

Математический анализ

Модуль 1

Элементарные функции и пределы числовых последовательностей

Лекция 1.2

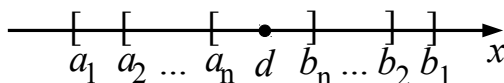
(для ГУИМЦ, 2026)

Аннотация

Принцип вложенных отрезков. Числовая функция. Основные элементарные функции. Элементарная функция. Числовая последовательность. Конечный предел числовой последовательности.

1 Принцип вложенных отрезков

Рассмотрим бесконечную последовательность отрезков $[a_1, b_1], [a_2, b_2], \dots, [a_n, b_n], \dots$



Определение

Система отрезков $[a_1, b_1], [a_2, b_2], \dots, [a_n, b_n], \dots$ называется **системой вложенных отрезков**, если

$$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq \dots \leq b_n \leq \dots \leq b_2 \leq b_1.$$

Определение

Говорят, что **длина вложенных отрезков стремится к нулю**, если $\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n(\varepsilon): |b_n - a_n| < \varepsilon$.

Расшифровка математических символов:

$\forall \varepsilon > 0$ - для любого положительного ε

$\exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ - существует натуральное число n , зависящее от ε ,

такое что

$\forall n > n(\varepsilon)$ - для любого натурального числа n , превосходящего $n(\varepsilon)$

: - выполняется

$|b_n - a_n| < \varepsilon$ - модуль разности b_n и a_n меньше ε .

Теорема (принцип вложенных отрезков)

Для всякой системы вложенных отрезков $[a_n, b_n]$, $n = 1, 2, \dots$ с длинами, стремящимися к нулю, существует единственная точка d , которая принадлежит всем отрезкам системы, причем

$$d = \sup\{a_n\} = \inf\{b_n\}.$$

2 Числовая функция

Определение

Числовая функция - это правило, ставящее в соответствие каждому элементу некоторого числового множества X некоторое число из множества действительных чисел.

Обозначение: $y = f(x)$

x - независимая переменная

y - зависимая переменная

$X = D(f)$ - область определения

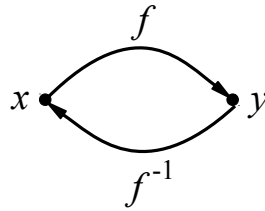
Определение

Графиком функции $y = f(x)$ называется множество точек $(x, f(x))$, где $x \in X$.

Определение

Пусть дана функция $y = f(x)$. Функция, ставящая в соответствие каждому числу y соответствующее значение x , называется **функцией, обратной данной**, или **обратной функцией**.

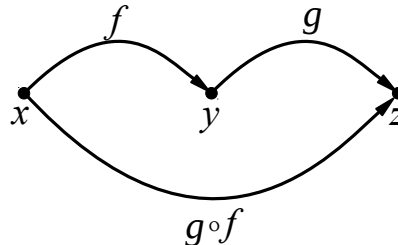
Обозначение: $x = f^{-1}(y)$



Определение

Пусть даны функции $y = f(x)$ и $z = g(y)$. Функция $z = g(f(x))$ называется **сложной функцией** или **композицией функций** или **суперпозицией функций** f и g .

Обозначение: $(g \circ f)(x) = g(f(x))$



3 Элементарные функции

К основным элементарным функциям относятся:

- 1) $y = x^a$ - степенная функция
- 2) $y = a^x, a > 0, a \neq 1$ - показательная функция
- 3) $y = \log_a x, a > 0, a \neq 1$ - логарифмическая функция
- 4) $y = \sin x, y = \cos x, y = \operatorname{tg} x, y = \operatorname{ctg} x$ - тригонометрические функции
- 5) $y = \arcsin x, y = \arccos x, y = \operatorname{arctg} x, y = \operatorname{arcctg} x$ - обратные тригонометрические функции

Определение

Функция называется **элементарной**, если она задана с помощью формулы, содержащей конечное число арифметических операций и суперпозиций основных элементарных функций.

Примеры: $y = 2x^2 + 3x + 5$, $y = \sin(2^x)$, $y = \operatorname{tg} \sqrt{x^3 + x^2}$.

Пример функции, которая не является элементарной:

$$y = \begin{cases} x, & x \leq 0, \\ \sin x, & x > 0. \end{cases}$$

Классификация элементарных функций:

1) многочлен (полином)

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

2) рациональная функция (дробно-рациональная функция)

$$y = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}, \text{ где } P_n(x) \text{ и } Q_m(x) - \text{полиномы,}$$

3) иррациональная функция - это функция, содержащая иррациональности, т.е. корни различных степеней

$$y = x + \sqrt[3]{x},$$

4) трансцендентная функция - это функция, содержащая в себе различные тригонометрические, обратные тригонометрические, показательные и логарифмические функции.

$$y = x + \sqrt{x} + \sin x.$$

4 Числовая последовательность

Определение

Пусть каждому натуральному числу n поставлено в соответствие действительное число a_n . Совокупность чисел $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ называется **числовой последовательностью**.

Обозначение: $\{a_n\}$ - числовая последовательность с общим членом a_n .

Определение

Число a_n называется **n -ым членом последовательности**.

Обычно члены последовательности задаются с помощью формулы $a_n = f(n)$, позволяющей найти величину каждого члена a_n по его номеру n .

Примеры: $a_n = 1/2^n$, $a_n = (-1)^n \cdot n^3$.

Экономический пример: Допустим, мы открываем в банке вклад на 10 тыс. руб. под 10% годовых с капитализацией процентов и периодом капитализации 1 год. Тогда величина вклада по годам будет представлять собой числовую последовательность $a_1 = 10$, $a_2 = 10 \cdot 1,1$, $a_3 = 10 \cdot 1,1^2, \dots, a_n = 10 \cdot 1,1^{n-1}, \dots$, где a_n - размер вклада в течение n -ого года.

5 Конечный предел

Определение

Конечное число a называется **конечным пределом последовательности** $\{a_n\}$, если $\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n(\varepsilon): |a_n - a| < \varepsilon$.

Обозначение: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

Здесь a - конечное число, т.е. $a \neq \pm\infty$.

Определение

Если последовательность имеет конечный предел, то она называется **сходящейся**. В противном случае она называется **расходящейся**.

Геометрическая интерпретация конечного предела:

В определении предела ε – это любое положительное число. Выберем его так, что

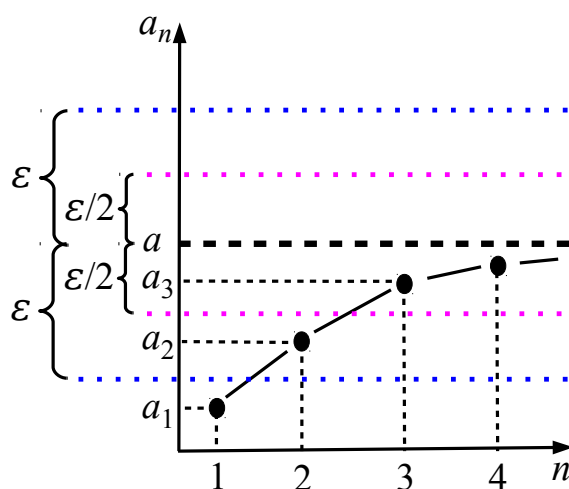
$$n(\varepsilon) = 1, n(\varepsilon/2) = 2 \text{ и } n(\varepsilon/4) = 3.$$

Тогда из определения предела следует

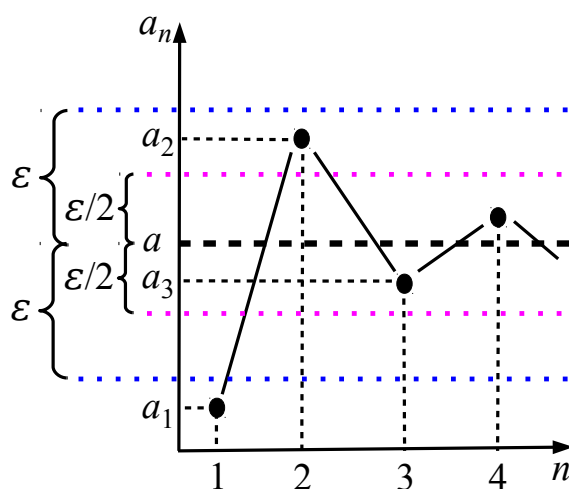
$$\forall n > 1: |a_n - a| < \varepsilon, \forall n > 2: |a_n - a| < \varepsilon/2 \text{ и } \forall n > 3: |a_n - a| < \varepsilon/4.$$

Из получившейся серии неравенств видно, что по мере увеличения n числа a_n должны отклоняться от a на все меньшую величину ($\varepsilon, \varepsilon/2, \varepsilon/4, \dots$). Следовательно, конечный предел a – это число, к которому постепенно приближаются члены числовой последовательности a_n по мере увеличения их номера n , при этом способ приближения может различаться у разных последовательностей. Например, ниже на рисунках приведены два возможных варианта приближения членов последовательности к пределу согласно приведенным выше трем неравенствам:

1) вариант 1



2) вариант 2



*Арифметические свойства конечных пределов**

Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, где a и b – конечные числа. Тогда

- 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b$,
- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = a - b$,
- 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$,
- 4) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n/b_n) = a/b$, если $b \neq 0$.

Доказательство свойства 1

Дано: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$

Доказать: $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b$

По определению предела имеем:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_1(\varepsilon) \in N \forall n > n_1(\varepsilon): |a_n - a| < \varepsilon.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_2(\varepsilon) \in N \forall n > n_2(\varepsilon): |b_n - b| < \varepsilon.$$

Пусть $n(\varepsilon) = \max\{n_1(\varepsilon), n_2(\varepsilon)\}$. Тогда $\forall n > n(\varepsilon)$ будут одновременно выполняться неравенства $|a_n - a| < \varepsilon$ и $|b_n - b| < \varepsilon$, из которых следует

$$|a_n + b_n - (a + b)| = |a_n - a + b_n - b| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Таким образом, получается

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in N \forall n > n(\varepsilon): |a_n + b_n - (a + b)| < 2\varepsilon.$$

Это означает согласно определению предела, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b. \blacksquare$$