

Математический анализ

Модуль 2

Пределы и непрерывность функций одной переменной

Лекция 2.2

(для ГУИМЦ, 2026)

Аннотация

Общие свойства пределов. Первый замечательный предел и его следствия. Второй замечательный предел и его следствия. Бесконечно малые функции. Бесконечно большие функции.

1 Общие свойства пределов

*Теорема (локальная ограниченность функции)**

Если функция $f(x)$ имеет в точке a конечный предел, то существует такая проколота окрестность точки a , в которой функция $f(x)$ ограничена.

Доказательство

Пусть $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, где b - конечное число. Тогда по определению предела в терминах окрестностей

$$\forall U(b, \varepsilon) \exists \overset{\circ}{U}(a, \delta) \forall x \in \overset{\circ}{U}(a, \delta): f(x) \in U(b, \varepsilon).$$

Поскольку b - конечное число, то

$$U(b, \varepsilon) = (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$$

и

$$f(x) \in U(b, \varepsilon) \Leftrightarrow f(x) \in (b - \varepsilon, b + \varepsilon), \\ \forall U(b, \varepsilon) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0.$$

Соответственно, рассмотренное выше определение предела можно переписать в виде:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \overset{\circ}{U}(a, \delta) \forall x \in \overset{\circ}{U}(a, \delta): f(x) \in (b - \varepsilon, b + \varepsilon).$$

Положим $\varepsilon = 1$. Тогда

$$\exists \overset{\circ}{U}(a, \delta_1) \forall x \in \overset{\circ}{U}(a, \delta_1): f(x) \in (b - 1, b + 1),$$

где δ_1 - значение δ , соответствующее выбранному значению $\varepsilon = 1$.

Мы получили, что у точки a имеется проколота окрестность, в которой значения функции $f(x)$ заключены между числами $b - 1$ (нижняя граница) и $b + 1$ (верхняя граница). Это означает ограниченность функции в некоторой проколоте окрестности точки a . ■

*Теорема (локальная знакоопределенность функции)**

Если в точке a функция $f(x)$ имеет не равный нулю конечный предел, то в некоторой проколоте окрестности точки a функция имеет тот же знак, что и сам предел.

Доказательство

Пусть $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, где b - конечное число, $b > 0$. При доказательстве предыдущей теоремы было показано, что для конечного числа b определение предела можно записать в виде

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \overset{\circ}{U}(a, \delta) \forall x \in \overset{\circ}{U}(a, \delta): f(x) \in (b - \varepsilon, b + \varepsilon).$$

Положим $\varepsilon = b$. Тогда

$$\exists \overset{\circ}{U}(a, \delta_b) \forall x \in \overset{\circ}{U}(a, \delta_b): f(x) \in (0, 2b),$$

где δ_b - значение δ , соответствующее выбранному значению $\varepsilon = b$.

Мы получили, что в некоторой проколоте окрестности точки a функция $f(x)$ положительна, т.е. ее знак совпадает со знаком числа b .

Случай $b < 0$ доказывается аналогично. ■

Теорема (1-ая теорема о предельном переходе в неравенстве)

Если $f(x) \geq A$ в некоторой проколоте окрестности точки a и имеет в этой точке конечный или бесконечный определенного знака

предел, то

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \geq A.$$

Теорема (2-ая теорема о предельном переходе в неравенстве)

Если $\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x)$ в некоторой проколотой окрестности точки a и

$$\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow a} \psi(x) = A,$$

где A - конечное число или бесконечность определенного знака, то

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A.$$

Теорема (единственность предела)

Если функция $f(x)$ имеет в точке a конечный предел, то этот предел единственный.

Теорема (предел сложной функции и замена переменной)

Пусть существуют конечные или бесконечные пределы

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \text{ и } \lim_{y \rightarrow b} g(y),$$

и пусть в некоторой проколотой окрестности точки a имеет место $f(x) \neq b$. Тогда в точке a существует предел сложной функции $g(f(x))$ и

$$\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = \lim_{y \rightarrow b} g(y).$$

2 Замечательные пределы

Первый замечательный предел:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = 1$$

Здесь u - произвольная функция, которая обладает свойством:

$$u \rightarrow 0.$$

Примеры:

$$1) u = 5x \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x} = 1,$$

$$2) u = 2x - 2 \rightarrow -2 \text{ при } x \rightarrow 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x - 2)}{2x - 2} \neq 1.$$

Следствия:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1 \qquad \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} u}{u} = 1$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1 \qquad \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\arcsin u}{u} = 1$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1 \qquad \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} u}{u} = 1$$

Второй замечательный предел:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{1/x} = e \qquad \lim_{u \rightarrow 0} (1 + u)^{1/u} = e$$

Здесь u - произвольная функция, которая обладает свойством:
 $u \rightarrow 0$.

Примеры:

$$1) u = 3x \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x)^{1/3x} = e,$$

$$2) u = 4x - 1 \rightarrow -1 \text{ при } x \rightarrow 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} (1 + (4x - 1))^{1/(4x-1)} \neq e.$$

Следствия:

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \qquad \lim_{u \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{u}\right)^u = e$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1 \qquad \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + u)}{u} = 1$$

$$\begin{array}{ll} 3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a & \lim_{u \rightarrow 0} \frac{a^u - 1}{u} = \ln a \\ 4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 & \lim_{u \rightarrow 0} \frac{e^u - 1}{u} = 1 \end{array}$$

3 Бесконечно малые функции

Определение

Функция $\alpha(x)$ называется **бесконечно малой** при $x \rightarrow a$, если

$$\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0.$$

Теорема (о связи функции, ее предела и бесконечно малой)*

Конечный предел функции $f(x)$ при $x \rightarrow a$ существует и равен b тогда и только тогда, когда $f(x) = b + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ - бесконечно малая при $x \rightarrow a$.

Замечание

Фраза "тогда и только тогда, когда" в формулировке теоремы означает, что данная теорема является составной и состоит из двух простых теорем - прямой и обратной.

Прямая теорема читается слева направо:

Если конечный предел функции $f(x)$ при $x \rightarrow a$ существует и равен b , то $f(x) = b + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ - бесконечно малая при $x \rightarrow a$.

Обратная теорема читается справа налево:

Если $f(x) = b + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ - бесконечно малая при $x \rightarrow a$, то конечный предел функции $f(x)$ при $x \rightarrow a$ существует и равен b .

Чтобы доказать исходную составную теорему, нужно доказать каждую из составляющих ее простых теорем.

*Доказательство теоремы**1. Прямая теорема.*

Дано: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, b - конечное число.

Доказать: $f(x) = b + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ - бесконечно малая при $x \rightarrow a$.

Пусть $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$. Зададим функцию $\alpha(x) = f(x) - b$ и рассмотрим ее предел:

$$\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = \lim_{x \rightarrow a} (f(x) - b) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} b = b - b = 0.$$

Получаем, что $\alpha(x)$ - это бесконечно малая при $x \rightarrow a$.

Т.к. $\alpha(x) = f(x) - b$, то $f(x) = b + \alpha(x)$.

2. Обратная теорема.

Дано: $f(x) = b + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ - бесконечно малая при $x \rightarrow a$.

Доказать: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, b - конечное число.

Пусть $f(x) = b + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ - бесконечно малая при $x \rightarrow a$.

Тогда $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} (b + \alpha(x)) = \lim_{x \rightarrow a} b + \lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = b + 0 = b$. ■

*Свойства бесконечно малых функций**

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ - бесконечно малые при $x \rightarrow a$, а $\gamma(x)$ - ограниченная функция. Тогда

- 1) $\alpha(x) + \beta(x)$ - бесконечно малая при $x \rightarrow a$,
- 2) $\alpha(x) \cdot \beta(x)$ - бесконечно малая при $x \rightarrow a$,
- 3) $\alpha(x) \cdot \gamma(x)$ - бесконечно малая при $x \rightarrow a$.

Доказательство свойства 1

$$\lim_{x \rightarrow a} (\alpha(x) + \beta(x)) = \lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) + \lim_{x \rightarrow a} \beta(x) = 0 + 0 = 0.$$

$\Rightarrow \alpha(x) + \beta(x)$ - бесконечно малая при $x \rightarrow a$. ■

4 Бесконечно большие функции

Определение

Функция $f(x)$ называется **бесконечно большой** при $x \rightarrow a$, если

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty.$$

Теорема (о связи бесконечно большой и бесконечно малой функций)

Если функция $f(x)$ бесконечно большая при $x \rightarrow a$, то функция $1/f(x)$ является бесконечно малой при $x \rightarrow a$.