Занятие 1.1
Геометрические векторы и числовые матрицы

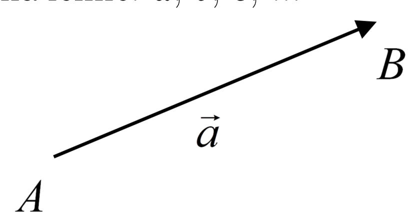
1 Линейные операции

Рассмотрим два математических объекта разной природы - геометрический вектор и числовую матрицу.

Числовая матрица - это совокупность чисел, расположенных в виде таблицы.
Обозначение: A, B, C, ...

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Геометрический вектор - это отрезок с заданным направлением.
Обозначение: $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, ...



Оба математических объекта задаются визуально, но разными способами: в первом случае мы выписываем таблицу чисел, во втором - чертим направленный отрезок.

Все числовые матрицы одинакового размера $m \times n$ объединим в множество $M_{m\times n}$, а геометрические векторы, расположенные в трехмерном пространстве, - в множество V_3. Теперь определим на каждом из этих множеств линейные операции - операции сложения и умножения на число.

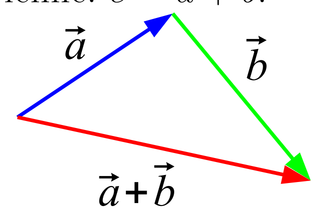
Операция сложения

Суммой матриц одинакового размера A и B называется матрица C, элементы которой равны сумме соответствующих элементов матриц A и B.
Обозначение: $C = A + B$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix}.$$

Суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, направленный из начала вектора $\vec{a}$ в конец вектора $\vec{b}$ при условии, что $\vec{b}$ приложен к концу $\vec{a}$.
Обозначение: $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$.



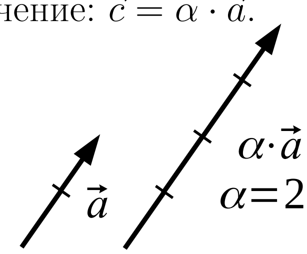
Операция умножения на число

Произведением матрицы A **на число** α называется матрица C, каждый элемент которой есть произведение соответствующего элемента матрицы A на число α.
Обозначение: $C = \alpha \cdot A$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

$$\alpha \cdot A = \begin{pmatrix} \alpha \cdot a_{11} & \alpha \cdot a_{12} \\ \alpha \cdot a_{21} & \alpha \cdot a_{22} \end{pmatrix}.$$

Произведением вектора $\vec{a}$ **на число** α называется такой вектор $\vec{c}$, что $|\vec{c}| = |\alpha|\,|\vec{a}|$ и $\vec{c} \uparrow\uparrow \vec{a}$, если $\alpha > 0$, или $\vec{c} \uparrow\downarrow \vec{a}$, если $\alpha < 0$.
Обозначение: $\vec{c} = \alpha \cdot \vec{a}$.



Операции сложения и умножения на число задаются для матриц и векторов по-разному - в первом случае используется аналитический способ (итоговая матрица получается в результате арифметических действий над элементами исходных матриц), а во втором случае применяется геометрический способ (итоговый вектор получается в результате заданных геометрических построений). Однако, в обоих случая соответственные операции обозначаются одним и тем же знаком (+ или $\cdot$) и обладают одними и теми же свойствами:

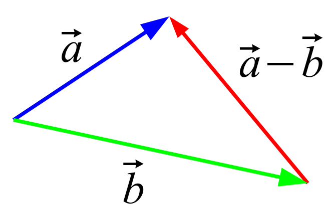
1) коммутативный закон сложения
$$a + b = b + a,$$
2) ассоциативный закон сложения
$$(a + b) + c = a + (b + c),$$
3) ассоциативный закон умножения на число
$$\alpha\,(\beta a) = (\alpha\beta)\,a = \beta\,(\alpha a),$$
4) дистрибутивный закон умножения на число
$$\alpha\,(a + b) = \alpha a + \alpha b,$$
$$(\alpha + \beta)\,a = \alpha a + \beta a,$$
где под символами a, b и c понимаются либо матрицы A, B и C, либо векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, и в зависимости от этого выбора используются операции сложения и умножения на число либо для матриц, либо для векторов.

Операция вычитания

Операция вычитания вводится через операции сложения и умножения на число по правилу:
$$c = a - b = a + (-1)\cdot b,$$
при этом элемент c называется **разностью** элементов a и b. Учитывая определения операций сложения и умножения на число для матриц и векторов, получаем:

Разностью матриц одинакового размера A и B называется матрица C, элементы которой равны разности соответствующих элементов матриц A и B.
Обозначение: $C = A - B$.
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$
$$A - B = \begin{pmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} \end{pmatrix}.$$

Разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, сумма которого с вектором $\vec{b}$ равна вектору $\vec{a}$.
Обозначение: $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$.



ЗАДАНИЕ I

1. Вычислить (а) $A+B$, (б) $A-B$, (в) $3\cdot A$, если

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -3 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 4 & 3\end{pmatrix}.$$

2. Составить задачи, обратные задаче 1, предполагая, что определяемые в задаче 1 величины изначально известны, а какая-либо известная величина, наоборот, подлежит определению. Решить составленные задачи.

3. Составить задачу, аналогичную задаче 1, для геометрических векторов. Решить ее.

4. Составить задачи, обратные задаче 3. Решить их.

5. Обобщить отдельно задачи 1 и 3, задействовав в каждой формулировке все линейные операции. Решить полученные задачи.

Пример решения для случая (а) приведен в последнем разделе.

2 Линейная зависимость

Рассмотрим линейную зависимость матриц и векторов.

Матрицы $A_1, A_2, ..., A_n$ одинакового размера называются **линейно зависимыми**, если существуют одновременно не равные нулю действительные числа $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, такие, что

$$\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + ... + \alpha_n A_n = O,$$

где O - нулевая матрица. В противном случае матрицы называются **линейно независимыми**.

Векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ называются **линейно зависимыми**, если существуют одновременно не равные нулю действительные числа $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, такие, что

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + ... + \alpha_n \vec{a}_n = \vec{0},$$

где $\vec{0}$ - нулевой вектор. В противном случае векторы называются **линейно независимыми**.

Примеры:

1. Однострочные матрицы

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ и } A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix},$$

линейно зависимы т.к.

$$2 \cdot A_1 - A_2 = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2\cdot 1 - 2 & 2\cdot 2 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} = O.$$

2. Однострочные матрицы

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ и } A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix},$$

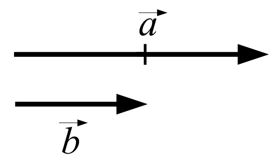
линейно независимы т.к. равенство

$$\alpha_3 A_3 + \alpha_4 A_4 = O$$

выполняется, только когда $\alpha_3 = 0$ и $\alpha_4 = 0$.

Примеры:

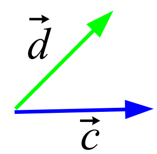
1. Векторы



линейно зависимы, т.к.

$$\vec{a} - 2\vec{b} = \vec{0}.$$

2. Векторы



линейно независимы, т.к. равенство

$$\alpha_1 \vec{c} + \alpha_2 \vec{d} = \vec{0}$$

выполняется, только когда $\alpha_1 = 0$ и $\alpha_2 = 0$.

Определения линейной зависимости для матриц и векторов можно объединить в одно *универсальное определение*:

Элементы a_1, a_2, ..., a_n одной природы называются **линейно зависимыми**, если существуют одновременно не равные нулю действительные числа $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, такие, что

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + ... + \alpha_n a_n = 0,$$

где 0 - нулевой элемент. В противном случае данные элементы называются **линейно независимыми**.

В этом определении в качестве элементов a_1, a_2, ..., a_n могут выступать как матрицы $A_1, A_2, ..., A_n$ одинакового размера, так и векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$. В зависимости от данного выбора используются соответствующие операции сложения и умножения на число, а также нулевой элемент (нулевая матрица или нулевой вектор).

Из универсального определения линейной зависимости сразу же можно сформулировать *универсальный критерий линейной зависимости*, пригодный как для матриц, так и для векторов:

Элементы a_1, a_2, ..., a_n линейно зависимы тогда и только тогда, когда один из этих элементов линейно выражается через остальные.

Например, если

$$a_1 = -\alpha_2 a_2 - ... - \alpha_n a_n,$$

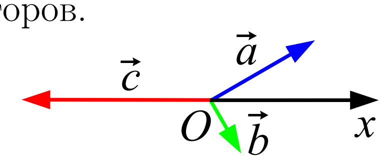
то

$$a_1 + \alpha_2 a_2 + ... + \alpha_n a_n = 0,$$

что означает линейную зависимость элементов a_1, a_2, ..., a_n, поскольку как минимум коэффициент перед a_1 в последнем выражении отличен от нуля.

ЗАДАНИЕ II

1. Пусть даны три вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, причем $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 1$, $|\vec{c}| = 3$, $(\widehat{\vec{a}, Ox}) = \pi/6$, $(\widehat{\vec{b}, Ox}) = -\pi/3$, $(\widehat{\vec{c}, Ox}) = \pi$. Установить линейную зависимость этих векторов.



2. Составить задачи, обратные задаче 1, введя в исходное условие факт линейной зависимости векторов и исключив из него одну из известных величин. Решить составленные задачи.

3. Для матриц составить задачу, аналогичную задаче 1. Решить ее.

4. Составить задачи, обратные задаче 3. Решить их.

5. Обобщить задачу 4 на большее количество матриц и связывающих их отношений линейной зависимости.

Пример решения приведен в последнем разделе.

3 Примеры решений

ЗАДАНИЕ I

1. Вычислить $A+B$, если

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -3 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 4 & 3\end{pmatrix}.$$

Решение:

Чтобы сложить матрицы A и B, надо сложить все элементы матрицы A с соответствующими элементами матрицы B:

$$C=A+B=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -3 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 4 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1-2 & 2+1\\ -3+4 & 1+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 3\\ 1 & 4\end{pmatrix}.$$

2. Составить задачи, обратные задаче 1, предполагая, что определяемые в задаче 1 величины изначально известны, а какая-либо известная величина, наоборот, подлежит определению. Решить составленные задачи.

Решение:

Задача 1 сводится к равенству $A+B=C$, где матрицы A и B известны, а матрица C подлежит определению. Теперь будем считать, что матрица C известна, а, скажем, матрица B неизвестна. Тогда обратную задачу можно сформулировать так:

Даны матрица A и сумма матриц $C=A+B$. Найти матрицу B.

Решим эту задачу. Поскольку $C=A+B$, то $B=C-A$. Тогда

$$B=C-A=\begin{pmatrix}-3 & 3\\ 1 & 4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3-(-1) & 3-2\\ 1-(-3) & 4-1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 4 & 3\end{pmatrix}.$$

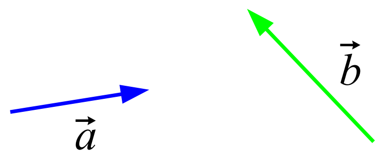
Сравнив ответ с данными из задачи 1, мы видим, что матрица B найдена верно.

3. Составить задачу, аналогичную задаче 1, для геометрических векторов. Решить ее.

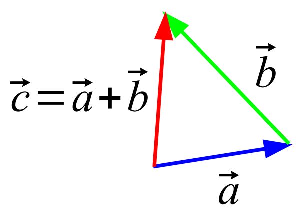
Решение:

Чтобы составить задачу, аналогичную задаче 1, для геометрических векторов, мы сохраним формулировку, но заменим матрицы на векторы:

Вычислить $\vec{a} + \vec{b}$, если



Чтобы *решить* эту задачу, вспомним, что операция сложения векторов задается геометрически. Выполним нужные геометрические построения:



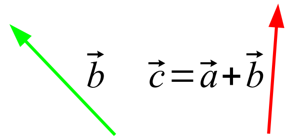
Вектор $\vec{c}$ - наш ответ.

4. Составить задачи, обратные задаче 3. Решить их.

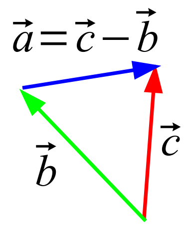
Решение:

В задаче 3 из равенства $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ по известным векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ищется их сумма - вектор $\vec{c}$. Предположим обратную ситуацию - нам известна сумма векторов, но неизвестно одно из слагаемых этой суммы. Соответственно, обратная задача будет иметь вид:

Даны вектор $\vec{b}$ и сумма векторов $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$. Найти вектор $\vec{a}$.



Решим задачу. Из равенства $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ выражаем вектор $\vec{a}$ в виде $\vec{a} = \vec{c} - \vec{b}$. Поскольку операция разности векторов задается геометрически, выполним нужные построения:



Как видим, получился тот же вектор $\vec{a}$, что был дан в задаче 3.

5. Обобщить отдельно задачи 1 и 3, задействовав в каждой формулировке все линейные операции. Решить полученные задачи.

Решение:

В задачах 1 и 3 нам необходимо было вычислить выражение, содержащее только одну линейную операцию - сложение. В более общем случае перед выполнением операции сложения нам часто приходится умножать исходные матрицы и векторы на какие-либо числа. Например, возможны такие варианты:

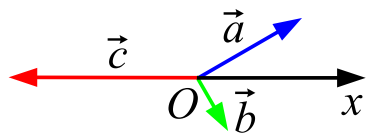
$$2 \cdot A + 3 \cdot B,$$
$$3 \cdot \vec{a} + 2 \cdot \vec{b}.$$

Учитывая особенности задания линейных операций, первое выражение вычисляется путем арифметических действий над элементами матриц, а второе - через геометрические построения.

ЗАДАНИЕ II

1. Пусть даны три вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, причем $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 1$, $|\vec{c}| = 3$, $(\widehat{\vec{a}, Ox}) = \pi/6$, $(\widehat{\vec{b}, Ox}) = -\pi/3$, $(\widehat{\vec{c}, Ox}) = \pi$. Установить линейную зависимость этих векторов.

© Семакин А.Н., 2021

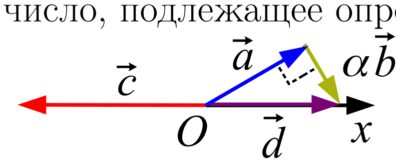


Решение:

Сначала найдем угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = (\widehat{\vec{a},Ox}) - (\widehat{\vec{b},Ox}) = \pi/6 + \pi/3 = \pi/2.$$

Теперь найдем вектор $\vec{d} = \vec{a} + \alpha\vec{b}$, потребовав, чтобы он лежал на оси Ox. Здесь $\alpha > 0$ - число, подлежащее определению.



Поскольку угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ прямой, то треугольник со сторонами $\vec{a}$, $\alpha\vec{b}$ и $\vec{d}$ прямоугольный. По теореме Пифагора

$$|\vec{d}| = \sqrt{|\vec{a}|^2 + |\alpha\vec{b}|^2} = \sqrt{2^2 + \alpha^2 \cdot 1^2} = \sqrt{4 + \alpha^2}.$$

В прямоугольном треугольнике косинус острого угла равен отношению прилежащего катета к гипотенузе:

$$\cos(\widehat{\vec{a},\vec{d}}) = \frac{|\vec{a}|}{|\vec{d}|} = \frac{2}{\sqrt{4+\alpha^2}}.$$

Вектор $\vec{d}$ будет лежать на оси Ox, если

$$(\widehat{\vec{a},\vec{d}}) = (\widehat{\vec{a},Ox}) = \pi/6.$$

Тогда

$$\cos(\widehat{\vec{a},\vec{d}}) = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\frac{2}{\sqrt{4+\alpha^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\sqrt{4+\alpha^2} = \frac{4}{\sqrt{3}},$$

$$4 + \alpha^2 = \frac{16}{3},$$

$$\alpha^2 = \frac{4}{3},$$

$$\alpha = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

В итоге получаем

$$\vec{d} = \vec{a} + \frac{2}{\sqrt{3}}\vec{b} \text{ и } |\vec{d}| = \frac{4}{\sqrt{3}}.$$

Векторы $\vec{c}$ и $\vec{d}$ противоположно направлены. Следовательно,

$$\vec{c} = \beta\vec{d}, \text{ где } \beta = -\frac{|\vec{c}|}{|\vec{d}|} = -\frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

Тогда

$$\vec{c} = -\frac{3\sqrt{3}}{4}\vec{d} = -\frac{3\sqrt{3}}{4}\vec{a} - \frac{3}{2}\vec{b}.$$

Откуда имеем

$$\frac{3\sqrt{3}}{4}\vec{a} + \frac{3}{2}\vec{b} + \vec{c} = \vec{0}.$$

Это означает, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ линейно зависимы.

2. Составить задачи, обратные задаче 1, введя в исходное условие факт линейной зависимости векторов и исключив из него одну из известных величин. Решить составленные задачи.

Решение:

Чтобы получить обратную задачу, из исходного условия необходимо исключить один из известных векторов ($\vec{a}$, $\vec{b}$ или $\vec{c}$) и добавить полученное в задаче 1 выражение, связывающее все три вектора. Например, исключим из условия вектор $\vec{c}$. Тогда обратная задача будет иметь вид:

Пусть даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, причем $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 1$, $(\widehat{\vec{a}, Ox}) = \pi/6$, $(\widehat{\vec{b}, Ox}) = -\pi/3$. Найти вектор $\vec{c}$, если он связан с векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ следующим соотношением:

$$\frac{3\sqrt{3}}{4}\vec{a} + \frac{3}{2}\vec{b} + \vec{c} = \vec{0}.$$

Решим данную задачу. Для этого из последнего равенства выразим вектор $\vec{c}$:

$$\vec{c} = -\frac{3\sqrt{3}}{4}\vec{a} - \frac{3}{2}\vec{b} = -\frac{3\sqrt{3}}{4}(\vec{a} + \frac{2}{\sqrt{3}}\vec{b}) = -\frac{3\sqrt{3}}{4}\vec{d},$$

где

$$\vec{d} = \vec{a} + \frac{2}{\sqrt{3}}\vec{b}.$$

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны:

$$(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = (\widehat{\vec{a},Ox}) - (\widehat{\vec{b},Ox}) = \pi/6 + \pi/3 = \pi/2.$$

Это означает, что треугольник со сторонами $\vec{a}$, $2/\sqrt{3}\cdot\vec{b}$ и $\vec{d}$ прямоугольный. Тогда по теореме Пифагора

$$|\vec{d}| = \sqrt{|\vec{a}|^2 + |2/\sqrt{3}\cdot\vec{b}|^2} = \sqrt{4 + 4/3\cdot 1} = 4/\sqrt{3}$$

и по определению косинуса

$$\cos(\widehat{\vec{a},\vec{d}}) = \frac{|\vec{a}|}{|\vec{d}|} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

или

$$(\widehat{\vec{a},\vec{d}}) = \pi/6.$$

Поскольку $(\widehat{\vec{a},Ox}) = (\widehat{\vec{a},\vec{d}}) = \pi/6$, то $(\widehat{\vec{d},Ox}) = 0$.

Ранее было получено:

$$\vec{c} = -\frac{3\sqrt{3}}{4}\vec{d}.$$

Откуда следует, что

$$(\widehat{\vec{c},Ox}) = \pi$$

и

$$|\vec{c}| = \frac{3\sqrt{3}}{4}|\vec{d}| = 3.$$

Полученные значения совпадают с данными вектора $\vec{c}$ из условия задачи 1.

3. Для матриц составить задачу, аналогичную задаче 1. Решить ее.

Решение:

Составим задачу. Для этого в условии задачи 1 заменим векторы на матрицы. В результате получаем следующую формулировку:

Установить линейную зависимость матриц

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Решим данную задачу. Из определения линейной зависимости следует, что эти матрицы будут линейно зависимы, если равенство

$$\alpha_1 A + \alpha_2 B + \alpha_3 C = O$$

выполнится, когда хотя бы одно из чисел α_1, α_2, α_3 отлично от нуля. Подставим в это равенство наши матрицы:

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 - \alpha_3 & \alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3 \\ 2\alpha_1 - 3\alpha_2 + \alpha_3 & \alpha_1 + 2\alpha_2 - 3\alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Две матрицы равны, когда равны их соответствующие элементы. Поэтому последнее матричное равенство можно трансформировать в систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_3 = 0, \\ \alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3 = 0, \\ 2\alpha_1 - 3\alpha_2 + \alpha_3 = 0, \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 - 3\alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Данная система имеет бесконечное множество решений, которые можно выразить одним общим решением $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = c$, где c - произвольная постоянная. Выберем конкретное решение, положив $c = 1$. Тогда $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = 1$, и, соответственно, для матриц A, B, C можно выписать верное равенство

$$A + B + C = O.$$

Это означает, что наши матрицы линейно зависимы.

© Семакин А.Н., 2021

4. Составить задачи, обратные задаче 3. Решить их.

Решение:

Включим в условие задачи матричное равенство, получившееся в результате решения задачи 3, а, скажем, матрицу C сделаем неизвестной. Тогда формулировка обратной задачи будет иметь вид:

Найти матрицу C, если матрицы A, B, C линейно зависимы, причем

$$A + B + C = O$$

и

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решаем данную задачу. Из равенства

$$A + B + C = O$$

выражаем матрицу C и вычисляем ее элементы по известным элементам матриц A и B:

$$C = O - A - B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Как видно, полученный ответ совпадает с матрицей C из условия задачи 3.

5. Обобщить задачу 4 на большее количество матриц и связывающих их отношений линейной зависимости.

Решение:

В предыдущей задаче мы рассматривали три матрицы, связанные одним матричным равенством. Теперь рассмотрим четыре матрицы, связанные двумя матричными равенствами. В этом случае обобщенную задачу можно сформулировать так:

Найти матрицы A и B, если известна линейная зависимость матриц A, B, C

$$A + B + 2C = O$$

и линейная зависимость матриц A, B, D

$$2A - B + D = O,$$

где

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Чтобы *решить* данную задачу, нам нужно составить систему двух линейных матричных уравнений

$$\begin{cases} A + B + 2C = O, \\ 2A - B + D = O, \end{cases}$$

из которой находим неизвестные матрицы A и B.