

ГУИМЦ
ИНТЕГРАЛЫ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
Модуль 2

Модульное домашнее задание

Приложения определенного интеграла и несобственные интегралы

Задача 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

1	$y = (x+1)^2, y^2 = x+1$	9	$y = (x-2)^3, y = 4x-8$
2	$x = \cos^3 t, y = \sin^3 t, 0 \leq t \leq 2\pi$ (астроида)	10	$\rho = \frac{1}{2} + \cos \varphi$
3	$y = 2x - x^2 + 3, y = x^2 - 4x + 3$	11	$y = \arccos x, x = 0, y = 0$
4	$y = 0$ и $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}, 0 \leq t \leq 2\pi$ (одна арка циклоиды)	12	$\begin{cases} x = 2 \cos t - \cos 2t \\ y = 2 \sin t - \sin 2t \end{cases}, 0 \leq t \leq 2\pi$ (кардиоида)
5	$y = 4 - x^2, y = x^2 - 2x$	13	$x = 4 - y^2, x = y^2 - 2y$
6	$\rho = \cos 2\varphi$	14	$\rho = \frac{1}{2} \sin \varphi$
7	$x = (y-2)^3, x = 4y - 8$	15	$x = \sqrt{4 - y^2}, x = 0, y = 1$
8	$\rho = \sin 3\varphi$	16	$\rho = 4 \cos \varphi, \rho = 2 (\rho \geq 2)$

Задача 2. Вычислить длину дуги кривой

1	$\begin{cases} x = 5(t - \sin t) \\ y = 5(1 - \cos t) \end{cases}, 0 \leq t \leq \pi$ (часть циклоиды)	9	$\begin{cases} x = 4(\cos t + t \sin t) \\ y = 4(\sin t - t \cos t) \end{cases}, 0 \leq t \leq \pi$ (дуга развертки окружности)
2	$y = e^x + e, \ln \sqrt{3} \leq x \leq \ln \sqrt{15}$	10	$y = \ln(1 - x^2), 0 \leq x \leq \frac{1}{4}$
3	$\rho = \sqrt{2}e^\varphi, -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$	11	$\rho = 1 - \sin \varphi, -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq -\frac{\pi}{6}$
4	$y = 2 - e^x, \ln \sqrt{3} \leq x \leq \ln \sqrt{8}$	12	$y = \frac{1}{2}x^2 - 4x + \frac{15}{2}, y = 0$

5	$\begin{cases} x = 10 \cos^3 t, \\ y = 10 \sin^3 t, \end{cases} 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ (часть астроида)	13	$\begin{cases} x = 3(t - \sin t), \\ y = 3(1 - \cos t), \end{cases} \pi \leq t \leq 2\pi$ (часть циклоиды)
6	$y = e^x + 6, \ln \sqrt{8} \leq x \leq \ln \sqrt{15}$	14	$y = e^x + 13, \ln \sqrt{15} \leq x \leq \ln \sqrt{24}$
7	$\rho = 3(1 + \sin \varphi), -\frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq 0.$	15	$\rho = 5(1 - \cos \varphi), -\frac{\pi}{3} \leq \varphi \leq 0$
8	$y = \ln 7 - \ln x, \sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{8}$	16	$y^2 = 16x, x = 4$

Задача 3. Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной заданными линиями вокруг указанной оси

1	$y = -x^2 + 5x - 6, y = 0, OX$	9	$y = x^2, x = 2, y = 0, OY$
2	$y = 3 \sin x, y = \sin x, 0 \leq x \leq \pi, OX$	10	$y = x^2 + 1, y = x, x = 0, x = 1, OY$
3	$y = 5 \cos x, y = \cos x, x = 0, x \leq 0, OX$	11	$y = \sqrt{x-1}, y = 0, y = 1, x = 0, 5, OY$
4	$y = \sin^2 x, x = \frac{\pi}{2}, y = 0, OX$	12	$y = \ln x, x = 2, y = 0, OY$
5	$x = \sqrt[3]{y-2}, x = 1, y = 1, OX$	13	$y = (x-1)^2, y = 1, OY$
6	$y = e^{1-x}, y = 0, x = 0, x = 1, OX$	14	$y = \arcsin x, y = \arccos x, y = 0, OY$
7	$y = x^2, y^2 - x = 0, OX$	15	$y = (x-1)^2, x = 0, x = 2, y = 0, OY$
8	$y = -1 + x^2, x = 0, OX$	16	$y = \arccos x, y = \arcsin x, x = 0, OY$

Задача 4. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением заданной кривой вокруг указанной оси

1	$y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, 0 \leq x \leq 1, OX$	9	$y = \sin 3x, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}, OX$
2	$\rho = 2\sqrt{\cos 2\varphi}, Ol$ (лемниската Бернулли)	10	$\rho = 4 \sin \varphi, Ol$
3	$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1, OX$	11	$\begin{cases} x = 2 \cos t - \cos 2t \\ y = 2 \sin t - \sin 2t \end{cases}, 0 \leq t \leq 2\pi, OX$ (кардиоида)
4	$\begin{cases} x = 4 \cos t - 2 \cos 2t \\ y = 4 \sin t - 2 \sin 2t \end{cases}, 0 \leq t \leq 2\pi, OX$ (кардиоида)	12	$y = \frac{\sqrt{4x-1}}{2}, 1 \leq x \leq 7, OX$
5	$x = \frac{1}{2} \ln y, 1 \leq y \leq e, OX$	13	$y = e^{-x}, x \geq 0, OX$
6	$y^2 = x + 4, -4 \leq x \leq 2, OX$	14	$y^2 = x + 4, -4 \leq x \leq 2, OX$
7	$\rho = 2 \cos \varphi, Ol$	15	$y = \sqrt{2x+1}, 1 \leq x \leq 9, OX$

8	$y = \frac{x^3}{3}, -1 \leq x \leq 1, OX$	16	$y = \frac{x^3}{3}, -2 \leq x \leq 2, OX$
---	---	----	---

Задача 5. Исследовать несобственные интегралы на сходимость

1	$\int_1^{+\infty} \ln \frac{x^2 + 5}{x^2 + 2} dx$	9	$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} dx$
2	$\int_0^{+\infty} \frac{\arctg x}{(4 + x^2)^{\frac{3}{2}}} dx$	10	$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(2 + \ln x)}$
3	$\int_1^{+\infty} \frac{x dx}{\sqrt{x^6 + 2}}$	11	$\int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx$
4	$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2 + 8}}$	12	$\int_{e^2}^{+\infty} \frac{dx}{x^3 \sqrt{\ln x - 1}}$
5	$\int_0^{+\infty} x e^{-x} dx$	13	$\int_1^{+\infty} \frac{x + 2\sqrt{x+1}}{x^2 + \sqrt[3]{x^2 + 1}} dx$
6	$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2 + 27}}$	14	$\int_0^{+\infty} \frac{x \arctg x}{\sqrt{2 + x^3}} dx$
7	$\int_1^{+\infty} \frac{\arctg x}{x} dx$	15	$\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x} dx$
8	$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{(x^2 + 7)^5}}$	16	$\int_{-2}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + \sqrt[3]{x^4 + 2}}$