Занятие 1.2
Определители, обратная матрица и скалярное произведение геометрических векторов

1 Определители и обратная матрица

Сначала рассмотрим определители квадратных матриц и основанные на них понятия.

Определитель квадратной матрицы - это число, вычисляемое по заданному правилу из элементов данной матрицы:

1) для матрицы первого порядка

$A = (a_{11})$, $\det A = a_{11}$,

2) для матрицы второго порядка

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$,

3) для матрицы третьего порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - \\ - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{21}a_{12}a_{33}.$$

Последняя формула составляется по **правилу треугольников**, вытекающему из ее геометрической интерпретации:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = +\begin{vmatrix} \mathbf{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & \mathbf{a_{22}} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & \mathbf{a_{33}} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \mathbf{a_{12}} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & \mathbf{a_{23}} \\ \mathbf{a_{31}} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \mathbf{a_{13}} \\ \mathbf{a_{21}} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & \mathbf{a_{32}} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$- \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \mathbf{a_{13}} \\ a_{21} & \mathbf{a_{22}} & a_{23} \\ \mathbf{a_{31}} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & \mathbf{a_{12}} & a_{13} \\ \mathbf{a_{21}} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & \mathbf{a_{33}} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \mathbf{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & \mathbf{a_{23}} \\ a_{31} & \mathbf{a_{32}} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Минором M_{ij} элемента a_{ij} матрицы A называется определитель матрицы, получающейся из данной путем вычеркивания i-ой строки и j-ого столбца. В свою очередь, **алгебраическое дополнение** A_{ij} элемента a_{ij} матрицы A есть минор M_{ij}, умноженный на $(-1)^{i+j}$. Алгебраические дополнения элементов матрицы A выступают элементами **присоединенной матрицы** A^*, причем алгебраические дополнения элементов i-ой строки матрицы A располагаются в i-том столбце присоединенной матрицы A^*.

Теперь переходим непосредственно к обратной матрице. Квадратная матрица A^{-1} называется **обратной** квадратной матрице A, если она удовлетворяет условию $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$, где E – единичная матрица того же порядка, что и матрица A.

Обратная матрица вычисляется по формуле: $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \cdot A^*$.

ЗАДАНИЕ I

1. Найти матрицу, обратную матрице A, если

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$, б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

2. Составить задачу, обратную задаче 1, предполагая, что определяемая в задаче 1 величина известна, а известная величина, наоборот, подлежит определению. Решить составленную задачу.

3. Обобщить задачу 1, задействовав линейные операции над матрицами. Решить полученные задачи.

4. Составить и решить задачи, аналогичные задаче 3, но дополнительно включающие в себя задачу 2 как составной элемент.

Пример решения для случая (б) приведен в последнем разделе.

2 Скалярное произведение

Скалярным произведением двух ненулевых геометрических векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними.

Обозначение: $\vec{a} \cdot \vec{b}$ или $(\vec{a}, \vec{b})$.

По определению $(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$.

Таким образом, на множестве геометрических векторов определено правило, ставящее в соответствие любой паре векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ из этого множества некоторое действительное число $(\vec{a}, \vec{b})$. Само правило называют **операцией скалярного умножения**. Соответственно, скалярное произведение $(\vec{a}, \vec{b})$ - это результат операции скалярного умножения.

Из определения скалярного произведения вытекают следующие его свойства:

1) коммутативный закон

$$(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a}),$$

2) дистрибутивный закон

$$(\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{c}) + (\vec{b}, \vec{c}),$$

3) ассоциативный закон относительно числового множителя

$$(\lambda\vec{a}, \vec{b}) = \lambda(\vec{a}, \vec{b}) \ \forall\lambda \in R,$$

4) неотрицательность скалярного квадрата

$$(\vec{a}, \vec{a}) \geq 0, \text{ причем } (\vec{a}, \vec{a}) = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}.$$

Мы определили скалярное произведение путем задания расчетной формулы, из которой затем вывели его свойства. Это прямой способ задания скалярного произведения. Однако, можно использовать также и обратный способ: сначала фиксировать свойства, которым должно удовлетворять скалярное произведение, а потом под эти свойства подбирать расчетную формулу. Обратный способ обладает большей степенью общности и часто используется для ввода скалярного произведения на множествах других математических объектов помимо геометрических векторов.

Ненулевые векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются **ортогональными (перпендикулярными)**, если угол между ними равен 90° или $\pi/2$.

Если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ортогональны, то $(\vec{a},\vec{b})=0$. И наоборот, если $(\vec{a},\vec{b})=0$, то $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ортогональны. На основе этого свойства можно сформулировать эквивалентное определение ортогональности:

Ненулевые векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются **ортогональными (перпендикулярными)**, если $(\vec{a},\vec{b})=0$.

Последнее определение не использует понятие угла между векторами. Поэтому такое определение ортогональности формально возможно ввести и на множестве других математических объектов, для которых можно определить скалярное произведение, но нельзя определить геометрическое понятие угла между ними.

ЗАДАНИЕ II

1. Даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Вычислить:

а) $(\vec{a}-\vec{b})^2$, если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $2\pi/3$, а их длины равны $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=4$,

б) $(\vec{a}+\vec{b})^2$, если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ противоположно направлены, а их длины равны $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=2$.

Примечание: $(\vec{a}-\vec{b})^2=(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=(\vec{a}-\vec{b},\vec{a}-\vec{b})$.

2. Составить задачи, обратные задаче 1, предполагая, что определяемая в задаче 1 величина известна, а одна из известных величин, наоборот, подлежит определению. Решить составленные задачи.

3. Обобщить задачи 1 и 2 на большее количество векторов. Решить полученные задачи.

Пример решения для случая (а) приведен в последнем разделе.

3 Примеры решений

ЗАДАНИЕ I

1. Найти матрицу, обратную матрице A, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение:

Для нахождения обратной матрицы воспользуемся стандартной формулой:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^*,$$

где

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

– это присоединенная матрица, состоящая из алгебраических дополнений A_{ij} элементов a_{ij} матрицы A. Необходимо обратить внимание на тот факт, что алгебраические дополнения элементов i-ой строки матрицы A записываются в i-ый столбец матрицы A^*.

Найдем определитель матрицы A по правилу треугольников:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 \cdot 1 + 0 \cdot 3 \cdot 1 - 1 \cdot 2 \cdot 1 - 0 \cdot 3 \cdot 2 - 3 \cdot 1 \cdot 1 = \\ = 2 \neq 0.$$

Вычислим алгебраические дополнения элементов матрицы A:

1) первая строка

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1,\ A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1,\ A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -2,$$

2) вторая строка

$$A_{21} = -3, A_{22} = 1, A_{23} = 0,$$

3) третья строка

$$A_{31} = 1, A_{32} = -1, A_{33} = 2.$$

Тогда

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Откуда по стандартной формуле получаем обратную матрицу

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\cdot A^* = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Составить задачу, обратную задаче 1, предполагая, что определяемая в задаче 1 величина известна, а известная величина, наоборот, подлежит определению. Решить составленную задачу.

Решение:

В задаче 1 для известной матрицы A определялась обратная ей матрица A^{-1}. Соответственно, задача, обратная задаче 1, имеет вид:

Найти матрицу A, если известна обратная ей матрица A^{-1}.

Чтобы *решить* данную задачу, надо воспользоваться одним из свойств обратной матрицы:

$$(A^{-1})^{-1} = A,$$

т.е. нам просто необходимо найти матрицу, обратную матрице A^{-1}:

$$A = \frac{1}{\det(A^{-1})}\cdot (A^{-1})^*.$$

Находим определитель обратной матрицы:

$$\det(A^{-1}) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}$$

и алгебраические дополнения ее элементов:

1) первая строка

$$A_{11}^{-1} = \frac{1}{2}, A_{12}^{-1} = 0, A_{13}^{-1} = \frac{1}{2},$$

2) вторая строка

$$A_{21}^{-1} = \frac{3}{2}, A_{22}^{-1} = 1, A_{23}^{-1} = \frac{3}{2},$$

3) третья строка

$$A_{31}^{-1} = \frac{1}{2}, A_{32}^{-1} = \frac{1}{2}, A_{33}^{-1} = 1.$$

Тогда

$$A = \frac{1}{\det(A^{-1})} \cdot \left(A^{-1}\right)^* = 2 \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Как видно, получилась исходная матрица A.

3. Обобщить задачу 1, задействовав линейные операции над матрицами. Решить полученные задачи.

Решение:

В задаче 1 нам необходимо было найти только обратную матрицу. В более общем случае нахождение обратной матрицы может сопровождаться выполнением линейных операций над матрицами. Например, возможен вариант вычисления обратной матрицы вида $(3A + B)^{-1}$, где A и B – заданные матрицы *одного* порядка. В этом случае сначала выполняют линейные операции, а затем переходят непосредственно к нахождению обратной матрицы.

4. Составить и решить задачи, аналогичные задаче 3, но дополнительно включающие в себя задачу 2 как составной элемент.

Решение:

Задачу, удовлетворяющую поставленным условиям, можно сформулировать, например, таким образом:

Найти обратную матрицу $(2A - B)^{-1}$, если известны матрицы A и B^{-1}.

Решение этой задачи разбивается на три этапа: сначала находим матрицу B по ее обратной B^{-1}, далее вычисляем $2A - B$ и наконец находим саму обратную матрицу $(2A - B)^{-1}$.

ЗАДАНИЕ II

1. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $2\pi/3$, их длины равны $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$. Вычислить $(\vec{a} - \vec{b})^2$.

Решение:

$$(\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2 = |\vec{a}|^2 - 2 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) + |\vec{b}|^2 =$$
$$= 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cos(2\pi/3) + 4^2 = 37.$$

Примечание: Здесь и далее мы будем использовать в качестве обозначения скалярного произведения точку $\cdot$, причем для компактности при проведении математических выкладок будем ее просто подразумевать, т.е. вместо $\vec{a} \cdot \vec{b}$ будем писать $\vec{a}\vec{b}$. Также скалярное произведение вектора на себя мы будем записывать в виде скалярного квадрата: $\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2$.

2. Составить задачи, обратные задаче 1, предполагая, что определяемая в задаче 1 величина известна, а одна из известных величин, наоборот, подлежит определению. Решить составленные задачи.

Решение:

Приведем в качестве примера две задачи, обратные задаче 1:

А. Известны значение выражения $(\vec{a} - \vec{b})^2$ и длины векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Найти угол между этими векторами.

Б. Известны значение выражения $(\vec{a} - \vec{b})^2$, длина вектора $\vec{a}$ и угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Найти длину второго вектора.

Сначала *решим* задачу 2А. Известно, что $(\vec{a}-\vec{b})^2 = 37$, $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$. Тогда

$$(\vec{a}-\vec{b})^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2,$$
$$(\vec{a}-\vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 - 2\cdot|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) + |\vec{b}|^2,$$
$$37 = 3^2 - 2\cdot 3\cdot 4\cdot\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) + 4^2,$$
$$\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = -0.5,$$
$$(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = 2\pi/3.$$

Полученное значение угла совпадает с тем, что было дано в условии задачи 1.

Теперь *решим* задачу 2Б. Нам дано, что $(\vec{a}-\vec{b})^2 = 37$, $|\vec{a}| = 3$, $(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = 2\pi/3$. Тогда

$$(\vec{a}-\vec{b})^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2,$$
$$(\vec{a}-\vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 - 2\cdot|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) + |\vec{b}|^2,$$
$$37 = 3^2 - 2\cdot 3\cdot|\vec{b}|\cdot(-0.5) + |\vec{b}|^2,$$
$$|\vec{b}|^2 + 3|\vec{b}| - 28 = 0.$$

Данное квадратное уравнение имеет два корня 4 и -7. Поскольку модуль вектора есть величина неотрицательная, мы исключаем из рассмотрения отрицательный корень. Получаем

$$|\vec{b}| = 4.$$

Найденное значение совпадает с длиной вектора $\vec{b}$ из условия задачи 1.

3. Обобщить задачи 1 и 2 на большее количество векторов. Решить полученные задачи.

Решение:

В предыдущих задачах мы рассматривали только два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Рассмотрим теперь три вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Тогда задача, обобщающая задачу 1, может выглядеть таким образом:

Даны длины трех векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, также заданы углы между этими векторами. Найти $(\vec{a}+\vec{b})^2-(\vec{b}+\vec{c})^2$.

Чтобы *решить* задачу, надо сначала выполнить преобразование
$$(\vec{a}+\vec{b})^2-(\vec{b}+\vec{c})^2=\vec{a}^2+2\vec{a}\vec{b}+\vec{b}^2-\vec{b}^2-2\vec{b}\vec{c}-\vec{c}^2,$$
упростить получившееся выражение и воспользоваться формулой скалярного произведения.

Любая из задач 2А и 2Б может быть обобщена аналогичным образом.