forall n > 1:$$

$$x_n \in \overset{\circ}{U}(a, \varepsilon)$$



Типы стремления переменной к точке

2. Двустороннее стремление (a – любое число)

$$x: x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

Говорят, что x **стремится** к a , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n(\varepsilon): x_n \in \overset{\circ}{U}(a, \varepsilon).$$

Обозначение: $x \rightarrow a$.

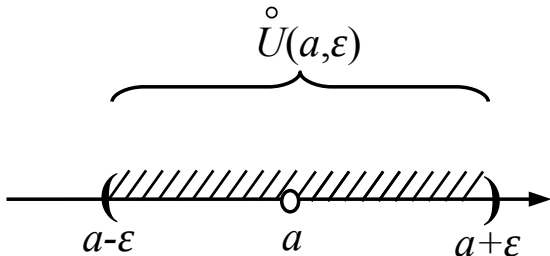
Пример:

выбираем ε ,

$$n(\varepsilon) = 1,$$

$$\forall n > 1:$$

$$x_n \in \overset{\circ}{U}(a, \varepsilon)$$



Типы стремления переменной к точке

2. Двустороннее стремление (a – любое число)

$$X: x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

Говорят, что x **стремится** к a , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n(\varepsilon): x_n \in \overset{\circ}{U}(a, \varepsilon).$$

Обозначение: $x \rightarrow a$.

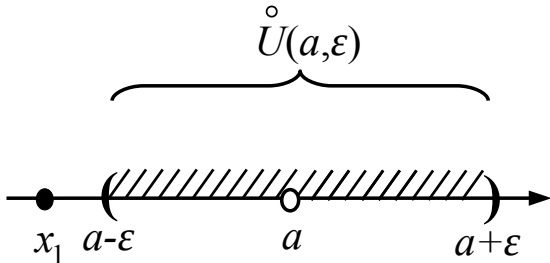
Пример:

выбираем ε ,

$$n(\varepsilon) = 1,$$

$$\forall n > 1:$$

$$x_n \in \overset{\circ}{U}(a, \varepsilon)$$



Типы стремления переменной к точке

2. Двустороннее стремление (a – любое число)

$$x: x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

Говорят, что x **стремится** к a , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n(\varepsilon): x_n \in \overset{\circ}{U}(a, \varepsilon).$$

Обозначение: $x \rightarrow a$.

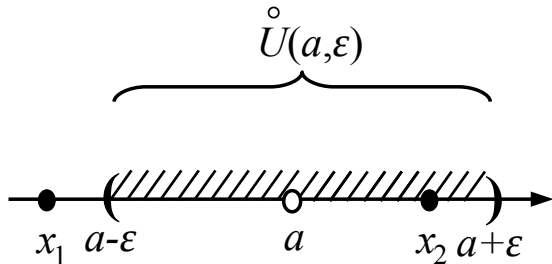
Пример:

выбираем ε ,

$$n(\varepsilon) = 1,$$

$$\forall n > 1:$$

$$x_n \in \overset{\circ}{U}(a, \varepsilon)$$



Типы стремления переменной к точке

2. Двустороннее стремление (a – любое число)

$$X: x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

Говорят, что x **стремится** к a , если

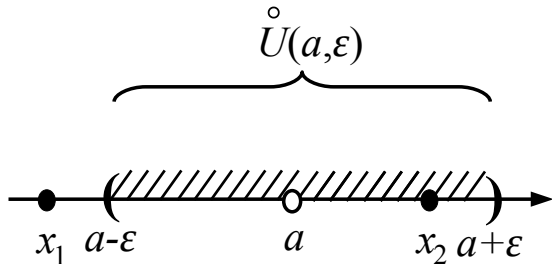
$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n(\varepsilon): x_n \in \overset{\circ}{U}(a, \varepsilon).$$

Обозначение: $x \rightarrow a$.

Пример:

выбираем ε ,

$$n(\varepsilon/2) = 2,$$



Типы стремления переменной к точке

2. Двустороннее стремление (a – любое число)

$$x: x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

Говорят, что x **стремится** к a , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n(\varepsilon): x_n \in \overset{\circ}{U}(a, \varepsilon).$$

Обозначение: $x \rightarrow a$.

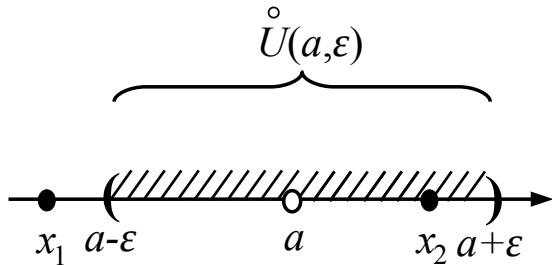
Пример:

выбираем ε ,

$$n(\varepsilon/2) = 2,$$

$$\forall n > 2:$$

$$x_n \in \overset{\circ}{U}(a, \varepsilon/2)$$



Типы стремления переменной к точке

2. Двустороннее стремление (a – любое число)

$$x: x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

Говорят, что x **стремится** к a , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n(\varepsilon): x_n \in \overset{\circ}{U}(a, \varepsilon).$$

Обозначение: $x \rightarrow a$.

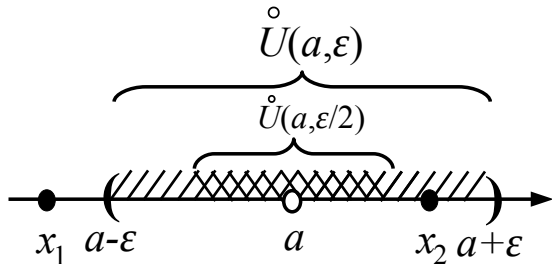
Пример:

выбираем ε ,

$$n(\varepsilon/2) = 2,$$

$$\forall n > 2:$$

$$x_n \in \overset{\circ}{U}(a, \varepsilon/2)$$



Типы стремления переменной к точке

2. Двустороннее стремление (a – любое число)

$$x: x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

Говорят, что x **стремится** к a , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n(\varepsilon): x_n \in \overset{\circ}{U}(a, \varepsilon).$$

Обозначение: $x \rightarrow a$.

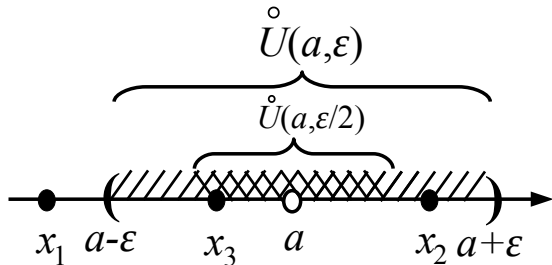
Пример:

выбираем ε ,

$$n(\varepsilon/2) = 2,$$

$$\forall n > 2:$$

$$x_n \in \overset{\circ}{U}(a, \varepsilon/2)$$



Типы стремления переменной к точке

2. Двустороннее стремление (a – любое число)

$$X: x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

Говорят, что x **стремится** к a , если

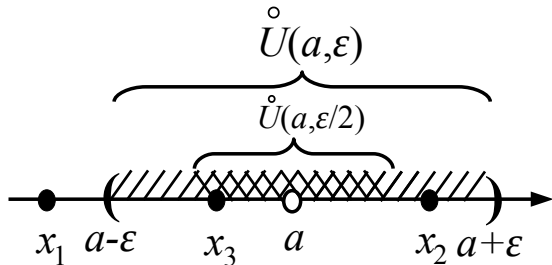
$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n(\varepsilon): x_n \in \overset{\circ}{U}(a, \varepsilon).$$

Обозначение: $x \rightarrow a$.

Пример:

выбираем ε ,

$$n(\varepsilon/4) = 3,$$



Типы стремления переменной к точке

2. Двустороннее стремление (a – любое число)

$$x: x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

Говорят, что x **стремится** к a , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n(\varepsilon): x_n \in \overset{\circ}{U}(a, \varepsilon).$$

Обозначение: $x \rightarrow a$.

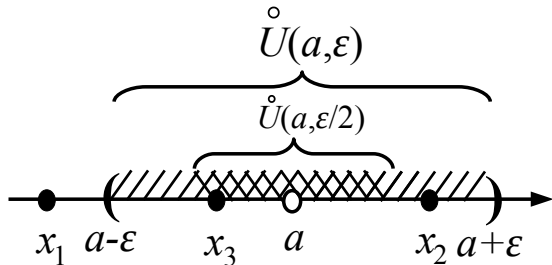
Пример:

выбираем ε ,

$$n(\varepsilon/4) = 3,$$

$$\forall n > 3:$$

$$x_n \in \overset{\circ}{U}(a, \varepsilon/4)$$



Типы стремления переменной к точке

2. Двустороннее стремление (a – любое число)

$$x: x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

Говорят, что x **стремится** к a , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n(\varepsilon): x_n \in \overset{\circ}{U}(a, \varepsilon).$$

Обозначение: $x \rightarrow a$.

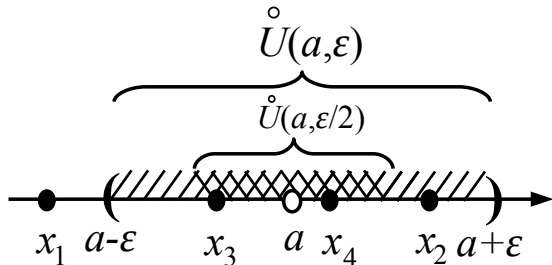
Пример:

выбираем ε ,

$$n(\varepsilon/4) = 3,$$

$$\forall n > 3:$$

$$x_n \in \overset{\circ}{U}(a, \varepsilon/4)$$



Типы стремления переменной к точке

2. Двустороннее стремление (a – любое число)

$$x: x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

Говорят, что x **стремится** к a , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n(\varepsilon): x_n \in \overset{\circ}{U}(a, \varepsilon).$$

Обозначение: $x \rightarrow a$.

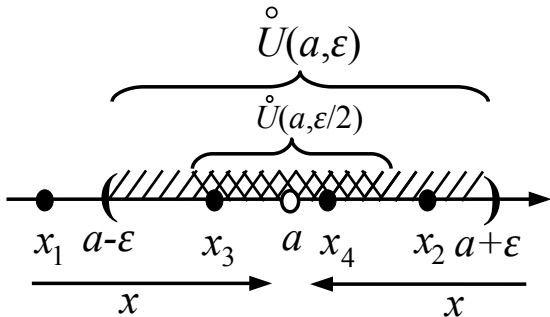
Пример:

выбираем ε ,

$$n(\varepsilon/4) = 3,$$

$$\forall n > 3:$$

$$x_n \in \overset{\circ}{U}(a, \varepsilon/4)$$



Типы стремления переменной к точке

2. Двустороннее стремление (a – любое число)

$$x: x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

Говорят, что x **стремится** к a , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n(\varepsilon): x_n \in \overset{\circ}{U}(a, \varepsilon).$$

Обозначение: $x \rightarrow a$.

Переменная x принимает значения $x_1, x_2, \dots$, которые постепенно приближаются к точке a , при этом, если a – конечное число, располагаются как справа, так и слева от нее на числовой прямой.



Предел функции



Предел функции

Пусть дана функция $f(x)$ и пусть $x \rightarrow a$,



Предел функции

Пусть дана функция $f(x)$ и пусть $x \rightarrow a$,
т.е. x последовательно принимает значения

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots,$$



Предел функции

Пусть дана функция $f(x)$ и пусть $x \rightarrow a$,
т.е. x последовательно принимает значения
 $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$,
которые постепенно приближаются к точке a .



Предел функции

Пусть дана функция $f(x)$ и пусть $x \rightarrow a$,
т.е. x последовательно принимает значения

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots,$$

которые постепенно приближаются к точке a .

Им соответствуют значения функции

$$f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), \dots$$



Предел функции

Пусть дана функция $f(x)$ и пусть $x \rightarrow a$,
т.е. x последовательно принимает значения

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots,$$

которые постепенно приближаются к точке a .

Им соответствуют значения функции

$$f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), \dots$$

В итоге имеем две числовые последовательности:



Предел функции

Пусть дана функция $f(x)$ и пусть $x \rightarrow a$,
т.е. x последовательно принимает значения

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots,$$

которые постепенно приближаются к точке a .

Им соответствуют значения функции

$$f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), \dots$$

В итоге имеем две числовые последовательности:

(а) значений переменной $\{x_n\}$,



Предел функции

Пусть дана функция $f(x)$ и пусть $x \rightarrow a$,
т.е. x последовательно принимает значения

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots,$$

которые постепенно приближаются к точке a .

Им соответствуют значения функции

$$f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), \dots$$

В итоге имеем две числовые последовательности:

(а) значений переменной $\{x_n\}$,

(б) значений функции $\{f(x_n)\}$.



Предел функции

Определение предела
(в терминах последовательностей, по Гейне)



Предел функции

Определение предела

(в терминах последовательностей, по Гейне)

Точка b называется **пределом** функции $f(x)$ в точке a , если любой последовательности $\{x_n\}$, такой что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \text{ и } \forall n \in \mathbb{N} \ x_n \neq a,$$



Предел функции

Определение предела

(в терминах последовательностей, по Гейне)

Точка b называется **пределом** функции $f(x)$ в точке a , если любой последовательности $\{x_n\}$, такой что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \text{ и } \forall n \in \mathbb{N} \ x_n \neq a,$$

соответствует последовательность $\{f(x_n)\}$, имеющая своим пределом точку b .



Предел функции

Определение предела

(в терминах последовательностей, по Гейне)

Точка b называется **пределом** функции $f(x)$ в точке a , если любой последовательности $\{x_n\}$, такой что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \text{ и } \forall n \in \mathbb{N} \ x_n \neq a,$$

соответствует последовательность $\{f(x_n)\}$, имеющая своим пределом точку b .

Обозначение: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$.



Предел функции

Геометрическая интерпретация предела (a и b – конечные числа)



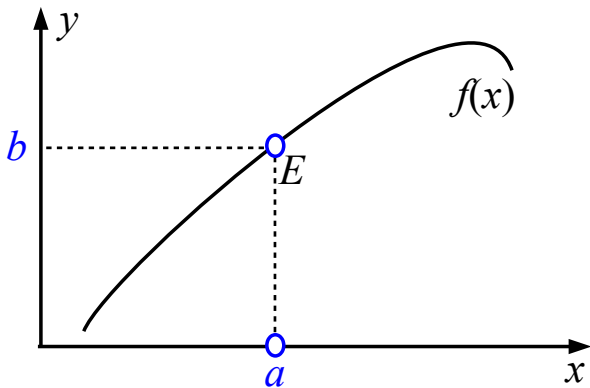
Предел функции

Геометрическая интерпретация предела
(a и b – конечные числа)



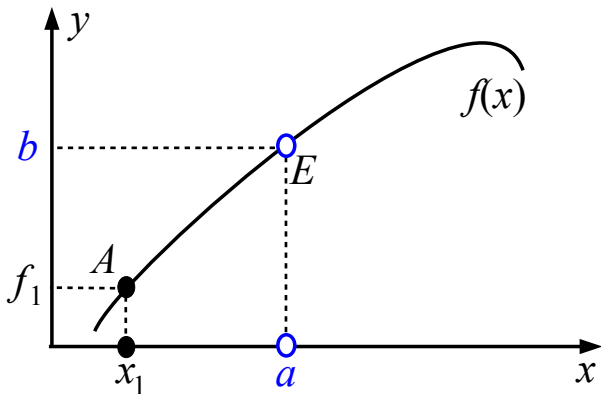
Предел функции

Геометрическая интерпретация предела
(a и b – конечные числа)



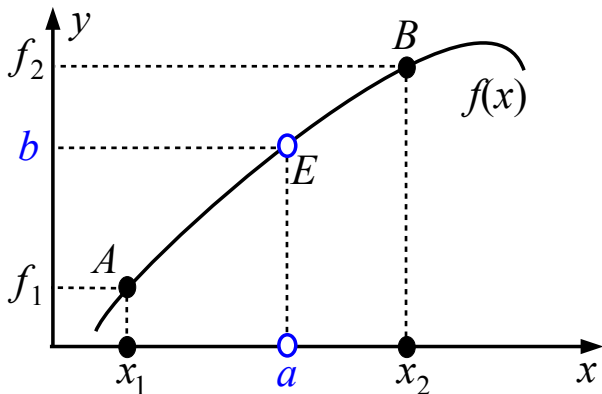
Предел функции

Геометрическая интерпретация предела
(a и b – конечные числа)



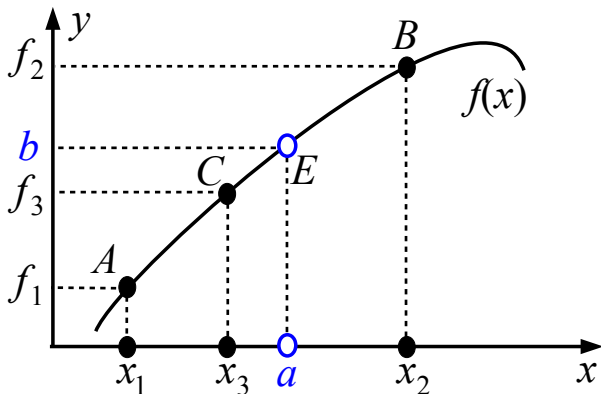
Предел функции

Геометрическая интерпретация предела
(a и b – конечные числа)



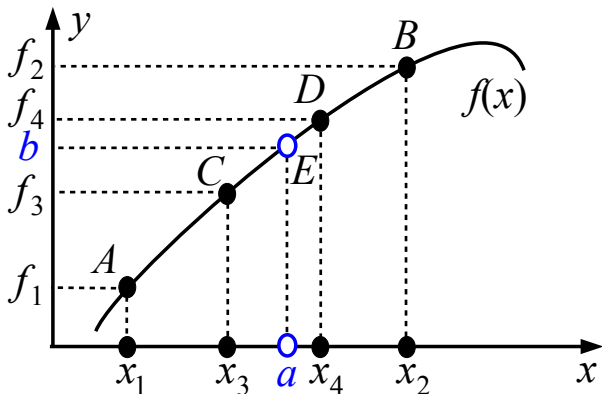
Предел функции

Геометрическая интерпретация предела
(a и b – конечные числа)



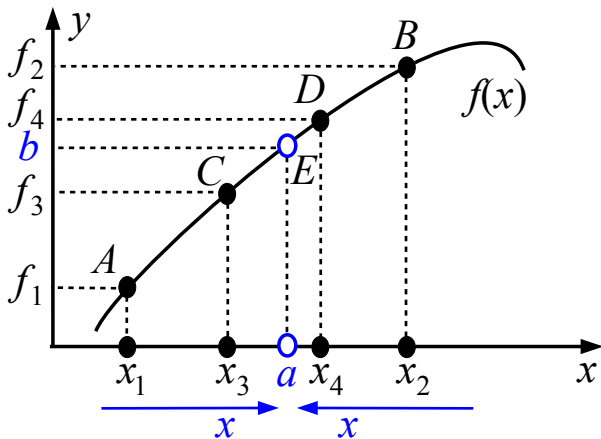
Предел функции

Геометрическая интерпретация предела
(a и b – конечные числа)



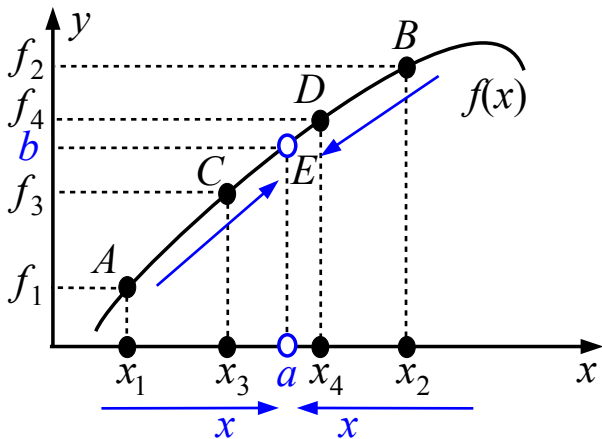
Предел функции

Геометрическая интерпретация предела
(a и b – конечные числа)



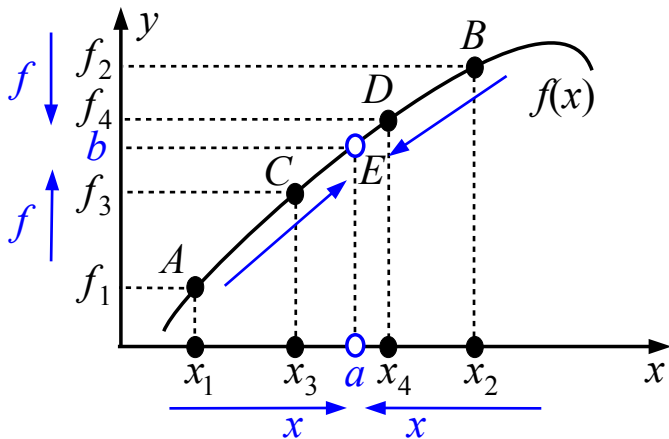
Предел функции

Геометрическая интерпретация предела
(a и b – конечные числа)



Предел функции

Геометрическая интерпретация предела
(a и b – конечные числа)



Предел функции

Если b – конечное число, то предел
называется **конечным**.



Предел функции

Если b – конечное число, то предел
называется **конечным**.

Если b – бесконечное число, то предел
называется **бесконечным**.



Предел функции

Если b – конечное число, то предел
называется **конечным**.

Если b – бесконечное число, то предел
называется **бесконечным**.

Если a – конечное число, то предел
называется **двусторонним**.



Определение предела (в терминах окрестностей, по Коши)



Определение предела

(в терминах окрестностей, по Коши)

Точка b называется **пределом** функции $f(x)$ в точке a , если

$$\forall U(b, \varepsilon) \exists \mathring{U}(a, \delta) \forall x \in \mathring{U}(a, \delta) : f(x) \in U(b, \varepsilon).$$



Предел функции

Расшифровка математических символов:



Предел функции

Расшифровка математических символов:

$\forall U(b, \varepsilon)$ – для любой ε -окрестности точки b



Предел функции

Расшифровка математических символов:

$\forall U(b, \varepsilon)$ – для любой ε -окрестности точки b

$\exists \overset{\circ}{U}(a, \delta)$ – существует такая проколота
 δ -окрестность точки a , что



Предел функции

Расшифровка математических символов:

$\forall U(b, \varepsilon)$ – для любой ε -окрестности точки b

$\exists \overset{\circ}{U}(a, \delta)$ – существует такая проколота
 δ -окрестность точки a , что

$\forall x \in \overset{\circ}{U}(a, \delta)$ – для любой точки x из этой
окрестности



Предел функции

Расшифровка математических символов:

$\forall U(b, \varepsilon)$ – для любой ε -окрестности точки b

$\exists \overset{\circ}{U}(a, \delta)$ – существует такая проколота
 δ -окрестность точки a , что

$\forall x \in \overset{\circ}{U}(a, \delta)$ – для любой точки x из этой
окрестности

: – выполняется



Предел функции

Расшифровка математических символов:

$\forall U(b, \varepsilon)$ – для любой ε -окрестности точки b

$\exists \overset{\circ}{U}(a, \delta)$ – существует такая проколота
 δ -окрестность точки a , что

$\forall x \in \overset{\circ}{U}(a, \delta)$ – для любой точки x из этой
окрестности

: – выполняется

$f(x) \in U(b, \varepsilon)$ – значение функции f в точке x
принадлежит ε -окрестности точки b



Предел функции

Определение предела

(в терминах неравенств для конечных точек,
на языке $\varepsilon - \delta$)



Предел функции

Определение предела

(в терминах неравенств для конечных точек,
на языке $\varepsilon - \delta$)

Конечная точка b называется **пределом**
функции $f(x)$ в конечной точке a , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 \forall x \in R, 0 < |x - a| < \delta:$$
$$|f(x) - b| < \varepsilon$$



Предел функции

Расшифровка математических символов:



Предел функции

Расшифровка математических символов:

$\forall \varepsilon > 0$ – для любого положительного ε



Предел функции

Расшифровка математических символов:

$\forall \varepsilon > 0$ – для любого положительного ε

$\exists \delta(\varepsilon) > 0$ – существует такое положительное δ ,
зависящее от ε , что



Предел функции

Расшифровка математических символов:

$\forall \varepsilon > 0$ – для любого положительного ε

$\exists \delta(\varepsilon) > 0$ – существует такое положительное δ ,
зависящее от ε , что

$\forall x \in R$ – для любого дейст. числа x



Предел функции

Расшифровка математических символов:

$\forall \varepsilon > 0$ – для любого положительного ε

$\exists \delta(\varepsilon) > 0$ – существует такое положительное δ ,
зависящее от ε , что

$\forall x \in R$ – для любого дейст. числа x

, – удовлетворяющего условию



Предел функции

Расшифровка математических символов:

$\forall \varepsilon > 0$ – для любого положительного ε

$\exists \delta(\varepsilon) > 0$ – существует такое положительное δ ,
зависящее от ε , что

$\forall x \in R$ – для любого дейст. числа x

, – удовлетворяющего условию

$0 < |x - a| < \delta$ – $|x - a|$ больше нуля и

меньше δ



Предел функции

Расшифровка математических символов:

$\forall \varepsilon > 0$ – для любого положительного ε

$\exists \delta(\varepsilon) > 0$ – существует такое положительное δ ,
зависящее от ε , что

$\forall x \in R$ – для любого дейст. числа x

, – удовлетворяющего условию

$0 < |x - a| < \delta$ – $|x - a|$ больше нуля и

меньше δ

: – выполняется



Предел функции

Расшифровка математических символов:

$\forall \varepsilon > 0$ – для любого положительного ε

$\exists \delta(\varepsilon) > 0$ – существует такое положительное δ ,
зависящее от ε , что

$\forall x \in R$ – для любого дейст. числа x

, – удовлетворяющего условию

$0 < |x - a| < \delta$ – $|x - a|$ больше нуля и

меньше δ

: – выполняется

$|f(x) - b| < \varepsilon$ – $|f(x) - b|$ меньше ε



Арифметические свойства конечных пределов



Арифметические свойства конечных пределов

Если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ и $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$, где
 b и c – конечные числа, то



Арифметические свойства конечных пределов

Если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ и $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$, где b и c – конечные числа, то

$$1) \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = b \pm c,$$



Арифметические свойства конечных пределов

Если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ и $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$, где b и c – конечные числа, то

- 1) $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = b \pm c$,
- 2) $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = b \cdot c$,



Арифметические свойства конечных пределов

Если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ и $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$, где b и c – конечные числа, то

- 1) $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = b \pm c$,
- 2) $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = b \cdot c$,
- 3) $\lim_{x \rightarrow a} (f(x)/g(x)) = b/c$, если $c \neq 0$.



Односторонние пределы



Односторонние пределы

Определение предела (в терминах последовательностей, по Гейне)



Односторонние пределы

Определение предела

(в терминах последовательностей, по Гейне)

Точка b называется **пределом** функции $f(x)$ **слева** в конечной точке a , если любой последовательности $\{x_n\}$, такой что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \text{ и } \forall n \in \mathbb{N} \ x_n < a,$$



Односторонние пределы

Определение предела

(в терминах последовательностей, по Гейне)

Точка b называется **пределом** функции $f(x)$ **слева** в конечной точке a , если любой последовательности $\{x_n\}$, такой что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \text{ и } \forall n \in \mathbb{N} \ x_n < a,$$

соответствует последовательность $\{f(x_n)\}$, имеющая своим пределом точку b .



Односторонние пределы

Определение предела

(в терминах последовательностей, по Гейне)

Точка b называется **пределом** функции $f(x)$ **слева** в конечной точке a , если любой последовательности $\{x_n\}$, такой что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \text{ и } \forall n \in \mathbb{N} \ x_n < a,$$

соответствует последовательность $\{f(x_n)\}$, имеющая своим пределом точку b .

Обозначение: $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = b$.



Односторонние пределы

Определение предела (в терминах последовательностей, по Гейне)



Односторонние пределы

Определение предела

(в терминах последовательностей, по Гейне)

Точка b называется **пределом** функции $f(x)$ **справа** в конечной точке a , если любой последовательности $\{x_n\}$, такой что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \text{ и } \forall n \in \mathbb{N} \ x_n > a,$$



Односторонние пределы

Определение предела

(в терминах последовательностей, по Гейне)

Точка b называется **пределом** функции $f(x)$ **справа** в конечной точке a , если любой последовательности $\{x_n\}$, такой что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \text{ и } \forall n \in \mathbb{N} \ x_n > a,$$

соответствует последовательность $\{f(x_n)\}$, имеющая своим пределом точку b .



Односторонние пределы

Определение предела

(в терминах последовательностей, по Гейне)

Точка b называется **пределом** функции $f(x)$ **справа** в конечной точке a , если любой последовательности $\{x_n\}$, такой что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \text{ и } \forall n \in \mathbb{N} \ x_n > a,$$

соответствует последовательность $\{f(x_n)\}$, имеющая своим пределом точку b .

Обозначение: $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = b$.

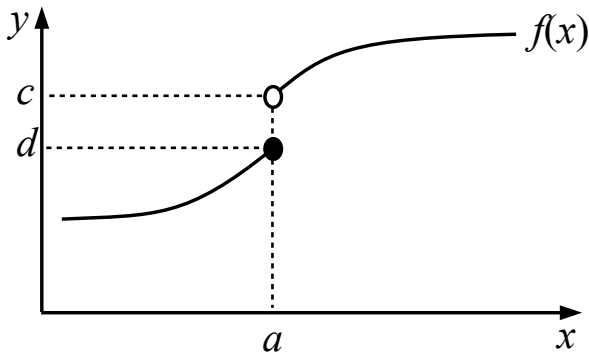


Геометрическая интерпретация:



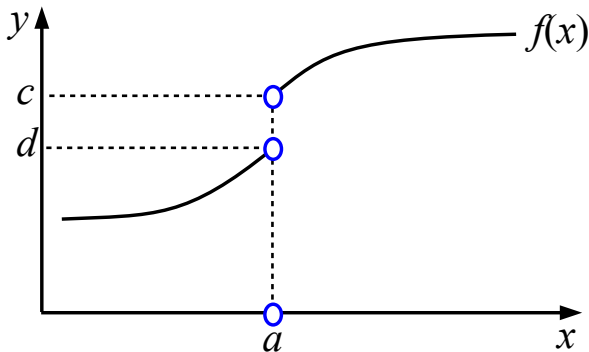
Односторонние пределы

Геометрическая интерпретация:



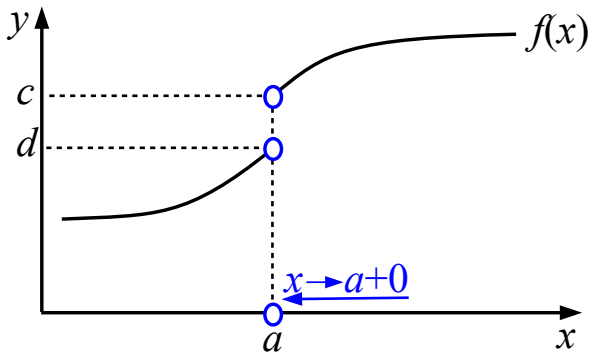
Односторонние пределы

Геометрическая интерпретация:



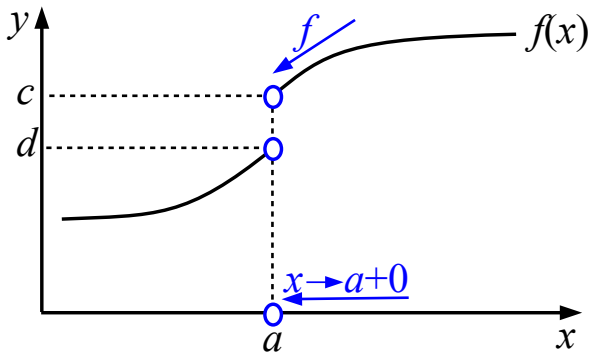
Односторонние пределы

Геометрическая интерпретация:



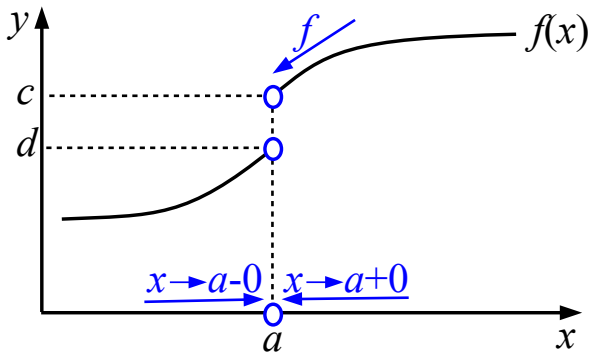
Односторонние пределы

Геометрическая интерпретация:



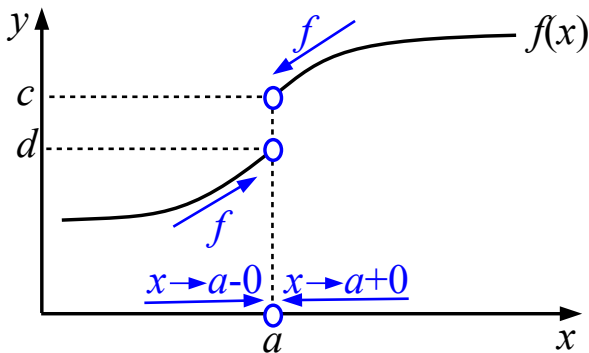
Односторонние пределы

Геометрическая интерпретация:



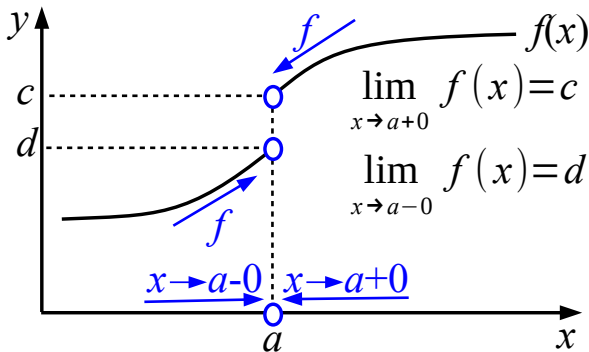
Односторонние пределы

Геометрическая интерпретация:



Односторонние пределы

Геометрическая интерпретация:



Теорема (о связи односторонних пределов с двусторонним)



Односторонние пределы

Теорема (о связи односторонних пределов с двусторонним)

Функция $f(x)$ имеет в точке a двусторонний предел тогда и только тогда, когда в этой точке существуют односторонние пределы и они равны, причем их общее значение является значением двустороннего предела.

