

Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана
Факультет “Фундаментальные науки”
Кафедра “Высшая математика”

Математический анализ
Модуль 1
Элементарные функции
и пределы числовых последовательностей

Лекция 1.3

для ГУИМЦ, 2026

к.ф.-м.н. Семакин А.Н.

Условия сходимости последовательности



Условия сходимости последовательности

Определение

Последовательность $\{x_n\}$ называется **ограниченной**, если



Условия сходимости последовательности

Определение

Последовательность $\{x_n\}$ называется **ограниченной**, если

$$\exists b > 0 \forall n \in N : |x_n| \leq b.$$



Условия сходимости последовательности

Определение

Последовательность $\{x_n\}$ называется **ограниченной сверху**, если



Условия сходимости последовательности

Определение

Последовательность $\{x_n\}$ называется **ограниченной сверху**, если

$$\exists b \in R \forall n \in N : x_n \leq b.$$



Условия сходимости последовательности

Определение

Последовательность $\{x_n\}$ называется **ограниченной сверху**, если

$$\exists b \in R \forall n \in N : x_n \leq b.$$

Определение

Последовательность $\{x_n\}$ называется **ограниченной снизу**, если



Условия сходимости последовательности

Определение

Последовательность $\{x_n\}$ называется **ограниченной сверху**, если

$$\exists b \in R \forall n \in N : x_n \leq b.$$

Определение

Последовательность $\{x_n\}$ называется **ограниченной снизу**, если

$$\exists b \in R \forall n \in N : x_n \geq b.$$



Теорема (необходимое условие сходимости)*



Условия сходимости последовательности

Теорема (необходимое условие сходимости)*

Если числовая последовательность имеет конечный предел, то она ограничена.



Условия сходимости последовательности

Доказательство



Условия сходимости последовательности

Доказательство

Пусть дана последовательность $\{x_n\}$ и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a.$$



Условия сходимости последовательности

Доказательство

Пусть дана последовательность $\{x_n\}$ и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a.$$

Тогда по определению предела имеем:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n(\varepsilon): |x_n - a| < \varepsilon.$$



Условия сходимости последовательности

Доказательство

Пусть дана последовательность $\{x_n\}$ и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a.$$

Тогда по определению предела имеем:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n(\varepsilon): |x_n - a| < \varepsilon.$$

Возьмем $\varepsilon = 1$.



Условия сходимости последовательности

Доказательство

Пусть дана последовательность $\{x_n\}$ и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a.$$

Тогда по определению предела имеем:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n(\varepsilon): |x_n - a| < \varepsilon.$$

Возьмем $\varepsilon = 1$. При таком выборе ε из определения предела получаем, что

$$\exists n_1 \forall n > n_1: |x_n - a| < 1,$$



Условия сходимости последовательности

Доказательство

Пусть дана последовательность $\{x_n\}$ и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a.$$

Тогда по определению предела имеем:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n(\varepsilon): |x_n - a| < \varepsilon.$$

Возьмем $\varepsilon = 1$. При таком выборе ε из определения предела получаем, что

$$\exists n_1 \forall n > n_1: |x_n - a| < 1,$$

где n_1 - это $n(\varepsilon)$, вычисленное для $\varepsilon = 1$.



Условия сходимости последовательности

Пусть $d = \max\{1, |x_1 - a|, |x_2 - a|, \dots, |x_{n_1} - a|\}$.



Условия сходимости последовательности

Пусть $d = \max\{1, |x_1 - a|, |x_2 - a|, \dots, |x_{n_1} - a|\}$.

Тогда

$$|x_1 - a| \leq d, |x_2 - a| \leq d, \dots, |x_{n_1} - a| \leq d$$



Условия сходимости последовательности

Пусть $d = \max\{1, |x_1 - a|, |x_2 - a|, \dots, |x_{n_1} - a|\}$.

Тогда

$$|x_1 - a| \leq d, |x_2 - a| \leq d, \dots, |x_{n_1} - a| \leq d$$

и

$$\forall n > n_1: |x_n - a| < 1 \leq d.$$



Условия сходимости последовательности

Пусть $d = \max\{1, |x_1 - a|, |x_2 - a|, \dots, |x_{n_1} - a|\}$.

Тогда

$$|x_1 - a| \leq d, |x_2 - a| \leq d, \dots, |x_{n_1} - a| \leq d$$

и

$$\forall n > n_1: |x_n - a| < 1 \leq d.$$

Данные неравенства можно объединить в одно выражение

$$\forall n \in \mathbb{N}: |x_n - a| \leq d.$$



Условия сходимости последовательности

Пусть $d = \max\{1, |x_1 - a|, |x_2 - a|, \dots, |x_{n_1} - a|\}$.

Тогда

$$|x_1 - a| \leq d, |x_2 - a| \leq d, \dots, |x_{n_1} - a| \leq d$$

и

$$\forall n > n_1: |x_n - a| < 1 \leq d.$$

Данные неравенства можно объединить в одно выражение

$$\forall n \in \mathbb{N}: |x_n - a| \leq d.$$

$$\Rightarrow -d \leq x_n - a \leq d$$



Условия сходимости последовательности

Пусть $d = \max\{1, |x_1 - a|, |x_2 - a|, \dots, |x_{n_1} - a|\}$.

Тогда

$$|x_1 - a| \leq d, |x_2 - a| \leq d, \dots, |x_{n_1} - a| \leq d$$

и

$$\forall n > n_1: |x_n - a| < 1 \leq d.$$

Данные неравенства можно объединить в одно выражение

$$\forall n \in \mathbb{N}: |x_n - a| \leq d.$$

$$\Rightarrow -d \leq x_n - a \leq d \Rightarrow a - d \leq x_n \leq a + d$$



Условия сходимости последовательности

Пусть $d = \max\{1, |x_1 - a|, |x_2 - a|, \dots, |x_{n_1} - a|\}$.

Тогда

$$|x_1 - a| \leq d, |x_2 - a| \leq d, \dots, |x_{n_1} - a| \leq d$$

и

$$\forall n > n_1: |x_n - a| < 1 \leq d.$$

Данные неравенства можно объединить в одно выражение

$$\forall n \in \mathbb{N}: |x_n - a| \leq d.$$

$$\Rightarrow -d \leq x_n - a \leq d \Rightarrow a - d \leq x_n \leq a + d$$

$\Rightarrow$ последовательность $\{x_n\}$ ограничена. ■



Условия сходимости последовательности

Определение

Последовательность $\{x_n\}$ называется **возрастающей**, если



Условия сходимости последовательности

Определение

Последовательность $\{x_n\}$ называется **возрастающей**, если

$$\forall n \in \mathbb{N} : x_n \leq x_{n+1}.$$



Условия сходимости последовательности

Определение

Последовательность $\{x_n\}$ называется **возрастающей**, если

$$\forall n \in \mathbb{N} : x_n \leq x_{n+1}.$$

Определение

Последовательность $\{x_n\}$ называется **убывающей**, если



Условия сходимости последовательности

Определение

Последовательность $\{x_n\}$ называется **возрастающей**, если

$$\forall n \in \mathbb{N} : x_n \leq x_{n+1}.$$

Определение

Последовательность $\{x_n\}$ называется **убывающей**, если

$$\forall n \in \mathbb{N} : x_n \geq x_{n+1}.$$



Условия сходимости последовательности

Определение

Возрастающие и убывающие последовательности называются **МОНОТОННЫМИ**.



Теорема (достаточное условие сходимости,
теорема Вейерштрасса)



Условия сходимости последовательности

Теорема (достаточное условие сходимости,
теорема Вейерштрасса)

Всякая возрастающая (убывающая) и ограниченная сверху (снизу) последовательность имеет конечный предел.



Условия сходимости последовательности

Пример:



Условия сходимости последовательности

Пример:

$$x_n = 1 - \frac{1}{n},$$



Условия сходимости последовательности

Пример:

$$x_n = 1 - \frac{1}{n},$$

$$\forall n \quad x_n < 1$$

(ограниченность),



Условия сходимости последовательности

Пример:

$$x_n = 1 - \frac{1}{n},$$

$$\forall n \quad x_n < 1$$

(ограниченность),

$$\forall n \quad x_n < x_{n+1}$$

(возрастание),



Условия сходимости последовательности

Пример:

$$x_n = 1 - \frac{1}{n},$$

$$\forall n \quad x_n < 1$$

(ограниченность),

$$\forall n \quad x_n < x_{n+1}$$

(возрастание),



$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$$



Условия сходимости последовательности

Пример:

$$x_n = 1 - \frac{1}{n},$$

$$\forall n \quad x_n < 1$$

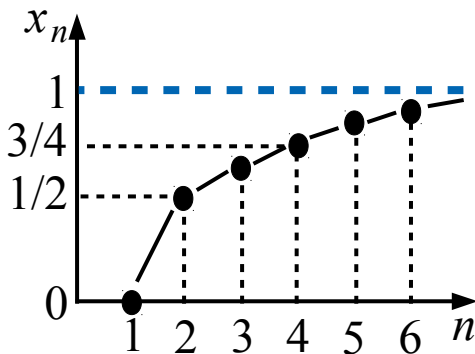
(ограниченность),

$$\forall n \quad x_n < x_{n+1}$$

(возрастание),



$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$$



Бесконечный предел



Бесконечный предел

Определение

Бесконечное число ∞ называется

бесконечным пределом
последовательности $\{x_n\}$, если



Бесконечный предел

Определение

Бесконечное число ∞ называется

бесконечным пределом

последовательности $\{x_n\}$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n(\varepsilon) : |x_n| > \varepsilon.$$



Бесконечный предел

Определение

Бесконечное число ∞ называется

бесконечным пределом

последовательности $\{x_n\}$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n(\varepsilon) : |x_n| > \varepsilon.$$

Обозначение: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$.



Бесконечный предел

Частные случаи:



Частные случаи:

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$, если



Бесконечный предел

Частные случаи:

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n(\varepsilon) : x_n > \varepsilon$$



Бесконечный предел

Частные случаи:

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n(\varepsilon) : x_n > \varepsilon$$

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$, если



Бесконечный предел

Частные случаи:

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n(\varepsilon) : x_n > \varepsilon$$

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n(\varepsilon) : x_n < -\varepsilon$$



Бесконечный предел

Примеры:



Бесконечный предел

Примеры: Частные случаи



Бесконечный предел

Примеры: Частные случаи

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$$



Бесконечный предел

Примеры: Частные случаи

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$$

$$x_n = n$$

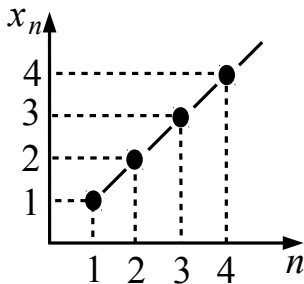


Бесконечный предел

Примеры: Частные случаи

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$$

$$x_n = n$$



Бесконечный предел

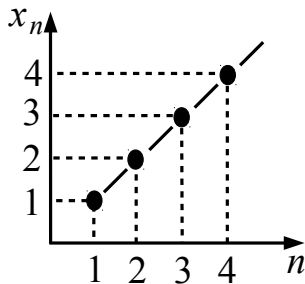
Примеры:

Частные случаи

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$$

$$x_n = n$$



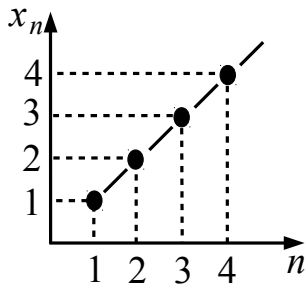
Бесконечный предел

Примеры:

Частные случаи

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$$

$$x_n = n$$



$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$$

$$x_n = -n$$



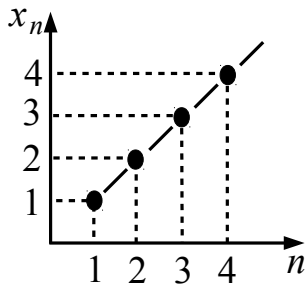
Бесконечный предел

Примеры:

Частные случаи

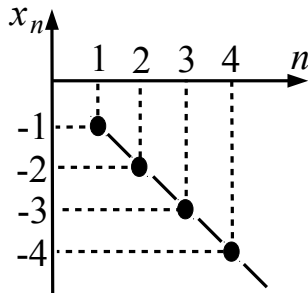
$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$$

$$x_n = n$$



$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$$

$$x_n = -n$$



Бесконечный предел

Примеры: Общий случай



Бесконечный предел

Примеры: Общий случай

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$$



Бесконечный предел

Примеры: Общий случай

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$$

$$x_n = (-1)^{n+1} \cdot n$$



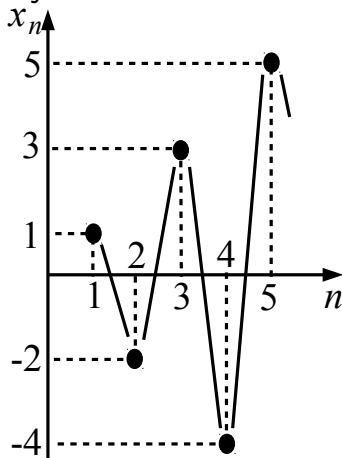
Бесконечный предел

Примеры:

Общий случай

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$$

$$x_n = (-1)^{n+1} \cdot n$$



Бесконечный предел

Знак перед ∞ несет дополнительную информацию о поведении последовательности.



Бесконечный предел

Знак перед ∞ несет дополнительную информацию о поведении последовательности. Мы ставим знак “+”, если последовательность движется вверх в сторону положительной бесконечности,



Бесконечный предел

Знак перед ∞ несет дополнительную информацию о поведении последовательности. Мы ставим знак “+”, если последовательность движется вверх в сторону положительной бесконечности, и знак “—”, если она идет вниз в сторону отрицательной бесконечности.



Бесконечный предел

Знак перед ∞ несет дополнительную информацию о поведении последовательности. Мы ставим знак “+”, если последовательность движется вверх в сторону положительной бесконечности, и знак “—”, если она идет вниз в сторону отрицательной бесконечности. Если направление движения однозначно определить нельзя, то знак перед ∞ не ставится.



Замечание



Замечание

Для любой числовой последовательности может реализоваться **только один** из трех исходов:



Замечание

Для любой числовой последовательности может реализоваться **только один** из трех исходов:

1) последовательность **не имеет предела**,



Бесконечный предел

Замечание

Для любой числовой последовательности может реализоваться **только один** из трех исходов:

- 1) последовательность **не имеет предела**,
- 2) последовательность имеет **конечный предел**,



Бесконечный предел

Замечание

Для любой числовой последовательности может реализоваться **только один** из трех исходов:

- 1) последовательность **не имеет предела**,
- 2) последовательность имеет **конечный предел**,
- 3) последовательность имеет **бесконечный предел**.



Бесконечно большая и малая последовательности



Бесконечно большая и малая последовательности

Определение

Последовательность $\{x_n\}$ называется
бесконечно большой, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty.$$



Бесконечно большая и малая последовательности

Определение

Последовательность $\{x_n\}$ называется
бесконечно большой, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty.$$

Определение

Последовательность $\{x_n\}$ называется
бесконечно малой, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0.$$



Бесконечно большая и малая последовательности

Свойства бесконечно малых последовательностей:



Бесконечно большая и малая последовательности

Свойства бесконечно малых последовательностей:

- 1) если $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ – бесконечно малые, то
 $\{x_n + y_n\}$ – бесконечно малая,



Бесконечно большая и малая последовательности

Свойства бесконечно малых последовательностей:

- 1) если $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ – бесконечно малые, то
 $\{x_n + y_n\}$ – бесконечно малая,
- 2) если $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ – бесконечно малые, то
 $\{x_n \cdot y_n\}$ – бесконечно малая,



Бесконечно большая и малая последовательности

Свойства бесконечно малых последовательностей:

- 1) если $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ – бесконечно малые, то
 $\{x_n + y_n\}$ – бесконечно малая,
- 2) если $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ – бесконечно малые, то
 $\{x_n \cdot y_n\}$ – бесконечно малая,
- 3) если $\{x_n\}$ – бесконечно малая и $\{y_n\}$ –
ограниченная, то $\{x_n \cdot y_n\}$ – бесконечно малая.



Бесконечно большая и малая последовательности

Связь между бесконечно малой и бесконечно
большой последовательностями:



Бесконечно большая и малая последовательности

Связь между бесконечно малой и бесконечно большой последовательностями:

1. Если $\{x_n\}$ – бесконечно большая,
то $\{1/x_n\}$ – бесконечно малая.



Бесконечно большая и малая последовательности

Связь между бесконечно малой и бесконечно большой последовательностями:

1. Если $\{x_n\}$ – бесконечно большая,
то $\{1/x_n\}$ – бесконечно малая.
2. Если $\{x_n\}$ – бесконечно малая и $\forall n: x_n \neq 0$,
то $\{1/x_n\}$ – бесконечно большая.



Бесконечно большая и малая последовательности

Символически это можно записать в виде:

$$\frac{1}{\infty} = 0, \quad \frac{1}{0} = \infty.$$



Бесконечно большая и малая последовательности

Символически это можно записать в виде:

$$\frac{1}{\infty} = 0, \quad \frac{1}{0} = \infty.$$

Примеры:



Бесконечно большая и малая последовательности

Символически это можно записать в виде:

$$\frac{1}{\infty} = 0, \quad \frac{1}{0} = \infty.$$

Примеры:

$\{n\}$ – бесконечно большая, $\lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$

$\{1/n\}$ – бесконечно малая, $\lim_{n \rightarrow \infty} 1/n = 0$



Теоремы о конечных и бесконечных пределах



Теоремы о конечных и бесконечных пределах

В этих теоремах под пределами понимаются как конечный, так и определенного знака бесконечный пределы, т.е. либо число, либо $+\infty$, либо $-\infty$. Случай, когда предел равен ∞ , не рассматривается.



Теоремы о конечных и бесконечных пределах

Теорема (единственность предела)



Теоремы о конечных и бесконечных пределах

Теорема (единственность предела)

Последовательность точек расширенной числовой прямой $\overline{R}$ может иметь на этой прямой **только один** предел.



Теоремы о конечных и бесконечных пределах

Теорема (предельный переход в неравенствах)



Теоремы о конечных и бесконечных пределах

Теорема (предельный переход в неравенствах)

Если $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$, где $a \in \overline{\mathbb{R}}$, и
 $\forall n : x_n \leq y_n \leq z_n$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$



Число e



Число e

Число e определяется как предел числовой последовательности

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$



Число e

Число e определяется как предел числовой последовательности

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$



Число e

Число e определяется как предел числовой последовательности

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Приближенные оценки дают, что

$$e \approx 2.718281828459045.$$



Число e

Число e определяется как предел числовой последовательности

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Приближенные оценки дают, что

$$e \approx 2.718281828459045.$$

В приближенных вычислениях обычно полагают

$$e \approx 2.72.$$



Число e

Число e является основанием
экспоненциальной функции $y = e^x$



Число e

Число e является основанием
экспоненциальной функции $y = e^x$ и
натурального логарифма $y = \ln x = \log_e x$.



Число e

Число e является основанием экспоненциальной функции $y = e^x$ и натурального логарифма $y = \ln x = \log_e x$. Также через e определяются гиперболические функции.



1) гиперболический синус

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$



1) гиперболический синус

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

2) гиперболический косинус

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$



3) гиперболический тангенс

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$$



3) гиперболический тангенс

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$$

4) гиперболический котангенс

$$\operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$$



Экономическое приложение:



Число e

Экономическое приложение:

В экономических моделях число e используется для вычисления доходности банковских вкладов при непрерывном начислении и капитализации процентов.



Экономическое приложение:

В экономических моделях число e используется для вычисления доходности банковских вкладов при непрерывном начислении и капитализации процентов. Допустим, мы открыли в банке вклад размером S рублей с годовой процентной ставкой r .



Экономическое приложение:

В экономических моделях число e используется для вычисления доходности банковских вкладов при непрерывном начислении и капитализации процентов. Допустим, мы открыли в банке вклад размером S рублей с годовой процентной ставкой r . По условиям вклада начисление процентов и их капитализация происходит n раз в год.



Экономическое приложение:

Тогда через m лет размер вклада составит

$$K_n = S \cdot \left(1 + \frac{r}{100n}\right)^{m \cdot n}.$$



Экономическое приложение:

Тогда через m лет размер вклада составит

$$K_n = S \cdot \left(1 + \frac{r}{100n}\right)^{m \cdot n}.$$

Соответственно, при непрерывном начислении процентов и их капитализации мы будем иметь

$$K = \lim_{n \rightarrow \infty} K_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S \cdot \left(1 + \frac{r}{100n}\right)^{m \cdot n} = S \cdot e^{rm/100}$$

