

Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана
Факультет “Фундаментальные науки”
Кафедра “Высшая математика”

Математический анализ
Модуль 1
Элементарные функции
и пределы числовых последовательностей

Лекция 1.2

для ГУИМЦ, 2026

к.ф.-м.н. Семакин А.Н.

Принцип вложенных отрезков



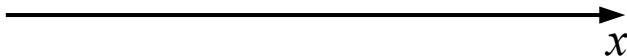
Принцип вложенных отрезков

Рассмотрим бесконечную последовательность отрезков $[a_1, b_1], [a_2, b_2], \dots, [a_n, b_n], \dots$



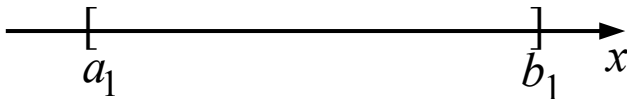
Принцип вложенных отрезков

Рассмотрим бесконечную последовательность отрезков $[a_1, b_1], [a_2, b_2], \dots, [a_n, b_n], \dots$



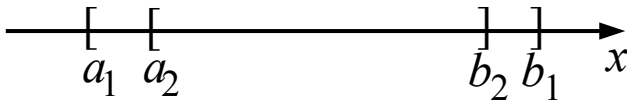
Принцип вложенных отрезков

Рассмотрим бесконечную последовательность отрезков $[a_1, b_1], [a_2, b_2], \dots, [a_n, b_n], \dots$



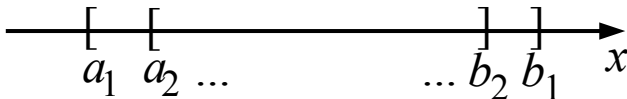
Принцип вложенных отрезков

Рассмотрим бесконечную последовательность отрезков $[a_1, b_1], [a_2, b_2], \dots, [a_n, b_n], \dots$



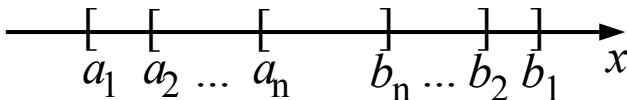
Принцип вложенных отрезков

Рассмотрим бесконечную последовательность отрезков $[a_1, b_1], [a_2, b_2], \dots, [a_n, b_n], \dots$



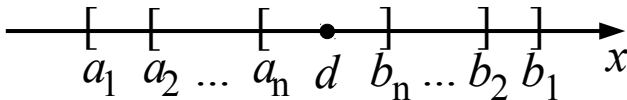
Принцип вложенных отрезков

Рассмотрим бесконечную последовательность отрезков $[a_1, b_1], [a_2, b_2], \dots, [a_n, b_n], \dots$



Принцип вложенных отрезков

Рассмотрим бесконечную последовательность отрезков $[a_1, b_1], [a_2, b_2], \dots, [a_n, b_n], \dots$



Принцип вложенных отрезков

Определение

Система отрезков $[a_1, b_1], [a_2, b_2], \dots, [a_n, b_n], \dots$ называется **системой вложенных**

отрезков, если

$$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq \dots \leq b_n \leq \dots \leq b_2 \leq b_1.$$



Принцип вложенных отрезков

Определение

Говорят, что **длина вложенных отрезков** стремится к нулю, если



Принцип вложенных отрезков

Определение

Говорят, что **длина вложенных отрезков стремится к нулю**, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n(\varepsilon) : |b_n - a_n| < \varepsilon.$$



Принцип вложенных отрезков

Расшифровка математических символов:



Принцип вложенных отрезков

Расшифровка математических символов:

$\forall \varepsilon > 0$ – для любого положительного ε



Принцип вложенных отрезков

Расшифровка математических символов:

$\forall \varepsilon > 0$ – для любого положительного ε

$\exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ – существует натуральное число n ,
зависящее от ε , такое что



Принцип вложенных отрезков

Расшифровка математических символов:

$\forall \varepsilon > 0$ – для любого положительного ε

$\exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ – существует натуральное число n ,
зависящее от ε , такое что

$\forall n > n(\varepsilon)$ – для любого натурального числа n ,
превосходящего $n(\varepsilon)$



Принцип вложенных отрезков

Расшифровка математических символов:

$\forall \varepsilon > 0$ – для любого положительного ε

$\exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ – существует натуральное число n ,
зависящее от ε , такое что

$\forall n > n(\varepsilon)$ – для любого натурального числа n ,
превосходящего $n(\varepsilon)$

: – выполняется



Принцип вложенных отрезков

Расшифровка математических символов:

$\forall \varepsilon > 0$ – для любого положительного ε

$\exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ – существует натуральное число n ,
зависящее от ε , такое что

$\forall n > n(\varepsilon)$ – для любого натурального числа n ,
превосходящего $n(\varepsilon)$

: – выполняется

$|b_n - a_n| < \varepsilon$ – модуль разности b_n и a_n меньше ε



Принцип вложенных отрезков

Теорема (принцип вложенных отрезков)



Принцип вложенных отрезков

Теорема (принцип вложенных отрезков)

Для всякой системы вложенных отрезков $[a_n, b_n]$, $n = 1, 2, \dots$ с длинами, стремящимися к нулю, существует **единственная** точка d , которая принадлежит всем отрезкам системы, причем



Принцип вложенных отрезков

Теорема (принцип вложенных отрезков)

Для всякой системы вложенных отрезков $[a_n, b_n]$, $n = 1, 2, \dots$ с длинами, стремящимися к нулю, существует **единственная** точка d , которая принадлежит всем отрезкам системы, причем

$$d = \sup\{a_n\} = \inf\{b_n\}.$$



Числовая функция



Числовая функция

Определение

Числовая функция – это правило, ставящее в соответствие каждому элементу некоторого числового множества X некоторое число из множества действительных чисел.



Числовая функция

Определение

Числовая функция – это правило, ставящее в соответствие каждому элементу некоторого числового множества X некоторое число из множества действительных чисел.

Обозначение: $y = f(x)$



Числовая функция

Определение

Числовая функция – это правило, ставящее в соответствие каждому элементу некоторого числового множества X некоторое число из множества действительных чисел.

Обозначение: $y = f(x)$

x – независимая переменная



Числовая функция

Определение

Числовая функция – это правило, ставящее в соответствие каждому элементу некоторого числового множества X некоторое число из множества действительных чисел.

Обозначение: $y = f(x)$

x – независимая переменная

y – зависимая переменная



Числовая функция

Определение

Числовая функция – это правило, ставящее в соответствие каждому элементу некоторого числового множества X некоторое число из множества действительных чисел.

Обозначение: $y = f(x)$

x – независимая переменная

y – зависимая переменная

$X = D(f)$ – область определения



Числовая функция

Определение

Графиком функции $y = f(x)$ называется множество точек $(x, f(x))$, где $x \in X$.



Определение

Пусть дана функция $y = f(x)$. Функция, ставящая в соответствие каждому числу y соответствующее значение x , называется **функцией, обратной данной**, или **обратной функцией**.



Определение

Пусть дана функция $y = f(x)$. Функция, ставящая в соответствие каждому числу y соответствующее значение x , называется **функцией, обратной данной**, или **обратной функцией**.

Обозначение: $x = f^{-1}(y)$



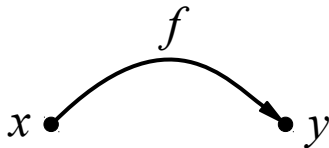
Числовая функция

$x \bullet$

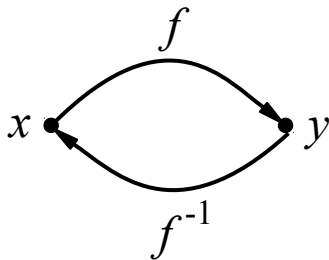
$\bullet y$



Числовая функция



Числовая функция



Определение

Пусть даны функции $y = f(x)$ и $z = g(y)$.

Функция $z = g(f(x))$ называется **сложной функцией** или **композицией функций** или **суперпозицией функций** f и g .



Определение

Пусть даны функции $y = f(x)$ и $z = g(y)$.

Функция $z = g(f(x))$ называется **сложной функцией** или **композицией функций** или **суперпозицией функций** f и g .

Обозначение: $(g \circ f)(x) = g(f(x))$



Числовая функция

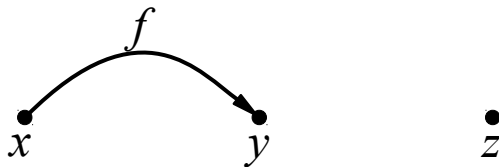
$\dot{x}$

$\dot{y}$

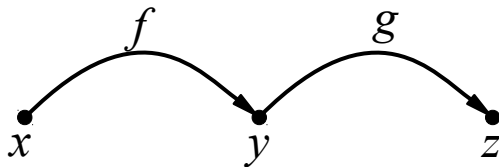
$\dot{z}$



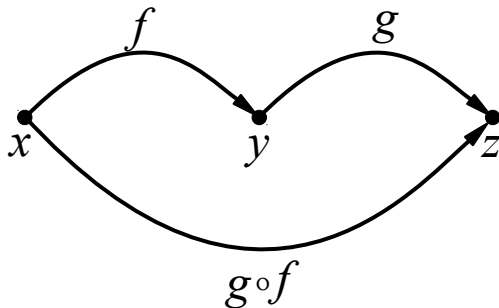
Числовая функция



Числовая функция



Числовая функция



Элементарные функции



Элементарные функции

К основным элементарным функциям
относятся:



Элементарные функции

К основным элементарным функциям
относятся:

1) $y = x^{\alpha}$ – степенная функция



Элементарные функции

К основным элементарным функциям

относятся:

1) $y = x^{\alpha}$ – степенная функция

2) $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$ – показательная
функция



Элементарные функции

К основным элементарным функциям

относятся:

1) $y = x^{\alpha}$ – степенная функция

2) $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$ – показательная
функция

3) $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$ – логарифмическая
функция



Элементарные функции

К основным элементарным функциям

относятся:

4) $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ –
тригонометрические функции



Элементарные функции

К основным элементарным функциям

относятся:

4) $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ –
тригонометрические функции

5) $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$,
 $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$
– обратные тригонометрические функции



Элементарные функции

Определение

Функция называется **элементарной**, если она задана с помощью формулы, содержащей конечное число арифметических операций и суперпозиций основных элементарных функций.



Элементарные функции

Определение

Функция называется **элементарной**, если она задана с помощью формулы, содержащей конечное число арифметических операций и суперпозиций основных элементарных функций.

Примеры: $y = 2x^2 + 3x + 5,$

$$y = \sin(2^x),$$

$$y = \operatorname{tg} \sqrt{x^3 + x^2}.$$



Пример функции, которая не является элементарной:

$$y = \begin{cases} x, & x \leq 0, \\ \sin x, & x > 0. \end{cases}$$



Элементарные функции

Классификация элементарных функций:



Элементарные функции

Классификация элементарных функций:

1) многочлен (полином)



Элементарные функции

Классификация элементарных функций:

1) многочлен (полином)

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$



Классификация элементарных функций:

1) многочлен (полином)

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

2) рациональная функция

(дробно-рациональная функция)



Элементарные функции

Классификация элементарных функций:

1) многочлен (полином)

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

2) рациональная функция

(дробно-рациональная функция)

$$y = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}, \text{ где } P_n(x) \text{ и } Q_m(x) - \text{полиномы,}$$



Элементарные функции

Классификация элементарных функций:

1) многочлен (полином)

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

2) рациональная функция

(дробно-рациональная функция)

$$y = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}, \text{ где } P_n(x) \text{ и } Q_m(x) - \text{полиномы,}$$

3) иррациональная функция



Элементарные функции

Классификация элементарных функций:

1) многочлен (полином)

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

2) рациональная функция

(дробно-рациональная функция)

$$y = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}, \text{ где } P_n(x) \text{ и } Q_m(x) - \text{полиномы,}$$

3) иррациональная функция - это функция, содержащая иррациональности



Элементарные функции

Классификация элементарных функций:

1) многочлен (полином)

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

2) рациональная функция

(дробно-рациональная функция)

$$y = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}, \text{ где } P_n(x) \text{ и } Q_m(x) - \text{полиномы,}$$

3) иррациональная функция - это функция, содержащая иррациональности

$$y = x + \sqrt[3]{x},$$



Элементарные функции

Классификация элементарных функций:

4) трансцендентная функция



Элементарные функции

Классификация элементарных функций:

4) трансцендентная функция - это функция, содержащая в себе различные тригонометрические, обратные тригонометрические, показательные и логарифмические функции.



Элементарные функции

Классификация элементарных функций:

4) трансцендентная функция - это функция, содержащая в себе различные тригонометрические, обратные тригонометрические, показательные и логарифмические функции.

$$y = x + \sqrt{x} + \sin x.$$



Числовая последовательность



Числовая последовательность

Определение

Пусть каждому натуральному числу n поставлено в соответствие действительное число a_n . Совокупность чисел $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ называется **числовой последовательностью**.



Числовая последовательность

Определение

Пусть каждому натуральному числу n поставлено в соответствие действительное число a_n . Совокупность чисел $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ называется **числовой последовательностью**.

Обозначение: $\{a_n\}$



Числовая последовательность

Определение

Пусть каждому натуральному числу n поставлено в соответствие действительное число a_n . Совокупность чисел $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ называется **числовой последовательностью**.

Обозначение: $\{a_n\}$ – числовая последовательность с общим членом a_n .



Числовая последовательность

Определение

Число a_n называется **n -ым членом**
последовательности.



Числовая последовательность

Определение

Число a_n называется **n -ым членом**
последовательности.

Обычно члены последовательности задаются с помощью формулы

$$a_n = f(n),$$



Числовая последовательность

Определение

Число a_n называется **n -ым членом**
последовательности.

Обычно члены последовательности задаются с помощью формулы

$$a_n = f(n),$$

позволяющей найти величину каждого члена a_n по его номеру n .



Числовая последовательность

Определение

Число a_n называется **n -ым членом последовательности**.

Обычно члены последовательности задаются с помощью формулы

$$a_n = f(n),$$

позволяющей найти величину каждого члена a_n по его номеру n .

Примеры:



Числовая последовательность

Определение

Число a_n называется **n -ым членом последовательности**.

Обычно члены последовательности задаются с помощью формулы

$$a_n = f(n),$$

позволяющей найти величину каждого члена a_n по его номеру n .

Примеры: $a_n = 1/2^n$,



Числовая последовательность

Определение

Число a_n называется **n -ым членом последовательности**.

Обычно члены последовательности задаются с помощью формулы

$$a_n = f(n),$$

позволяющей найти величину каждого члена a_n по его номеру n .

Примеры: $a_n = 1/2^n$, $a_n = (-1)^n \cdot n^3$.



Числовая последовательность

Экономический пример:



Экономический пример: Допустим, мы открываем в банке вклад на 10 тыс. руб. под 10% годовых с капитализацией процентов и периодом капитализации 1 год.



Числовая последовательность

Экономический пример: Допустим, мы открываем в банке вклад на 10 тыс. руб. под 10% годовых с капитализацией процентов и периодом капитализации 1 год. Тогда величина вклада по годам будет представлять собой числовую последовательность



Числовая последовательность

Экономический пример: Допустим, мы открываем в банке вклад на 10 тыс. руб. под 10% годовых с капитализацией процентов и периодом капитализации 1 год. Тогда величина вклада по годам будет представлять собой числовую последовательность $a_1 = 10$,



Числовая последовательность

Экономический пример: Допустим, мы открываем в банке вклад на 10 тыс. руб. под 10% годовых с капитализацией процентов и периодом капитализации 1 год. Тогда величина вклада по годам будет представлять собой числовую последовательность $a_1 = 10$, $a_2 = 10 \cdot 1.1$,



Числовая последовательность

Экономический пример: Допустим, мы открываем в банке вклад на 10 тыс. руб. под 10% годовых с капитализацией процентов и периодом капитализации 1 год. Тогда величина вклада по годам будет представлять собой числовую последовательность $a_1 = 10$, $a_2 = 10 \cdot 1.1$, $a_3 = 10 \cdot 1.1^2$,



Числовая последовательность

Экономический пример: Допустим, мы открываем в банке вклад на 10 тыс. руб. под 10% годовых с капитализацией процентов и периодом капитализации 1 год. Тогда величина вклада по годам будет представлять собой числовую последовательность $a_1 = 10$, $a_2 = 10 \cdot 1.1$, $a_3 = 10 \cdot 1.1^2$, ...,



Числовая последовательность

Экономический пример: Допустим, мы открываем в банке вклад на 10 тыс. руб. под 10% годовых с капитализацией процентов и периодом капитализации 1 год. Тогда величина вклада по годам будет представлять собой числовую последовательность $a_1 = 10$, $a_2 = 10 \cdot 1.1$, $a_3 = 10 \cdot 1.1^2$, ..., $a_n = 10 \cdot 1.1^{n-1}$,



Числовая последовательность

Экономический пример: Допустим, мы открываем в банке вклад на 10 тыс. руб. под 10% годовых с капитализацией процентов и периодом капитализации 1 год. Тогда величина вклада по годам будет представлять собой числовую последовательность $a_1 = 10$, $a_2 = 10 \cdot 1.1$, $a_3 = 10 \cdot 1.1^2$, ..., $a_n = 10 \cdot 1.1^{n-1}$, ...,



Числовая последовательность

Экономический пример: Допустим, мы открываем в банке вклад на 10 тыс. руб. под 10% годовых с капитализацией процентов и периодом капитализации 1 год. Тогда величина вклада по годам будет представлять собой числовую последовательность $a_1 = 10$, $a_2 = 10 \cdot 1.1$, $a_3 = 10 \cdot 1.1^2$, ..., $a_n = 10 \cdot 1.1^{n-1}$, ..., где a_n - размер вклада в течение n -ого года.



Конечный предел



Конечный предел

Определение

Конечное число a называется **конечным пределом** последовательности $\{a_n\}$, если



Конечный предел

Определение

Конечное число a называется **конечным пределом** последовательности $\{a_n\}$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n(\varepsilon) : |a_n - a| < \varepsilon.$$



Конечный предел

Определение

Конечное число a называется **конечным пределом** последовательности $\{a_n\}$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n(\varepsilon) : |a_n - a| < \varepsilon.$$

Обозначение: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.



Конечный предел

Определение

Конечное число a называется **конечным пределом** последовательности $\{a_n\}$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n(\varepsilon) : |a_n - a| < \varepsilon.$$

Обозначение: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

Здесь a – конечное число, т.е. $a \neq \pm\infty$.



Конечный предел

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n(\varepsilon): |a_n - a| < \varepsilon$$



Конечный предел

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n(\varepsilon): |a_n - a| < \varepsilon$$
$$n(\varepsilon) = 1$$



Конечный предел

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n(\varepsilon): |a_n - a| < \varepsilon$$

$$n(\varepsilon) = 1$$

$$\forall n > 1: |a_n - a| < \varepsilon$$



Конечный предел

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n(\varepsilon): |a_n - a| < \varepsilon$$

$$n(\varepsilon) = 1$$

$$n(\varepsilon/2) = 2$$

$$\forall n > 1: |a_n - a| < \varepsilon$$



Конечный предел

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n(\varepsilon): |a_n - a| < \varepsilon$$

$$n(\varepsilon) = 1$$

$$n(\varepsilon/2) = 2$$

$$\forall n > 1: |a_n - a| < \varepsilon$$

$$\forall n > 2: |a_n - a| < \varepsilon/2$$



Конечный предел

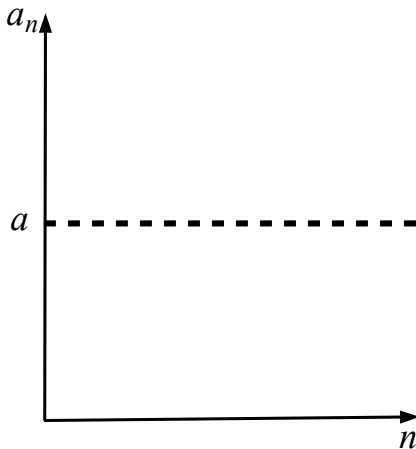
$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n(\varepsilon): |a_n - a| < \varepsilon$$

$$n(\varepsilon) = 1$$

$$n(\varepsilon/2) = 2$$

$$\forall n > 1: |a_n - a| < \varepsilon$$

$$\forall n > 2: |a_n - a| < \varepsilon/2$$



Конечный предел

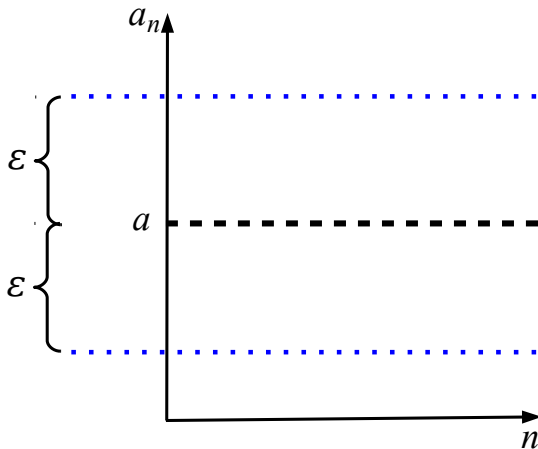
$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n(\varepsilon): |a_n - a| < \varepsilon$$

$$n(\varepsilon) = 1$$

$$n(\varepsilon/2) = 2$$

$$\forall n > 1: |a_n - a| < \varepsilon$$

$$\forall n > 2: |a_n - a| < \varepsilon/2$$



Конечный предел

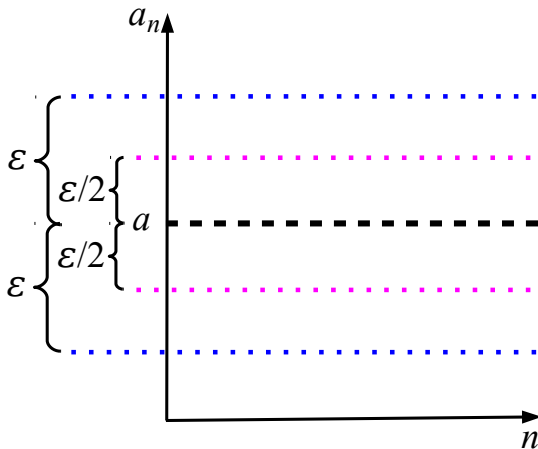
$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n(\varepsilon): |a_n - a| < \varepsilon$$

$$n(\varepsilon) = 1$$

$$n(\varepsilon/2) = 2$$

$$\forall n > 1: |a_n - a| < \varepsilon$$

$$\forall n > 2: |a_n - a| < \varepsilon/2$$



Конечный предел

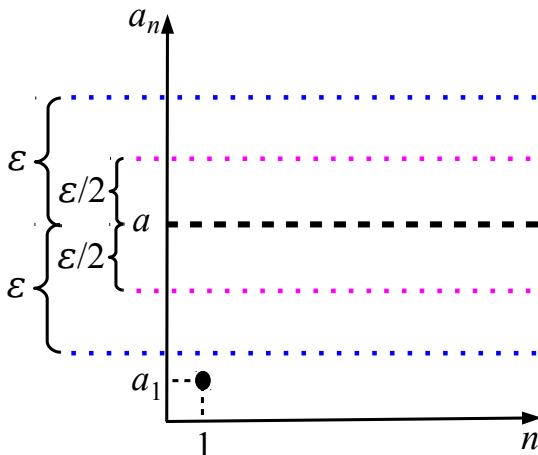
$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n(\varepsilon): |a_n - a| < \varepsilon$$

$$n(\varepsilon) = 1$$

$$n(\varepsilon/2) = 2$$

$$\forall n > 1: |a_n - a| < \varepsilon$$

$$\forall n > 2: |a_n - a| < \varepsilon/2$$



Конечный предел

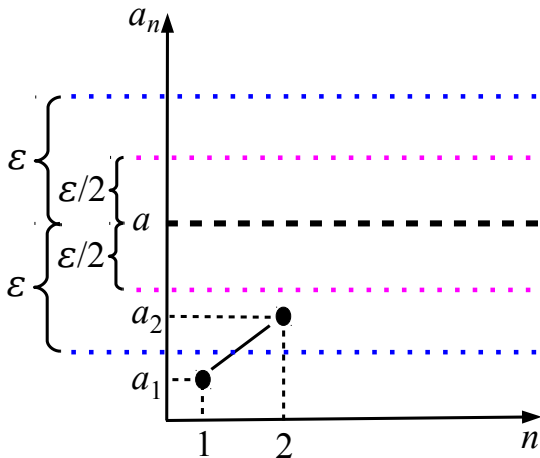
$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n(\varepsilon): |a_n - a| < \varepsilon$$

$$n(\varepsilon) = 1$$

$$n(\varepsilon/2) = 2$$

$$\forall n > 1: |a_n - a| < \varepsilon$$

$$\forall n > 2: |a_n - a| < \varepsilon/2$$



Конечный предел

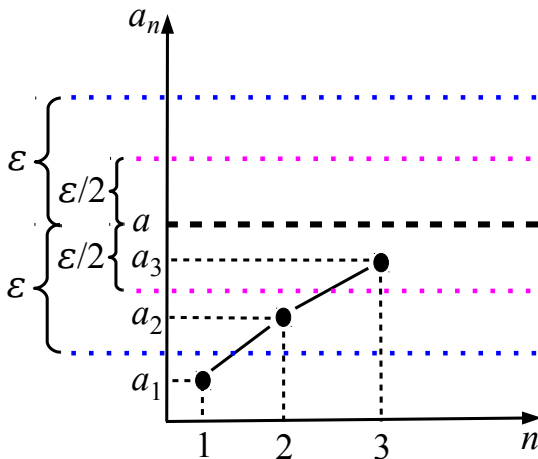
$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n(\varepsilon): |a_n - a| < \varepsilon$$

$$n(\varepsilon) = 1$$

$$n(\varepsilon/2) = 2$$

$$\forall n > 1: |a_n - a| < \varepsilon$$

$$\forall n > 2: |a_n - a| < \varepsilon/2$$



Конечный предел

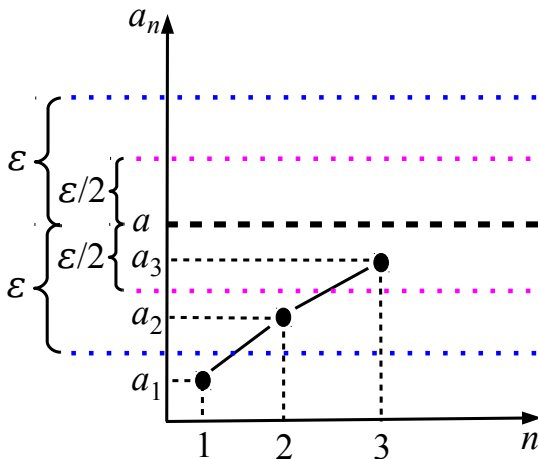
$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n(\varepsilon): |a_n - a| < \varepsilon$$

$$n(\varepsilon) = 1$$

$$n(\varepsilon/2) = 2$$

$$> 1: |a_n - a| < \varepsilon$$

$$\forall n > 2: |a_n - a| < \varepsilon/2$$



Конечный предел

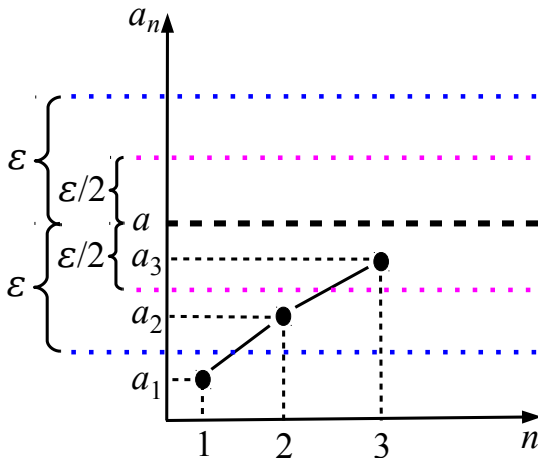
$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n(\varepsilon): |a_n - a| < \varepsilon$$

$$= 1$$

$$- a| < \varepsilon$$

$$n(\varepsilon/2) = 2$$

$$\forall n > 2: |a_n - a| < \varepsilon/2$$

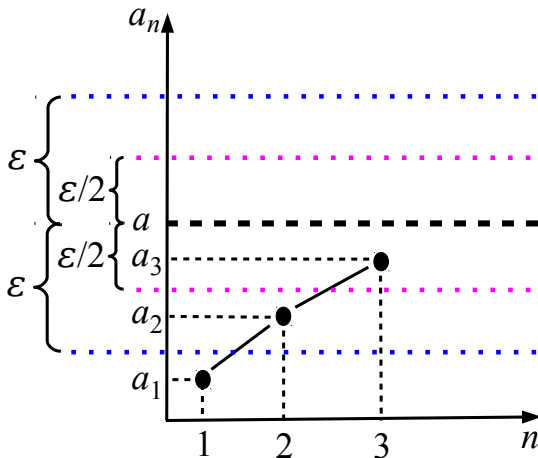


Конечный предел

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n(\varepsilon): |a_n - a| < \varepsilon$$

$$n(\varepsilon/2) = 2$$

$$\forall n > 2: |a_n - a| < \varepsilon/2$$



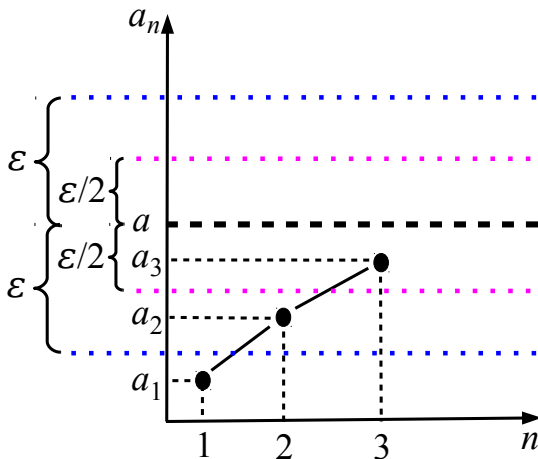
Конечный предел

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n(\varepsilon): |a_n - a| < \varepsilon$$

$$n(\varepsilon/2) = 2$$

$$n(\varepsilon/4) = 3$$

$$\forall n > 2: |a_n - a| < \varepsilon/2$$



Конечный предел

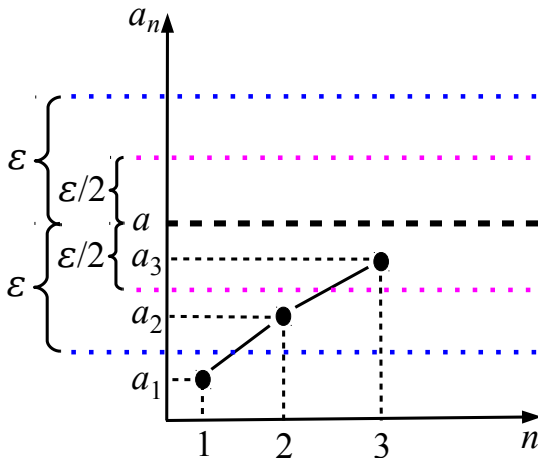
$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n(\varepsilon): |a_n - a| < \varepsilon$$

$$n(\varepsilon/2) = 2$$

$$n(\varepsilon/4) = 3$$

$$\forall n > 2: |a_n - a| < \varepsilon/2$$

$$\forall n > 3: |a_n - a| < \varepsilon/4$$



Конечный предел

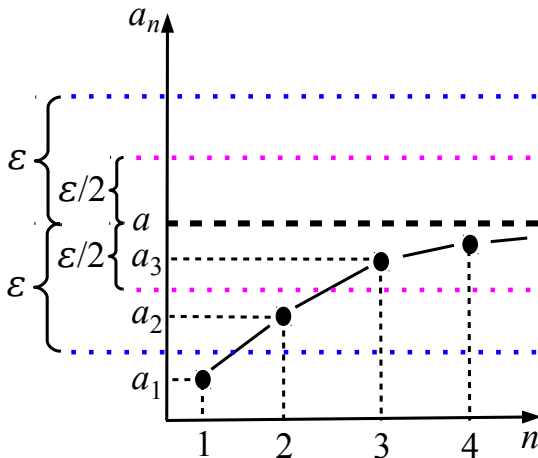
$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n(\varepsilon): |a_n - a| < \varepsilon$$

$$n(\varepsilon/2) = 2$$

$$n(\varepsilon/4) = 3$$

$$\forall n > 2: |a_n - a| < \varepsilon/2$$

$$\forall n > 3: |a_n - a| < \varepsilon/4$$



Конечный предел

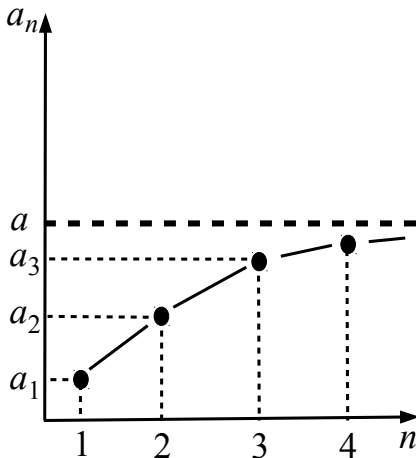
$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n(\varepsilon): |a_n - a| < \varepsilon$$

$$n(\varepsilon/2) = 2$$

$$n(\varepsilon/4) = 3$$

$$\forall n > 2: |a_n - a| < \varepsilon/2$$

$$\forall n > 3: |a_n - a| < \varepsilon/4$$



Конечный предел

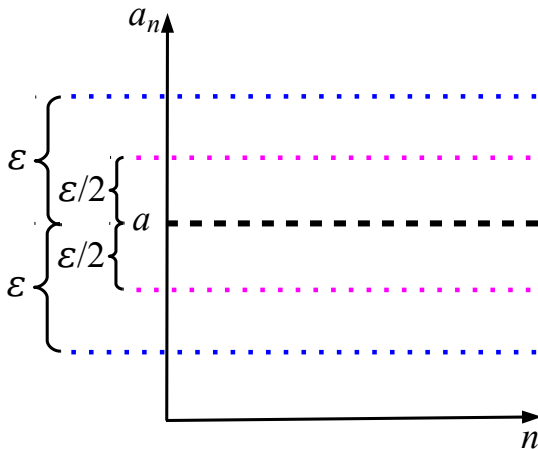
$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n(\varepsilon): |a_n - a| < \varepsilon$$

$$n(\varepsilon/2) = 2$$

$$n(\varepsilon/4) = 3$$

$$\forall n > 2: |a_n - a| < \varepsilon/2$$

$$\forall n > 3: |a_n - a| < \varepsilon/4$$



Конечный предел

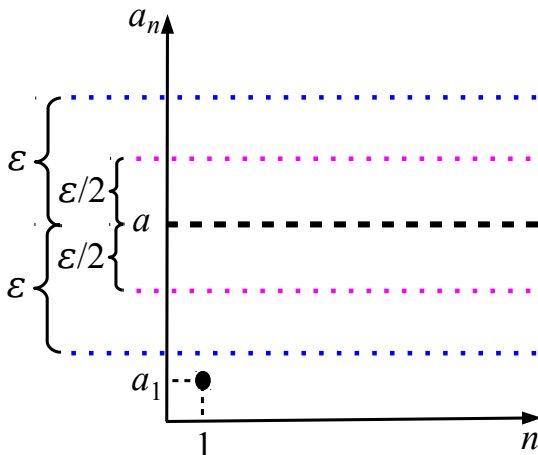
$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n(\varepsilon): |a_n - a| < \varepsilon$$

$$n(\varepsilon/2) = 2$$

$$n(\varepsilon/4) = 3$$

$$\forall n > 2: |a_n - a| < \varepsilon/2$$

$$\forall n > 3: |a_n - a| < \varepsilon/4$$



Конечный предел

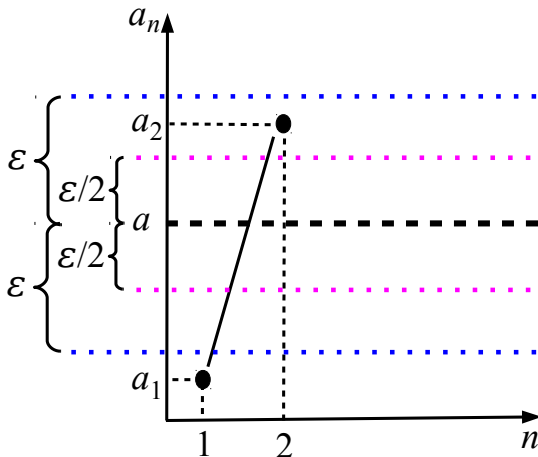
$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n(\varepsilon): |a_n - a| < \varepsilon$$

$$n(\varepsilon/2) = 2$$

$$n(\varepsilon/4) = 3$$

$$\forall n > 2: |a_n - a| < \varepsilon/2$$

$$\forall n > 3: |a_n - a| < \varepsilon/4$$



Конечный предел

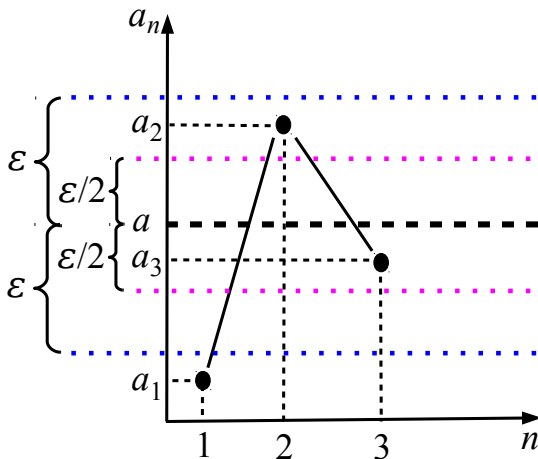
$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n(\varepsilon): |a_n - a| < \varepsilon$$

$$n(\varepsilon/2) = 2$$

$$n(\varepsilon/4) = 3$$

$$\forall n > 2: |a_n - a| < \varepsilon/2$$

$$\forall n > 3: |a_n - a| < \varepsilon/4$$



Конечный предел

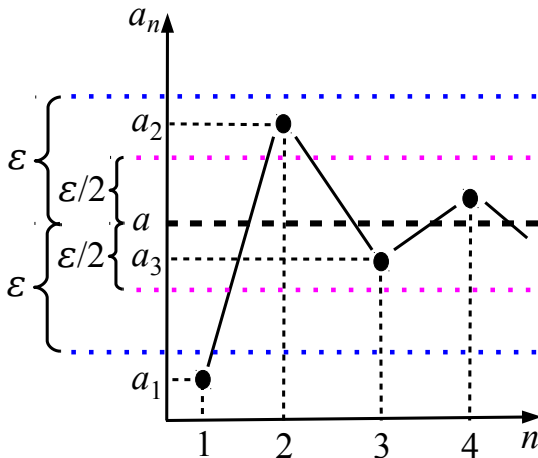
$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n(\varepsilon): |a_n - a| < \varepsilon$$

$$n(\varepsilon/2) = 2$$

$$n(\varepsilon/4) = 3$$

$$\forall n > 2: |a_n - a| < \varepsilon/2$$

$$\forall n > 3: |a_n - a| < \varepsilon/4$$



Конечный предел

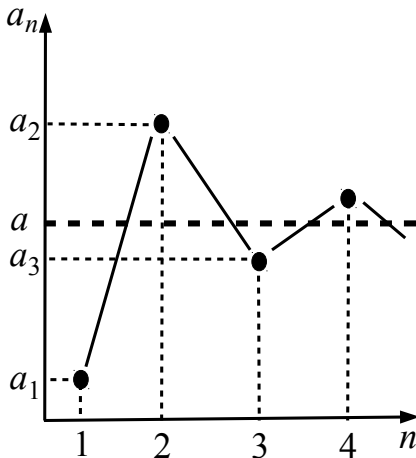
$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n(\varepsilon): |a_n - a| < \varepsilon$$

$$n(\varepsilon/2) = 2$$

$$n(\varepsilon/4) = 3$$

$$\forall n > 2: |a_n - a| < \varepsilon/2$$

$$\forall n > 3: |a_n - a| < \varepsilon/4$$



Конечный предел

Как видно из представленных рисунков, конечный предел a – это число, к которому постепенно приближаются члены числовой последовательности a_n (черные точки на рисунках) по мере увеличения их номера n ,



Конечный предел

Как видно из представленных рисунков, конечный предел a – это число, к которому постепенно приближаются члены числовой последовательности a_n (черные точки на рисунках) по мере увеличения их номера n , при этом способ приближения может различаться у разных последовательностей (сравните варианты 1 и 2).



Конечный предел

Определение

Если последовательность имеет **конечный** предел, то она называется **сходящейся**.

В противном случае она называется **расходящейся**.



Конечный предел

Арифметические свойства конечных пределов*



Конечный предел

Арифметические свойства конечных пределов*

Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, где

a и b – конечные числа.



Конечный предел

Арифметические свойства конечных пределов*

Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, где

a и b – конечные числа.

Тогда



Конечный предел

Арифметические свойства конечных пределов*

Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, где

a и b – конечные числа.

Тогда

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b,$$



Конечный предел

Арифметические свойства конечных пределов*

Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, где

a и b – конечные числа.

Тогда

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b,$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = a - b,$$



Конечный предел

Арифметические свойства конечных пределов*

Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, где

a и b – конечные числа.

Тогда

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b,$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = a - b,$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b,$$



Арифметические свойства конечных пределов*

Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, где

a и b – конечные числа.

Тогда

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b,$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = a - b,$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b,$$

$$4) \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n / b_n) = a / b, \text{ если } b \neq 0.$$



Доказательство свойства 1



Доказательство свойства 1

Дано:



Конечный предел

Доказательство свойства 1

Дано: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$



Доказательство свойства 1

Дано: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$



Конечный предел

Доказательство свойства 1

Дано: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$

Доказать:



Конечный предел

Доказательство свойства 1

Дано: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$$

Доказать: $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b$



Конечный предел

По определению предела имеем:



Конечный предел

По определению предела имеем:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$



Конечный предел

По определению предела имеем:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$
$$\Downarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_1(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n_1(\varepsilon): |a_n - a| < \varepsilon$$



Конечный предел

По определению предела имеем:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$
$$\Downarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_1(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n_1(\varepsilon): |a_n - a| < \varepsilon$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$$



Конечный предел

По определению предела имеем:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$
$$\Downarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_1(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n_1(\varepsilon): |a_n - a| < \varepsilon$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$$
$$\Downarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_2(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n_2(\varepsilon): |b_n - b| < \varepsilon$$



Конечный предел

Пусть $n(\varepsilon) = \max\{n_1(\varepsilon), n_2(\varepsilon)\}$.



Конечный предел

Пусть $n(\varepsilon) = \max\{n_1(\varepsilon), n_2(\varepsilon)\}$.

Тогда $\forall n > n(\varepsilon)$ будут одновременно выполняться неравенства

$$|a_n - a| < \varepsilon \text{ и } |b_n - b| < \varepsilon,$$



Конечный предел

Пусть $n(\varepsilon) = \max\{n_1(\varepsilon), n_2(\varepsilon)\}$.

Тогда $\forall n > n(\varepsilon)$ будут одновременно выполняться неравенства

$$|a_n - a| < \varepsilon \text{ и } |b_n - b| < \varepsilon,$$

из которых следует



Конечный предел

Пусть $n(\varepsilon) = \max\{n_1(\varepsilon), n_2(\varepsilon)\}$.

Тогда $\forall n > n(\varepsilon)$ будут одновременно выполняться неравенства

$$|a_n - a| < \varepsilon \text{ и } |b_n - b| < \varepsilon,$$

из которых следует

$$|a_n + b_n - (a + b)|$$



Конечный предел

Пусть $n(\varepsilon) = \max\{n_1(\varepsilon), n_2(\varepsilon)\}$.

Тогда $\forall n > n(\varepsilon)$ будут одновременно выполняться неравенства

$$|a_n - a| < \varepsilon \text{ и } |b_n - b| < \varepsilon,$$

из которых следует

$$|a_n + b_n - (a + b)| = |a_n - a + b_n - b|$$



Конечный предел

Пусть $n(\varepsilon) = \max\{n_1(\varepsilon), n_2(\varepsilon)\}$.

Тогда $\forall n > n(\varepsilon)$ будут одновременно выполняться неравенства

$$|a_n - a| < \varepsilon \text{ и } |b_n - b| < \varepsilon,$$

из которых следует

$$\begin{aligned} |a_n + b_n - (a + b)| &= |a_n - a + b_n - b| \leq \\ &\leq |a_n - a| + |b_n - b| \end{aligned}$$



Конечный предел

Пусть $n(\varepsilon) = \max\{n_1(\varepsilon), n_2(\varepsilon)\}$.

Тогда $\forall n > n(\varepsilon)$ будут одновременно выполняться неравенства

$$|a_n - a| < \varepsilon \text{ и } |b_n - b| < \varepsilon,$$

из которых следует

$$\begin{aligned} |a_n + b_n - (a + b)| &= |a_n - a + b_n - b| \leq \\ &\leq |a_n - a| + |b_n - b| < \varepsilon + \varepsilon \end{aligned}$$



Конечный предел

Пусть $n(\varepsilon) = \max\{n_1(\varepsilon), n_2(\varepsilon)\}$.

Тогда $\forall n > n(\varepsilon)$ будут одновременно выполняться неравенства

$$|a_n - a| < \varepsilon \text{ и } |b_n - b| < \varepsilon,$$

из которых следует

$$\begin{aligned} |a_n + b_n - (a + b)| &= |a_n - a + b_n - b| \leq \\ &\leq |a_n - a| + |b_n - b| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon. \end{aligned}$$



Таким образом, получается



Конечный предел

Таким образом, получается

$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n(\varepsilon):$

$$|a_n + b_n - (a + b)| < 2\varepsilon.$$



Конечный предел

Таким образом, получается

$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n(\varepsilon):$

$$|a_n + b_n - (a + b)| < 2\varepsilon.$$

Это означает согласно определению предела



Конечный предел

Таким образом, получается

$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n(\varepsilon):$

$$|a_n + b_n - (a + b)| < 2\varepsilon.$$

Это означает согласно определению предела

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b. \blacksquare$$

