Занятие 1.3
Матричные уравнения
и способы их решения

1 Матричные уравнения

Матричные уравнения - это уравнения, в которых неизвестной величиной выступает матрица. Типичные матричные уравнения выглядят следующим образом:

$$AX = C,\ XB = C,\ AXB = C,$$

где A, B, C - известные матрицы, а X - неизвестная.

Матричные уравнения решаются путем умножения их левой и правой частей на матрицу, обратную одной из известных матриц A или B. Поскольку при умножении матриц множители нельзя менять местами, обе части уравнения умножаются одновременно на обратную матрицу с той стороны, с которой стоит известная матрица A или B.

1. $AX = C$.

Здесь матрица A стоит слева от X. Поэтому обе части уравнения умножаем на A^{-1} слева:

$$A^{-1}AX = A^{-1}C,$$
$$EX = A^{-1}C,$$
$$X = A^{-1}C.$$

2. $XB = C$.

Здесь матрица B стоит справа от X. Поэтому обе части уравнения умножаем на B^{-1} справа:

$$XBB^{-1} = CB^{-1},$$

$$XE = CB^{-1},$$
$$X = CB^{-1}.$$

3. $AXB = C$.
Обе части уравнения умножаем слева на A^{-1} и справа на B^{-1}:
$$A^{-1}AXBB^{-1} = A^{-1}CB^{-1},$$
$$X = A^{-1}CB^{-1}.$$

ЗАДАНИЕ I

1. Решить матричное уравнение $A \cdot X = C$, если
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Составить задачи, обратные задаче 1, предполагая, что определяемая в задаче 1 величина известна, а известная величина, наоборот, подлежит определению. Решить составленные задачи.

3. Составить задачи, аналогичные задаче 1, путем увеличения порядка матриц, входящих в матричное уравнение, или изменения положения матричных множителей в этом же уравнении. Решить составленные задачи.

4. Обобщить задачу 1 на большее число неизвестных. Решить получившиеся задачи.

ЗАДАНИЕ II

1. Решить матричное уравнение $A \cdot X \cdot B = C$, если
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Составить задачи, обратные задаче 1, предполагая, что определяемые в задаче 1 величины известны, а одна из известных величин, наоборот, подлежит определению. Решить составленные задачи.

3. Составить задачи, аналогичные задаче 1, путем увеличения порядка матриц, входящих в матричное уравнение. Решить составленные задачи.

Пример решения приведен в последнем разделе.

2 Примеры решений

ЗАДАНИЕ I

1. Решить матричное уравнение $A \cdot X = C$, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение:

Умножим обе части исходного уравнения $A \cdot X = C$ слева на обратную матрицу A^{-1}. Получим $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot C$. Так как $A^{-1} \cdot A = E$, то $X = A^{-1} \cdot C$.

Найдем обратную матрицу A^{-1}. Для этого вычислим определитель матрицы:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

и алгебраические дополнения ее элементов:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot a_{22} = 4, \ A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot a_{21} = -3,$$
$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot a_{12} = -1, \ A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot a_{11} = 1.$$

Тогда

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix},$$

откуда получим

$$X = A^{-1} \cdot C = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

2. Составить задачи, обратные задаче 1, предполагая, что определяемая в задаче 1 величина известна, а известная величина, наоборот, подлежит определению. Решить составленные задачи.

Решение:

В прямой задаче известными являются матрицы A и C. Соответственно, можно составить два варианта обратной задачи. В более простом варианте мы полагаем неизвестной величиной матрицу C. Тогда обратная задача звучит так: найти $C = A \cdot X$, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Эта задача решается простым перемножением матриц A и X, что является стандартным средством проверки правильности решения исходной прямой задачи.

Во втором, более сложном варианте обратной задачи мы полагаем неизвестной величиной матрицу A. Этот вариант обратной задачи имеет вид:

Решить матричное уравнение $A \cdot X = C$ относительно неизвестной матрицы A, если

$$X = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Учитывая, что произведение матриц некоммутативно, структура матричного уравнения получившейся обратной задачи отличается от структуры аналогичного уравнения прямой задачи, хотя внешне они выглядят полностью идентичными. Соответственно, меняется и основной прием решения данного уравнения – мы умножаем обе части уравнения на матрицу, обратную известному множителю из левой части уравнения, не слева, а справа.

Итак, умножим обе части исходного уравнения $A \cdot X = C$ справа на обратную матрицу X^{-1}. Получим $A \cdot X \cdot X^{-1} = C \cdot X^{-1}$. Так как $X \cdot X^{-1} = E$, то $A = C \cdot X^{-1}$.

Найдем обратную матрицу X^{-1}. Вычислим определитель матрицы

$$\det X = \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

и алгебраические дополнения ее элементов

$$X_{11} = (-1)^{1+1} \cdot x_{22} = 4,\ X_{12} = (-1)^{1+2} \cdot x_{21} = 1,$$
$$X_{21} = (-1)^{2+1} \cdot x_{12} = 5,\ X_{22} = (-1)^{2+2} \cdot x_{11} = 2.$$

Тогда

$$X^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/3 & 5/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix},$$

откуда получим

$$A = C \cdot X^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4/3 & 5/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

В итоге мы получили матрицу A из прямой задачи.

3. Составить задачи, аналогичные задаче 1, путем увеличения порядка матриц, входящих в матричное уравнение, или изменения положения матричных множителей в этом же уравнении.

Решение:

Сначала составим аналогичную задачу путем изменения порядка матриц в уравнении. В задаче 1 использовались матрицы второго порядка. Для аналогичной задачи используем матрицы третьего порядка:

Решить матричное уравнение $A \cdot X = C$, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Эта задача *решается* по тому же алгоритму, что и задача 1:

$$X = A^{-1} \cdot C = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -2 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ -1 & -2 & -4 \\ 0 & -3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Вторую аналогичную задачу составляем путем изменения положения матричных множителей в уравнении, т.е. в левой части этого уравнения меняем местами известную и неизвестную матрицы. В результате получаем задачу:

Решить матричное уравнение $X \cdot B = C$, если

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Данная задача *решается* так же, как и вторая обратная задача, составленная в рамках задачи 2:

$$X = C \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}.$$

4. Обобщить задачу 1 на большее число неизвестных. Решить получившиеся задачи.

Решение:

Сформулируем задачу для двух неизвестных матриц X и Y:

Решить матричное уравнение $A \cdot X = C \cdot Y$, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Из одного уравнения можно однозначно выразить лишь одну неизвестную. Пусть это будет X:

$$X = A^{-1} \cdot C \cdot Y = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot Y = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot Y.$$

Тогда вторая неизвестная Y может быть любой, на нее каких-либо ограничений не накладывается. Каждой конкретной матрице Y соответствует определенная матрица X, вычисляемая по полученной выше формуле, и каждая такая пара матриц X и Y является решением исходного матричного уравнения. Поскольку неизвестная Y может принимать бесконечное количество значений, наше уравнение имеет бесконечное число решений.

Приведем в качестве примера два конкретных решения. Для этого зададим неизвестной Y два определенных значения:

$$Y_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow X_1 = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix},$$

$$Y_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow X_1 = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Каждая из получившихся пар X_1, Y_1 и X_2, Y_2 является решением исходного уравнения.

Еще одним обобщением задачи 1 на случай двух неизвестных служит система из двух матричных уравнений:

$$\begin{cases} A_1 \cdot X + B_1 \cdot Y = C_1, \\ A_2 \cdot X + B_2 \cdot Y = C_2, \end{cases}$$

где A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2 – заданные матрицы. Эта система может быть решена стандартным методом исключения неизвестных.

ЗАДАНИЕ II

1. Решить матричное уравнение $A \cdot X \cdot B = C$, если
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение:

Умножим обе части исходного уравнения $A \cdot X \cdot B = C$ слева на обратную матрицу A^{-1} и справа на обратную матрицу B^{-1}. Получим $A^{-1} \cdot A \cdot X \cdot B \cdot B^{-1} = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}$. Так как $A^{-1} \cdot A = E$, $B \cdot B^{-1} = E$, то $X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}$.

Вычислив обратные матрицы
$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix},\ B^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$
находим неизвестную матрицу X умножением трех матриц:
$$X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. Составить задачи, обратные задаче 1, предполагая, что определяемые в задаче 1 величины известны, а одна из известных величин, наоборот, подлежит определению. Решить составленные задачи.

Решение:

Поскольку в прямой задаче известными являются три матрицы A, B и C, то можно составить три обратные задачи относительно каждой из них:

а) матрицы A, X и C известны, матрица B неизвестна;

б) матрицы X, B и C известны, матрица A неизвестна;

в) матрицы A, X и B известны, матрица C неизвестна.

Рассмотрим подробно задачу (а). Она звучит так:

Решить матричное уравнение $A \cdot X \cdot B = C$ относительно неизвестной матрицы B, если
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Данная задача *решается* путем умножения обеих частей матричного уравнения $A \cdot X \cdot B = C$ слева на обратную матрицу $(A \cdot X)^{-1}$. Тогда $B = (A \cdot X)^{-1} \cdot C$.

Имеем

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 8 & 3 \end{pmatrix},$$

$$(A \cdot X)^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -8 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -8 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Получилась та же матрица B, что была дана в прямой задаче.

3. Составить задачи, аналогичные задаче 1, путем увеличения порядка матриц, входящих в матричное уравнение. Решить составленные задачи.

Решение:

В задаче 1 использовались матрицы второго порядка. Для аналогичной задачи используем матрицы третьего порядка:

Решить матричное уравнение $A \cdot X \cdot B = C$, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Эта задача *решается* по тому же алгоритму, что и задача 1. Находим обратные матрицы A^{-1} и B^{-1}:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -2 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix},\ B^{-1} = \begin{pmatrix} 2.5 & 1 & -0.5 \\ 1.5 & 1 & -0.5 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}$$

и вычисляем X:

$$X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -2 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2.5 & 1 & -0.5 \\ 1.5 & 1 & -0.5 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 14.5 & 6 & 0.5 \\ -7.5 & -3 & -0.5 \\ -5.5 & -3 & 0.5 \end{pmatrix}.$$