Занятие 2.1
Алгебраические уравнения третьей степени

1 Алгоритм поиска корней

Алгебраическое уравнение третьей степени (кубическое уравнение) имеет вид
$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$
где $a \neq 0$, b, c, d - заданные действительные числа, x - неизвестная. Данное уравнение всегда имеет хотя бы один действительный корень. Другие два корня могут быть как действительными, так и комплексными. В настоящее время имеется несколько универсальных способов нахождения корней кубического уравнения при любых значениях его коэффициентов (формула Кардано, тригонометрическая формула Виета). Однако, эти способы имеют один общий недостаток - для получения корней необходимо выполнить серию громоздких и трудоемких вычислений, занимающих довольно много времени.

Рассмотрим простой эмпирический прием, позволяющий находить корни кубического уравнения, когда его коэффициенты a, b, c, d являются целыми числами и среди корней есть хотя бы один рациональный. Данный прием опирается на два утверждения, справедливые для многочлена $P_n(x)$ любой степени n:

1. Если алгебраическое уравнение $P_n(x) = 0$ с целыми коэффициентами имеет рациональный корень p/q, где p и q - взаимно простые числа, то p и q делят нацело свободный член и коэффициент при старшей степени многочлена $P_n(x)$, соответственно.

2. Если x_1 является корнем алгебраического уравнения $P_n(x) = 0$, то двучлен $x - x_1$ делит многочлен $P_n(x)$ без остатка.

Первое утверждение позволяет находить рациональные корни алгебраического уравнения с целыми коэффициентами методом перебора. Мы находим все делители свободного члена и все делители коэффициента при старшей степени, формируем из них всевозможные рациональные числа и, подставляя их в уравнение, определяем, какие из них есть корни.

Второе утверждение позволяет понизить степень алгебраического уравнения, если нам известен какой-либо его корень. Разделив многочлен n-ой степени $P_n(x)$ на двучлен $x-x_1$, мы получаем многочлен $P_{n-1}(x)$ степени $n-1$, с помощью которого представляем $P_n(x)$ в виде $P_n(x) = (x - x_1)P_{n-1}(x)$. Тогда наше уравнение $P_n(x) = 0$ приобретает вид $(x - x_1)P_{n-1}(x) = 0$, где первый множитель слева содержит корень x_1, а второй множитель включает в себя все остальные корни. Эти корни можно найти, перейдя к уравнению меньшей степени $P_{n-1}(x) = 0$. Например, если нам известен один корень кубического уравнения, мы можем найти другие два корня путем перехода к квадратному уравнению, решение которого уже никаких проблем не вызывает.

Объединив оба утверждения, мы получаем следующий алгоритм поиска корней кубического уравнения с целыми коэффициентами:

1. Находим все возможные значения p и q – делители свободного члена d и коэффициента при старшей степени a, соответственно.

2. Формируем множество рациональных чисел $\{p/q\}$ путем сочетания каждого значения p с каждым значением q.

3. Подставляя полученные рациональные числа в кубическое уравнение, находим рациональный корень x_1. Поиск прекращаем сразу после нахождения первого корня.

4. Делим кубический многочлен из левой части нашего уравнения на двучлен $x - x_1$, где x_1 - найденный ранее корень, и получаем квадратный трехчлен $P_2(x)$.

5. Составляем квадратное уравнение $P_2(x) = 0$, откуда находим второй x_2 и третий x_3 корни исходного кубического уравнения.

В некоторых случаях кубическое уравнение можно решить путем разложения его левой части на множители методом группировки через объединение членов кубического многочлена в группы и последующее выделение из этих групп общих множителей. Например, чтобы решить уравнение

$$5x^3 - x^2 - 20x + 4 = 0,$$

разложим его левую часть на множители, сгруппировав первый член с третьим, второй с четвертым и выделив из получившихся групп общий множитель:

$$(5x^3 - 20x) - (x^2 - 4) = 0,$$
$$5x(x^2 - 4) - (x^2 - 4) = 0,$$
$$(5x - 1)(x^2 - 4) = 0,$$
$$5(x - 1/5)(x - 2)(x + 2) = 0.$$

Каждый из получившихся множителей содержит по одному корню:

$$x_1 = 1/5,\ x_2 = 2,\ x_3 = -2.$$

ЗАДАНИЕ

1. Решить уравнения:

$$\text{(а) } 2x^3 - 11x^2 + 12x + 9 = 0,$$
$$\text{(б) } 3x^3 + 7x^2 - 9x + 2 = 0.$$

2. Составить задачи, обратные задаче 1, предполагая, что одна или несколько определяемых в задаче 1 величин известны, а известная величина, наоборот, подлежит определению. Решить составленные задачи.

3. Обобщить задачу 1. Решить полученную задачу.

Пример решения для случая (а) приведен в последнем разделе.

2 Примеры решений

ЗАДАНИЕ

1. Решить уравнение $2x^3 - 11x^2 + 12x + 9 = 0$.

Решение:

Воспользуемся приведенным в предыдущем разделе алгоритмом поиска корней кубического уравнения с целыми коэффициентами.

1. Находим все возможные значения делителя p свободного члена и делителя q коэффицента при старшей степени в нашем уравнении. Делителем свободного члена 9 являются числа ± 1, ± 3, ± 9, а делителем старшего коэффициента 2 являются числа ± 1, ± 2.

2. Формируем множество рациональных чисел

$$\left\{\frac{p}{q}\right\} = \left\{\pm 1, \pm\frac{1}{2}, \pm 3, \pm\frac{3}{2}, \pm 9, \pm\frac{9}{2}\right\}.$$

3. Подставляя по очереди каждое число из множесва $\{p/q\}$ в уравнение, убеждаемся, что $x_1 = -1/2$ является корнем уравнения.

4. Разделим кубический многочлен $2x^3 - 11x^2 + 12x + 9$ из левой части нашего уравнения на двучлен $x - x_1 = x + 1/2$:

$$\begin{array}{rrrr|l} 2x^3 & -11x^2 & +12x & +9 & x+1/2 \\ \cline{5-5} 2x^3 & +x^2 & & & 2x^2-12x+18 \\ \cline{1-2} & -12x^2 & +12x & & \\ & -12x^2 & -6x & & \\ \cline{2-3} & & 18x & +9 & \\ & & 18x & +9 & \\ \cline{3-4} & & & 0 & \end{array}$$

Получили квадратный трехчлен $2x^2 - 12x + 18$.

5. Составляем квадратное уравнение $2x^2 - 12x + 18 = 0$. Откуда находим второй и третий корни $x_2 = x_3 = 3$ исходного кубического уравнения.

Итоговый ответ: $x_1 = -1/2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 3$.

2. Составить задачи, обратные задаче 1, предполагая, что одна или несколько определяемых в задаче 1 величин известны, а известная величина, наоборот, подлежит определению. Решить составленные задачи.

Решение:

Сформулируем обратную задачу:

По известным корням составить кубическое уравнение.

Здесь возможны два варианта: 1) даны все три корня уравнения, 2) известны только один или два корня уравнения.

В первом случае, когда известны три корня $x_1 = 1/2$, $x_2 = x_3 = 3$, мы находим кубический многочлен, перемножая множители:
$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = (x + 1/2)(x - 3)^2 = x^3 - 11/2x^2 + 6x + 9/2$
и далее приравниваем его к нулю: $x^3 - 11/2x^2 + 6x + 9/2 = 0$.

Таким образом, мы получили кубическое уравнение, корнями которого служат заданные три числа. Умножив обе части этого уравнения на произвольное ненулевое число, мы снова получим кубическое уравнение с этими же корнями. Например, умножив обе части этого уравнения на 2, получаем искомое уравнение из задачи 1:

$$2x^3 - 11x^2 + 12x + 9 = 0.$$

Как видно, все три корня кубического уравнения задают само уравнение лишь с точностью до множителя, для определения которого нужна дополнительная информация. Скажем, в нашем случае мы уже знаем как выглядит исходное уравнение, а значит, можем подобрать нужный множитель.

Во втором случае, если известны только один или два корня кубического уравнения, после подстановки известных корней в выражение $(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$ и перемножения множителей, получим кубический многочлен, коэффициенты которого зависят от значений неизвестных корней. Придавая этим неизвестным корням произвольные значения, мы будем получать различные кубические уравнения, среди корней которых обязательно будут известные по условию задачи корни.

3. Обобщить задачу 1. Решить полученную задачу.

Решение:

В задаче 1 рассматривалось кубическое уравнение с заданными коэффициентами. Предположим, что коэффициент при x или x^2 нам по каким-либо причинам неизвестен. Тогда получим обобщенную задачу:

Найти решение кубического уравнения $3x^3 + mx^2 - 5x + 2 = 0$ в зависимости от значения параметра m.

Найдем рациональный корень p/q данного кубического уравнения, где число p является делителем свободного члена, а число q – делителем старшего коэффициента. Поскольку старший коэффициент и свобоный член известны, то множество рациональных чисел, из которых выбирается корень, фиксировано. Параметр m может повлиять лишь на выбор конкретного элемента этого множества. Так как делителем свободного члена 2 являются числа ±1, ±2, а делителем старшего коэффициента 3 – числа ±1, ±3, то получаем следующее множество рациональных чисел:

$$\left\{\frac{p}{q}\right\} = \left\{\pm1, \pm\frac{1}{3}, \pm2, \pm\frac{2}{3}\right\}.$$

Подставим по очереди каждое из чисел этого множества в уравнение $3x^3 + mx^2 - 5x + 2 = 0$ и определим значения параметра, при которых это число будет корнем уравнения.

Если $x = 1$, то значение параметра $m = 0$.

Если $x = -1$, то значение параметра $m = -4$.

Если $x = 1/3$, то значение параметра $m = -4$.

Если $x = -1/3$, то значение параметра $m = -32$.

Если $x = 2$, то значение параметра $m = -4$.

Если $x = -2$, то значение параметра $m = 3$.

Если $x = 2/3$, то значение параметра $m = 1$.

Если $x = -2/3$, то значение параметра $m = -10$.

В итоге мы нашли все возможные значения параметра m, при которых наше уравнение имеет хотя бы один рациональный корень.

Также заметим, что во время перебора мы определили все корни кубического уравнения для $m=-4$: $x_1=-1$, $x_2=1/3$, $x_3=2$. Осталось найти последние два корня кубического уравнения при остальных значениях параметра m.

При $m=-32$ имеем уравнение $3x^3-32x^2-5x+2=0$, где первым корнем является $x_1=-1/3$. Разделим кубический многочлен из левой части уравнения на $x+1/3$, в результате получим квадратный трехчлен $3x^2-33x+6$. Квадратное уравнение $3x^2-33x+6=0$ равносильно уравнению $x^2-11x+2=0$, откуда найдем второй и третий корни $x_{2,3}=(11\pm\sqrt{113})/2$ исходного кубического уравнения.

При $m=-10$ имеем уравнение $3x^3-10x^2-5x+2=0$, где первым корнем является $x_1=-2/3$. Разделим кубический многочлен из левой части уравнения на $x+2/3$, в результате получим квадратный трехчлен $3x^2-12x+3$. Квадратное уравнение $3x^2-12x+3=0$ равносильно уравнению $x^2-4x+1=0$, откуда найдем второй и третий корни $x_{2,3}=2\pm\sqrt{3}$ исходного кубического уравнения.

Случаи $m=0$, $m=1$ и $m=3$ рассматриваются аналогично.