Математический анализ

(Когнитивные технологии)

Занятие 8. Бесконечно малые величины

К.Г. Койфман

12 января 2026 г.

1 О выделении главной части

Пусть α — бесконечно малая функция при $x \to a$. Будем считать ее основной, т.е., другие бесконечно малые (при $x \to a$) с ней сравниваются.

Пример 1 (Примеры основных бесконечно малых)**.** *Берем простейший случай:*

- *Если* $a = 0$, *то* $\alpha(x) := x$.
- *Если* $a = \infty$, *то* $\alpha(x) := \frac{1}{x}$.
- *Если* a *— конечное отличное от нуля число, то* $\alpha(x) := x - a$.

Пусть β — другая бесконечно малая функция при $x \to a$. Бесконечно малые α и β сравниваются согласно следующим условиям:

- Они **не сравнимы** между собой, если не существует предела $\lim\limits_{x\to a} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)}$.
- Они являются величинами **одного порядка**, если предел $\lim\limits_{x\to a} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)}$ конечен и отличен от нуля.
- Бесконечно малая β есть величина **высшего порядка**, чем α, если $\lim\limits_{x\to a} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 0$. Пишут: $\beta = o(\alpha)$.

Определение 1. *Бесконечно малые* α *и* β ***эквивалентны*** *при* $x \to a$, *если*

$$\lim_{x\to a} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 1.$$

Пишут: $\alpha \sim \beta$ *при* $x \to a$.

Основное свойство: *бесконечно малые α и β эквивалентны при $x \to a$ тогда и только тогда, когда*

$$\gamma = o(\alpha) \text{ при } x \to a,$$

где $\gamma = \beta - \alpha$.

Таким образом, если $\alpha \sim \beta$, то мы можем записать:

$$\beta = \alpha + o(\alpha).$$

Возникает вопрос: *в чем смысл основного свойства эквивалентных величин?*

Введем вспомогательные определения. Пусть α — некоторая физическая величина (значения которой доступны нам через показания прибора). Поскольку прибор делает измерения с определенной ошибкой, мы получаем «искаженную» величину β.

Определение 2.

- ***Абсолютной погрешностью*** *называется разность*

$$\Delta(\alpha) := |\beta - \alpha|.$$

- ***Относительной погрешностью*** *называется отношение*

$$\delta(\alpha) := \frac{\Delta(\alpha)}{|\alpha|} = \frac{|\beta - \alpha|}{|\alpha|}.$$

Допустим теперь, что $\alpha \sim \beta$. Мы тогда имеем, что

$$\beta = \alpha + o(\alpha).$$

Или, что тоже самое,

$$\frac{\beta - \alpha}{\alpha} \to 0.$$

Отбрасывая $o(\alpha)$, мы получаем приближенное равенство

$$\beta \approx \alpha.$$

Свойство: *при замене β на α, абсолютная и относительная погрешности стремятся к нулю.*

Если α — основная бесконечно малая при $x \to a$, то простейшие бесконечно малые имеют вид: $c\,\alpha^k$, где $c \neq 0$ — постоянный коэффициент и $k > 0$.

Определение 3. *Если $\beta \sim c\,\alpha^k$ при $x \to a$, то величина $c\,\alpha^k$ называется* ***главной частью*** *бесконечно малой β.*

Таким образом,

$$\beta = c\,\alpha^k + o(\alpha^k),$$

при $x \to a$. Мы имеем приближенное равенство:

$$\beta \approx c\,\alpha^k.$$

Допустим, что

$$\beta = c\,\alpha^k + \gamma,$$

где $\gamma = o(\alpha^k)$. Возможна ситуация, когда из γ выделяется главная часть:

$$\gamma = c'\,\alpha^{k'} + o(\alpha^{k'}),$$

где $k' > k$. Тогда

$$\beta = c\,\alpha^k + c'\,\alpha^{k'} + o(\alpha^{k'}),$$

что дает более точное приближенное равенство

$$\beta \approx c\,\alpha^k + c'\,\alpha^{k'}.$$

И так далее. В предположении дифференцируемости мы имеем общий способ получения подобных соотношений (формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано). Он будет рассмотрен в следующем семестре.

Пример 2. *Пусть $\alpha(x) = x$, где $x \to 0$, и рассмотрим функцию $\beta(x) = \sqrt[m]{1+x} - 1$, где $m \in \mathbb{N}$. Если сделать замену $y = \sqrt[m]{1+x} - 1$, то при $x \to 0$ и $y \to 0$. Поэтому*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[m]{1+x} - 1}{x} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{(1+y)^m - 1} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{m\,y + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2} y^2 + \ldots + y^n} = \frac{1}{m},$$

где использована формула бинома Ньютона. Следовательно,

$$\sqrt[m]{1+x} - 1 = \frac{1}{m}x + \gamma,$$

где $\gamma = o(x)$.

Теперь получим главную часть для

$$\gamma = \sqrt[m]{1+x} - 1 - \frac{x}{m}.$$

С этой целью вычислим предел

$$\lim_{x\to 0} \frac{\gamma}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[m]{1+x} - 1 - \frac{x}{m}}{x^2}.$$

Для этого, как и ранее, сделаем замену $y = \sqrt[m]{1+x} - 1$. Тогда

$$\lim_{x\to 0} \frac{\gamma}{x^2} = \lim_{y\to 0} \frac{y - \frac{1}{m}[(1+y)^m - 1]}{[(1+y)^m - 1]^2} = \lim_{y\to 0} \frac{-\frac{m-1}{2} y^2 + \ldots}{m^2 y^2 + \ldots} = \lim_{y\to 0} \frac{-\frac{m-1}{2} + \ldots}{m^2 + \ldots} = -\frac{m-1}{2m^2}.$$

Здесь также использована формула бинома Ньютона.

Таким образом,

$$\gamma = -\frac{m-1}{2m^2}x^2 + o(x^2).$$

Следовательно, мы приходим к разложению

$$\sqrt[m]{1+x} - 1 = \frac{1}{m}x - \frac{m-1}{2m^2}x^2 + o(x^2).$$

В частности,

$$\sqrt{1+x} - 1 = \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2).$$

Вопрос: *допустим, для бесконечно малых β и γ известны главные части $c\,\alpha^k$ и $c'\,\alpha^{k'}$. Что можно сказать о главной части суммы $\beta+\gamma$?*

Ответ. Если $k \neq k'$, то главной частью будет тот из членов $c\,\alpha^k$ и $c'\,\alpha^{k'}$, в котором показатель меньше. Если же $k = k'$, то возможны две ситуации:

- при $c + c' \neq 0$ главная часть $\beta+\gamma$ есть $(c+c')\alpha^k$;
- при $c + c' = 0$ сумма $\beta+\gamma$ есть бесконечно малая высшего порядка, чем каждое из слагаемых.

Пример 3. *Если $\beta(x) = \sqrt{1+x} - 1$ и $\gamma(x) = \sqrt{1-x} - 1$ — бесконечно малые первого порядка, то*

$$\beta(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2),$$
$$\gamma(x) = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2).$$

Тогда

$$\beta + \gamma = -\frac{1}{4}x^2 + o(x^2).$$

Значит, сумма $\beta+\gamma$ есть бесконечно малая второго порядка с главной частью $-\frac{1}{4}x^2$.

2 Новые термины

- Не сравнимые бесконечно малые.
- Бесконечно малые одного порядка.
- Бесконечно малая высшего порядка.
- Эквивалентные бесконечно малые.
- Абсолютная погрешность.
- Относительная погрешность.
- Главная часть бесконечно малой.