Занятие 1.4
Однородные системы линейных алгебраических уравнений

1 Основные понятия

Однородная система линейных алгебраических уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0, \end{cases}$$

или

$$AX = O.$$

Однородная система всегда совместна и всегда имеет нулевое (тривиальное) решение $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$. В дополнение к этому она также имеет ненулевые решения, если ранг ее матрицы A меньше числа неизвестных. Ранг матрицы - это максимальное количество ее линейно независимых строк или столбцов.

Фундаментальной системой решений однородной системы выступает любой набор $k = n - r(A)$ линейно независимых решений этой системы, где n - количество неизвестных в системе, а $r(A)$ - ранг ее матрицы A. Зная фундаментальную систему решений, мы можем сформировать общее решение однородной системы в виде

$$X = c_1F_1 + c_2F_2 + ... + c_kF_k,$$

где $F_1, F_2, ..., F_k$ - фундаментальная система решений, c_1, c_2, ..., c_k - некоторые постоянные, придавая которым определенные значения, мы получим то или иное частное решение.

Однородные системы решаются с помощью метода Гаусса, который условно делится на два этапа:

1. Прямой ход.

Исходная система уравнений приводится к равносильной системе ступенчатого вида.

2. Обратный ход.

Последовательно, начиная с последнего уравнения ступенчатой системы, находятся все неизвестные.

ЗАДАНИЕ

1. Найти фундаментальную систему решений и общее решение однородной системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

2. Составить задачу, обратную задаче 1, предполагая, что определяемая в задаче 1 величина известна, а известная величина, наоборот, подлежит определению. Решить составленную задачу.

3. Обобщить задачу 1. Решить полученную задачу.

Пример решения приведен в последнем разделе.

2 Примеры решений

ЗАДАНИЕ

1. Найти фундаментальную систему решений и общее решение однородной системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Решение:

Сначала найдем общее решение системы методом Гаусса.

Прямой ход

1. Приводим матрицу системы к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix} \overset{(1)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix} \overset{(2)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & -1 \\ 0 & -5 & -1 \end{pmatrix} \overset{(3)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Сделаны следующие элементарные преобразования:

(1) переставили местами первую и вторую строки,

(2) из второй строки вычли первую строку, умноженную на 2, и из третьей строки вычли первую строку, умноженную на 3,

(3) вторую строку умножили на -1, после чего прибавили ее к третьей строке.

Заметим, что у однородной системы нет необходимости рассматривать расширенную матрицу $\widetilde{A}$, т.к. для любой однородной системы всегда выполняется равенство $r(A) = r(\widetilde{A})$, и нулевой столбец свободных членов O остается нулевым при любых элементарных преобразованиях.

2. Находим ранг матрицы системы и определяем количество решений. Ранг матрицы равен количеству ненулевых строк в итоговой ступенчатой матрице из пункта 1. В нашем случае ранг матрицы $r(A) = 2$. Поскольку число неизвестных $n = 3$ и $r(A) < n$, то система уравнений имеет бесконечное множество решений.

3. Формируем базисный минор итоговой ступенчатой матрицы из пункта 1. Поскольку $r(A) = 2$, то он должен иметь второй порядок. Возьмем элементы первого и второго столбцов:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 5 \neq 0.$$

Важно убедиться, что данный минор отличен от нуля. Если бы он оказался равен нулю, то нам необходимо было бы выбрать другие столбцы для формирования базисного минора.

4. Определяем базисные неизвестные. Поскольку мы включили в базисный минор первый и второй столбцы ступенчатой матрицы, то базисными неизвестными будут x_1 и x_2. Оставшаяся неизвестная x_3 будет свободной.

5. Выписываем систему уравнений, соответствующую полученной в пункте 1 ступенчатой матрице:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ \qquad 5x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

6. Полагаем, что свободная неизвестная $x_3 = c$, где c – произвольная постоянная, и переносим в системе уравнений слагаемые, содержащие свободную неизвестную, в правую часть уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -c, \\ \qquad 5x_2 = -c. \end{cases}$$

Обратный ход

7. Начиная с последнего уравнения системы, находим выражения базисных неизвестных x_1 и x_2 через свободную:

$$x_2 = -c/5,$$
$$x_1 = -c - x_2 = -c + c/5 = -4c/5.$$

8. Выписываем общее решение:

$$\begin{cases} x_1 = -4c/5, \\ x_2 = -c/5, \\ x_3 = c. \end{cases}$$

Также это решение можно записать в виде вектор-столбца:

$$X_{\text{общ}} = \begin{pmatrix} -4c/5 \\ -c/5 \\ c \end{pmatrix}.$$

Теперь найдем фундаментальную систему решений. Количество решений, входящих в фундаментальную систему, определяется как разность между количеством неизвестных и рангом матрицы системы. В нашем случае, фундаментальная система решений состоит из $k = n - r(A) = 3 - 2 = 1$ решения. Фундаментальная система решений получается из общего решения путем придания произвольным постоянным таких значений, чтобы получившиеся частные решения были линейно независимы. Наше общее решение содержит лишь одну произвольную постоянную c. Пусть $c = 5$. Тогда

$$X_{\text{общ}} = \begin{pmatrix} -4c/5 \\ -c/5 \\ c \end{pmatrix} \overset{c=5}{\to} F = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, фундаментальная система решений заданной в задаче однородной системы линейных алгебраических уравнений состоит из одного частного решения F.

2. Составить задачу, обратную задаче 1, предполагая, что определяемая в задаче 1 величина известна, а известная величина, наоборот, подлежит определению. Решить составленную задачу.

Решение:

В прямой задаче для известной однородной системы линейных алгебраических уравнений находилась фундаментальная система решений. Обратим задачу:

Составить однородную систему линейных алгебраических уравнений по известной фундаментальной системе решений:

$$F = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Решим эту задачу. Поскольку вектор-столбец F имеет три элемента, то наша система уравнений содержит три неизвестные x_1, x_2 и x_3. Далее, количество решений k в фундаментальной системе решений, количество неизвестных n и ранг матрицы системы уравнений $r(A)$ связаны соотношением

$$k = n - r(A).$$

Откуда

$$r(A) = n - k = 3 - 1 = 2.$$

Это означает, что система уравнений должна иметь два линейно независимых уравнения, т.е. уравнения, ни одно из которых нельзя получить из остальных путем операций сложения/вычитания уравнений и умножения/деления уравнений на число. Также система уравнений может иметь произвольное количество дополнительных уравнений, которые представляют из себя линейную комбинацию первых двух. Будем искать лишь одно такое дополнительное уравнение.

Зная фундаментальную систему решений, мы всегда можем найти общее решение:

$$X_{\text{общ}} = c \cdot F = c \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4c \\ -c \\ 5c \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\begin{cases} x_1 = -4c, \\ x_2 = -c, \\ x_3 = 5c. \end{cases}$$

Зная значения неизвестных, подберем два линейно независимых уравнения, связывающих эти неизвестные между собой. Поскольку

$$x_1 + x_2 = -4c - c = -5c = -x_3$$

и

$$x_3 = 5c = -5 \cdot (-c) = -5x_2,$$

то получаем следующую систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ \qquad 5x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Важно убедиться, что получившиеся уравнения линейно независимы. Для этого составляем матрицу системы и находим ее ранг. Матрица системы есть

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Как можно видеть, матрица системы уже имеет ступенчатую форму, а значит, ее ранг равен количеству имеющихся в ней ненулевых строк. В нашем случае $r(A) = 2$, т.е. строки матрицы линейной независимы, что эквивалентно линейной независимости самих уравнений.

Чтобы найти дополнительные уравнения, мы должны дополнить матрицу A_1 нулевыми строками – каждая такая строка соответствует отдельному уравнению. И далее с помощью элементарных преобразований строк переводим эти нулевые строки в ненулевые. Поскольку мы ищем только одно дополнительное уравнение, добавляем в матрицу A_1 одну нулевую строку. После чего выполняем ряд элементарных преобразований таким образом, чтобы в итоге получилась матрица системы из прямой задачи.

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{(1)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{(2)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix} = A_3$$

Сделаны следующие элементарные преобразования:

(1) вторую строку умножили на -1,

(2) ко второй строке прибавили первую строку, умноженную на 2, после чего первую и вторую строки прибавили к третьей.

В итоге по получившейся матрице A_3 выписываем однородную систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0, \end{cases}$$

которая полностью совпадает с системой уравнений, заданной в прямой задаче.

Важно отметить, что в результате решения обратной задачи можно получить множество вариантов однородных систем линейных алгебраических уравнений, различающихся как количеством уравнений, так и коэффициентами при неизвестных. Другими словами, обратная задача не имеет единственного решения.

3. Обобщить задачу 1. Решить полученную задачу.

Решение:

В прямой задаче фундаментальная система решений исходной системы уравнений включала в себя только одно решение. Сейчас составим систему уравнений, у которой фундаментальная система решений состоит из двух решений. Для этого воспользуемся равенством $k = n - r(A)$. В этом равенстве два параметра мы можем задать произвольно, значение третьего зависит от выбранных значений первых двух. Поскольку количество решений k в фундаментальной системе решений мы ранее уже положили равным двум ($k = 2$), то можно произвольно задать либо n (количество неизвестных в системе уравнений), либо $r(A)$ (ранг матрицы системы уравнений, равный количеству линейно независимых уравнений в системе). Зададим $r(A)$ – пусть система имеет два линейно независимых уравнения, т.е. положим $r(A) = 2$. Тогда число неизвестных должно быть

$$n = k + r(A) = 2 + 2 = 4.$$

Помимо двух линейно независимых уравнений в систему можно ввести произвольное количество дополнительных уравнений, линейно выражающихся через первые два. Мы введем два дополнительных уравнения. Тогда наша система будет состоять из четырех уравнений с четырьмя неизвестными, причем линейно независимыми будут только два уравнения из четырех, а оставшиеся два будут получаться из них путем последовательности операций сложения/вычитания и умножения/деления на число.

Определившись с параметрами системы, выпишем соответствующую им ступенчатую матрицу по следующим правилам:

1. Линейно независимым уравнениям соответствуют ненулевые строки в виде нисходящих ступеней. Значения ненулевых элементов этих строк можно выбирать произвольным образом.

2. Каждому дополнительному уравнению соответствует нулевая строка.

3. Количество столбцов совпадает с количеством неизвестных.

В нашем случае первые две строки ступенчатой матрицы должны быть ненулевыми и образовывать нисходящие ступени, последние две строки должны быть нулевыми, и у матрицы должно быть четыре столбца по числу неизвестных:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Отметим, что значения ненулевых элементов матрицы A_1 выбирались произвольно.

Теперь с помощью последовательности элементарных преобразований строк переведем нулевые элементы матрицы A_1 в ненулевые:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{(1)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 6 & -5 \\ 0 & 1 & 6 & -5 \\ 0 & 1 & 6 & -5 \end{pmatrix} \overset{(2)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 5 \\ 0 & -3 & -18 & 15 \\ 0 & 2 & 12 & -10 \end{pmatrix} \overset{(3)}{\sim}$$

$$\overset{(3)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 3 & 5 & 6 & -4 \\ 4 & 5 & -2 & 3 \\ 3 & 8 & 24 & -19 \end{pmatrix} = A_2$$

Сделаны следующие элементарные преобразования:

(1) прибавили вторую строку к третьей и четвертой,

(2) вторую, третью и четвертую строки умножили на -1, -3 и 2, соответственно.

(3) ко второй строке добавили первую, умноженную на 3, далее к третьей строке добавили первую, умноженную на 4, и, наконец, к четвертой строке добавили первую, умноженную на 3.

Вид итоговой матрицы A_2 зависит от выбора последовательности элементарных преобразований, которая, в свою очередь, может быть любой.

По полученной матрице A_2 выписываем однородную систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0 \end{cases}$$

и формулируем обобщенную задачу:

Найти фундаментальную систему решений и общее решение приведенной выше однородной системы линейных алгебраических уравнений.

Обобщенная задача *решается* также как и прямая. Сначала по методу Гаусса находим общее решение системы:

$$X_{\text{общ}} = \begin{pmatrix} 8c_1 - 7c_2 \\ -6c_1 + 5c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix},$$

и далее, придавая произвольным постоянным c_1 и c_2 определенные значения $c_1 = 1$, $c_2 = 0$ и $c_1 = 0$, $c_2 = 1$, получаем два линейно независимых частных решения

$$F_1 = \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; F_2 = \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

которые образуют фундаментальную систему решений.