Занятие 2.2
Кривые и поверхности второго порядка

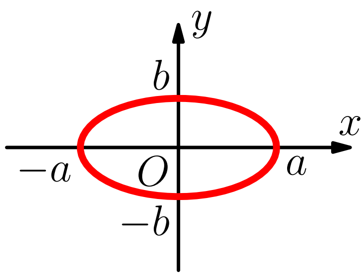
1 Канонические уравнения и вид кривых и поверхностей второго порядка

Рассмотрим уравнение

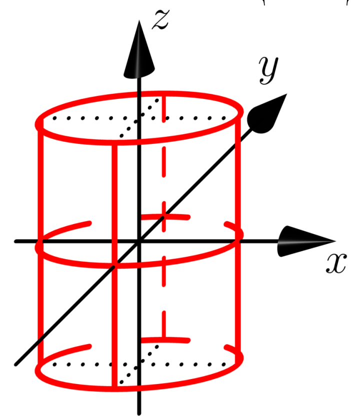
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где $a > 0$ и $b > 0$ - заданные числа. Данное уравнение может определять два объекта в зависимости от точки зрения - кривую и поверхность. Если мы рассматриваем плоскость Oxy, то это уравнение является каноническим уравнением **эллипса**. Когда мы работаем в пространстве $Oxyz$, то это же уравнение описывает **эллиптический цилиндр**.

Эллипс



Эллиптический цилиндр



Рассмотрим характеристики эллипса. Если $a > b$, то a - большая полуось, b - малая полуось. Число $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ - полуфокусное расстояние, оно задает положение фокусов эллипса на оси Ox относительно начала координат O. Параметр $\varepsilon = c/a$ называется эксцентриситетом и определяет степень сплющенности эллипса, $0 \leq \varepsilon < 1$. При $\varepsilon = 0$ эллипс превращается в окружность. Когда $\varepsilon \to 1$, эллипс сплющивается к оси Ox и в пределе вырождается в отрезок. Если $a < b$, то в указанных определениях a и b меняются местами, а ось Ox заменяется осью Oy. В частности, a становится малой полуосью, b - большой, а фокусы эллипса перемещаются на ось Oy.

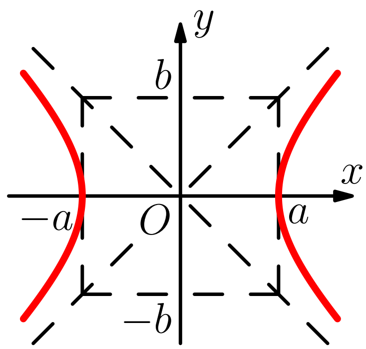
В пространстве все горизонтальные сечения эллиптического цилиндра представляют собой одинаковые эллипсы с определенными выше характеристиками. Поэтому эллиптический цилиндр обычно получается через построение эллипса в базовой плоскости Oxy и последующее его вытягивание из этой плоскости вверх и вниз вдоль оси Oz.

Уравнение
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$
одновременно задает **гиперболу** на плоскости и **гиперболический цилиндр** в пространстве.

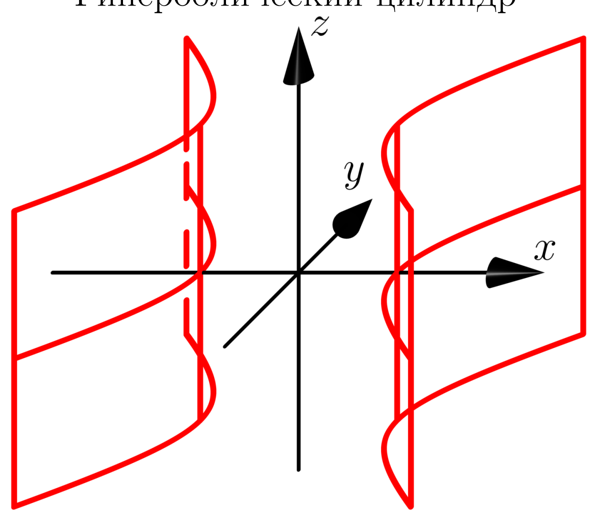
На плоскости у гиперболы $a > 0$ - действительная полуось, $b > 0$ - мнимая полуось. Число $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ - полуфокусное расстояние, задающее положение фокусов гиперболы на оси Ox относительно начала координат O. Эксцентриситет $\varepsilon = c/a$ изменяется в диапазоне $(1; +\infty)$ и указывает на степень прижатия ветвей гиперболы к оси Ox – чем больше ε, тем быстрее ветви гиперболы удаляются от Ox и, соответственно, визуально более широкой является сама гипербола. При неограниченном удалении от начала координат ветви гиперболы постепенно приближаются к прямым $y = \pm b/a \cdot x$, называемым асимптотами гиперболы и проходящим через диагонали прямоугольника со сторонами $x = \pm a$ и $y = \pm b$. Если в уравнении гиперболы знаки перед x^2 и y^2 меняются на противоположные, то в приведенных определениях числа a и b, а также оси Ox и Oy меняются местами.

В пространстве все горизонтальные сечения гиперболического цилиндра являются одинаковыми гиперболами с параметрами, определенными выше. Чтобы получить гиперболический цилиндр, мы строим гиперболу в плоскости Oxy и тянем ее вверх и вниз вдоль оси Oz.

Гипербола



Гиперболический цилиндр



Уравнение

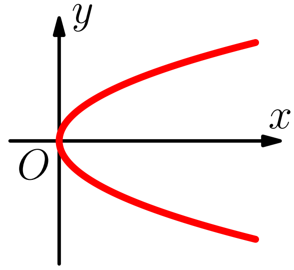
$$y^2 = 2px$$

определяет **параболу** на плоскости и **параболический цилиндр** в пространстве.

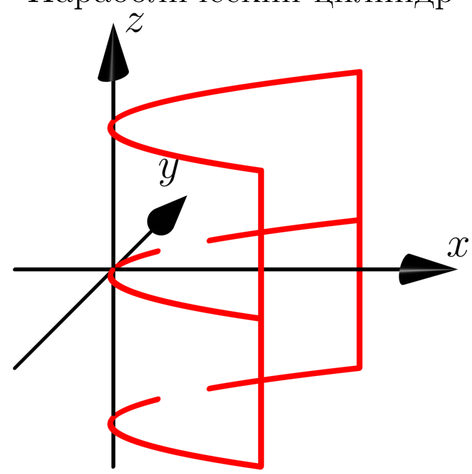
Параметр параболы $p > 0$ обратно пропорционален степени прижатия ее ветвей к оси Ox – чем больше p, тем быстрее ветви отходят от Ox и, соответственно, более широкой является сама парабола. Полагают, что эксцентриситет параболы $\varepsilon = 1$. Единственный фокус располагается на оси Ox на расстоянии $p/2$ от начала координат.

Все горизонтальные сечения параболического цилиндра – это одинаковые параболы с параметрами, определенными выше. Формируется этот цилиндр аналогично всем предыдущим – мы строим параболу в базовой плоскости Oxy и тянем ее вверх и вниз вдоль оси Oz.

Парабола



Параболический цилиндр



ЗАДАНИЕ

1. Дано алгебраическое уравнение кривой второго порядка

$$9x^2 - 6x + 4y^2 + 4y - 2 = 0.$$

Написать каноническое уравнение кривой и определить ее тип. Найти полуоси, координаты центра симметрии и фокусы кривой. Изобразить чертеж на плоскости Oxy. Что из себя представляет поверхность в пространстве $Oxyz$, задаваемая этим же уравнением?

2. Составить задачи, обратные задаче 1, предполагая, что некоторые из определяемых в задаче 1 величин известны, а известная величина, наоборот, подлежит определению. Решить составленные задачи.

3. Составить и решить задачи, аналогичные задаче 1, для кривых, отличающихся по типу от кривой из задачи 1.

4. Обобщить задачу 1. Решить полученные задачи.

Пример решения приведен в последнем разделе.

2 Примеры решений

ЗАДАНИЕ

1. Дано алгебраическое уравнение кривой второго порядка
$$9x^2 - 6x + 4y^2 + 4y - 2 = 0.$$

Написать каноническое уравнение кривой и определить ее тип. Найти полуоси, координаты центра симметрии и фокусы кривой. Изобразить чертеж на плоскости Oxy. Что из себя представляет поверхность в пространстве $Oxyz$, задаваемая этим же уравнением?

Решение:

Чтобы получить каноническое уравнение кривой, в исходном уравнении необходимо выделить полные квадраты относительно переменных x и y:
$$(9x^2 - 6x) + (4y^2 + 4y) - 2 = 0,$$
$$9\left(x^2 - 2\cdot\frac{1}{3}\cdot x\right) + 4\left(y^2 + 2\cdot\frac{1}{2}\cdot y\right) - 2 = 0,$$
$$9\left(\left(x^2 - 2\cdot\frac{1}{3}\cdot x + \frac{1}{9}\right) - \frac{1}{9}\right) + 4\left(\left(y^2 + 2\cdot\frac{1}{2}\cdot y + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{4}\right) - 2 = 0,$$
$$9\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - 1 + 4\left(y + \frac{1}{2}\right)^2 - 1 - 2 = 0,$$
$$9\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + 4\left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = 4,$$
$$\frac{(x - 1/3)^2}{4/9} + \frac{(y + 1/2)^2}{1} = 1.$$

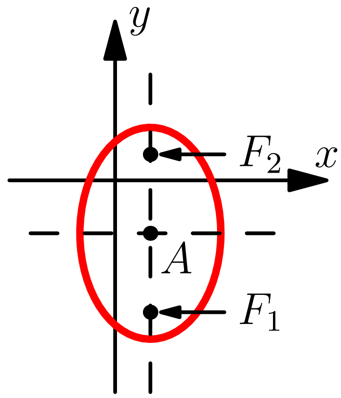
Получили каноническое уравнение эллипса с центром в точке $A(1/3, -1/2)$ и полуосями $a = 2/3$, $b = 1$. Поскольку $a < b$, то a – малая полуось, b – большая полуось, эллипс вытянут в вертикальном направлении и фокусы расположены на вертикальной прямой, проходящей через центр эллипса.

Найдем координаты фокусов F_1 и F_2. Они расположены на расстоянии c от центра A эллипса по вертикали, причем $c = \sqrt{b^2 - a^2}$.

Тогда $c = \sqrt{1 - 4/9} = \sqrt{5}/3$ и

$$F_1(1/3, -1/2 - \sqrt{5}/3),\ F_2(1/3, -1/2 + \sqrt{5}/3).$$

Осталось изобразить эллипс на плоскости Oxy:



В пространстве $Oxyz$ наше уравнение задает эллиптический цилиндр, который получается из уже построенного эллипса путем его вытягивания из плоскости Oxy вверх и вниз вдоль оси Oz.

2. Составить задачи, обратные задаче 1, предполагая, что некоторые из определяемых в задаче 1 величин известны, а известная величина, наоборот, подлежит определению. Решить составленные задачи.

Решение:

Приведем два возможных варианта обратной задачи:

А. Пусть даны центр эллипса $A(1/3, -1/2)$ и его полуоси $a = 2/3$, $b = 1$. Найти алгебраическое уравнение этой кривой.

Б. Даны одна полуось эллипса $a = 2/3$ и его фокусы

$$F_1(1/3, -1/2 - \sqrt{5}/3),\ F_2(1/3, -1/2 + \sqrt{5}/3).$$

Найти алгебраическое уравнение этой кривой.

Сначала приведем *решение* задачи А. Зная координаты центра эллипса $A(1/3, -1/2)$ и его полуоси $a = 2/3$, $b = 1$, можно выписать каноническое уравнение эллипса

$$\frac{(x - 1/3)^2}{4/9} + \frac{(y + 1/2)^2}{1} = 1.$$

Далее раскрываем скобки, приводим подобные слагаемые и получаем алгебраическое уравнение $9x^2 - 6x + 4y^2 + 4y - 2 = 0$ искомой кривой.

Теперь рассмотрим *решение* задачи Б. Поскольку абсциссы фокусов одинаковые, наши фокусы лежат на прямой, параллельной оси y. Это значит, что эллипс вытянут в вертикальном направлении, a является малой полуосью, b – большой, причем они связаны соотношением $c^2 = b^2 - a^2$, где c – полуфокусное расстояние.

Сравнив общий вид фокусов $F_1(x_0, y_0 - c)$, $F_2(x_0, y_0 + c)$, где x_0, y_0 – координаты центра эллипса, с координатным представлением наших фокусов, находим центр эллипса $A(1/3, -1/2)$ и полуфокусное расстояние $c = \sqrt{5}/3$. Далее вычисляем величину большой полуоси $b = \sqrt{c^2 + a^2} = 1$ и выписываем каноническое уравнение эллипса, такое же как и в задаче А. Из этого уравнения после алгебраических преобразований, аналогичных преобразованиям из задачи А, получаем алгебраическое уравнение искомой кривой.

3. Составить и решить задачи, аналогичные задаче 1, для кривых, отличающихся по типу от кривой из задачи 1.

Решение:

Проанализировав порядок приведения уравнения кривой второго порядка к каноническому виду в задаче 1, можно заметить, что тип кривой определяется выбором значений коэффициентов A и B при старших степенях исходного алгебраического уравнения второй степени

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0.$$

Если они одного знака, то мы имеем эллипс. Если они противоположных знаков, то получается гипербола. Если один из них равен нулю, то будет парабола. Исходя из этого, выпишем в общем виде алгебраические уравнения, которые могут задавать гиперболу и параболу:

$ax^2 - by^2 + cx + dy + e = 0$ – для гиперболы,

$by^2 + cx + dy + e = 0$ – для параболы,

где $a > 0$, $b > 0$, c, d, e – произвольно выбираемые числа. Придав им случайным образом конкретные значения , получим, например, следующие алгебраические уравнения второй степени, определяющие гиперболу и параболу:

$16x^2 - 4y^2 - 64x = 0$ (гипербола),

$y = 4x^2 - 8x + 7$ (парабола).

С помощью полученных уравнений можно сформулировать задачи, аналогичные задаче 1. Скажем, для гиперболы она будет выглядеть так:

Дано алгебраическое уравнение кривой второго порядка

$$16x^2 - 4y^2 - 64x = 0.$$

Написать каноническое уравнение кривой и определить ее тип. Найти полуоси, координаты центра симметрии и фокусы кривой. Изобразить чертеж на плоскости Oxy. Что из себя представляет поверхность в пространстве $Oxyz$, задаваемая этим же уравнением?

Решается эта задача также как и задача 1.

Замечание:

Для каждой выбранной пары значений A и B существуют такие наборы значений C, D, E, при которых определяемая алгебраическим уравнением второй степени кривая либо вырождается в совокупность двух прямых или в точку, либо становится мнимой. При случайном выборе коэффициентов возникновение такой ситуации маловероятно. Однако, если она возникла, достаточно просто в уравнении изменить значение хотя бы одного коэффициента.

4. Обобщить задачу 1. Решить полученные задачи.

Решение:

Заданное в задаче 1 алгебраическое уравнение связывает две переменные x и y. Увеличим количество переменных в этом уравнении до трех – добавим переменную z. Новое алгебраическое уравнение будет заведомо определять уже некоторую поверхность в пространстве. Тогда по аналогии с задачей 1 обобщенную задачу можно сформулировать следующим образом:

Дано алгебраическое уравнение поверхности второго порядка
$$18x^2 + 18x + 18y^2 - 6y + 8z^2 - 16z - 59 = 0.$$
Написать каноническое уравнение поверхности и определить ее тип. Найти полуоси и координаты центра симметрии поверхности. Получить три уравнения сечений поверхности плоскостями параллельными координатным осям и проходящими через центр симметрии.

Решим данную задачу. Сначала приведем данное уравнение к каноническому виду путем выделения полных квадратов относительно переменных x, y и z.
$$(18x^2 + 18x) + (18y^2 - 6y) + (8z^2 - 16z) - 59 = 0,$$
$$18(x^2 + x) + 18(y^2 - y/3) + 8(z^2 - 2z) = 59,$$
$$18\left(\left(x^2 + 2\cdot\frac{1}{2}\cdot x + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{4}\right) + 18\left(\left(y^2 - 2\cdot\frac{1}{6}\cdot y + \frac{1}{36}\right) - \frac{1}{36}\right) +$$
$$+8\left(\left(z^2 - 2z + 1\right) - 1\right) = 59,$$
$$18\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{2} + 18\left(y - \frac{1}{6}\right)^2 - \frac{1}{2} + 8\left(z - 1\right)^2 - 8 = 59,$$
$$18\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + 18\left(y - \frac{1}{6}\right)^2 + 8\left(z - 1\right)^2 = 72,$$
$$\frac{(x + 1/2)^2}{4} + \frac{(y - 1/6)^2}{4} + \frac{(z - 1)^2}{9} = 1.$$
Получили каноническое уравнение эллипсоида с центром в точке $A(-1/2, 1/6, 1)$ и полуосями $a = 2$, $b = 2$, $c = 3$.

В результате сечения эллипсоида плоскостью $x = -1/2$ получим эллипс
$$\frac{(y - 1/6)^2}{4} + \frac{(z - 1)^2}{9} = 1,$$
располагающийся параллельно координатной плоскости Oyz.

В результате сечения эллипсоида плоскостью $y = 1/6$ получим эллипс
$$\frac{(x+1/2)^2}{4} + \frac{(z-1)^2}{9} = 1,$$
располагающийся параллельно координатной плоскости Oxz.

В результате сечения эллипсоида плоскостью $z = 1$ получим окружность
$$(x+1/2)^2 + (y-1/6)^2 = 4,$$
располагающуюся параллельно координатной плоскости Oxy.