

Математический анализ

(Когнитивные технологии)

Занятие 7. Теорема Штольца

К.Г. Койфман

28 ноября 2025 г.

1 Медианта дробей

Пусть $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ — две дроби, причем $b > 0$ и $d > 0$.

Определение 1. *Дробь*

$$\frac{a+c}{b+d},$$

числитель которой есть сумма числителей исходных дробей, а знаменатель — сумма знаменателей исходных дробей, называется **медиантой**.

Предложение 1 (Основное свойство медианты). *Если*

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d},$$

то

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}.$$

Доказательство. Докажем левую часть неравенства, то есть, что

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d}.$$

Это равносильно тому, что надо доказать неравенство

$$\frac{a+c}{b+d} - \frac{a}{b} > 0.$$

Действительно, справедлива следующая цепочка преобразований:

$$\begin{aligned} \frac{a+c}{b+d} - \frac{a}{b} &= \frac{(a+c)b - a(b+d)}{b(b+d)} = \frac{ab + bc - ab - ad}{b(b+d)} = \\ &= \frac{bc - ad}{b(b+d)} = \frac{d}{b+d} \frac{bc - ad}{bd} = \frac{d}{b+d} \left(\frac{c}{d} - \frac{a}{b} \right) > 0, \end{aligned}$$

поскольку $b > 0$, $d > 0$ и $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$. Левая часть исходного неравенства доказана.

Теперь докажем правую часть неравенства, т.е., что

$$\frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}.$$

Иначе говоря, требуется доказать соотношение

$$\frac{c}{d} - \frac{a+c}{b+d} > 0.$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \frac{c}{d} - \frac{a+c}{b+d} &= \frac{(b+d)c - (a+c)d}{d(b+d)} = \frac{bc + cd - ad - cd}{d(b+d)} = \\ &= \frac{bc - ad}{d(b+d)} = \frac{b}{b+d} \frac{bc - ad}{bd} = \frac{b}{b+d} \left(\frac{c}{d} - \frac{a}{b} \right) > 0, \end{aligned}$$

ибо $b > 0$, $d > 0$ и $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$. Правая часть исходного неравенства доказана, а с ней и все утверждение. $\square$

2 Теорема Штольца

Теорема 1 (О. Stolz). Пусть последовательность $\{y_n\}$ стремится к $+\infty$ (т.е., $y_n \rightarrow +\infty$), причем — хотя бы начиная с некоторого места — с возрастанием n и y_n возрастает (т.е., $y_n < y_{n+1}$). Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}},$$

если только существует предел справа (конечный или даже бесконечный).

Доказательство. Ограничимся случаем, когда предел равен конечному числу l :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = l.$$

Тогда по произвольному (сколь угодно малому) $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N , что для всех $n > N$ будет справедливо неравенство

$$\left| \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} - l \right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

или,

$$l - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} < l + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Зафиксируем $n > N$. Тогда будем иметь:

$$l - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{x_{N+1} - x_N}{y_{N+1} - y_N}, \frac{x_{N+2} - x_{N+1}}{y_{N+2} - y_{N+1}}, \dots, \frac{x_{n-1} - x_{n-2}}{y_{n-1} - y_{n-2}}, \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} < l + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Медианта дробей равна:

$$\frac{(x_{N+1} - x_N) + (x_{N+2} - x_{N+1}) + \dots + (x_n - x_{n-1})}{(y_{N+1} - y_N) + (y_{N+2} - y_{N+1}) + \dots + (y_n - y_{n-1})} = \frac{x_n - x_N}{y_n - y_N}.$$

Поскольку знаменатели этих дробей положительны ($\{y_n\}$ возрастает), мы имеем, в силу свойства медианты, что

$$l - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{x_n - x_N}{y_n - y_N} < l + \frac{\varepsilon}{2},$$

или,

$$\left| \frac{x_n - x_N}{y_n - y_N} - l \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Получим вспомогательное тождество:

$$\begin{aligned} \frac{x_n}{y_n} - l &= \frac{x_n - ly_n}{y_n} = \frac{x_n - \textcolor{red}{x}_N + \textcolor{red}{x}_N - \textcolor{blue}{l}y_n + \textcolor{blue}{l}y_N - ly_n}{y_n} = \\ &= \frac{x_N - ly_N}{y_n} + \frac{x_n - x_N - l(y_n - y_N)}{y_n} = \\ &= \frac{x_N - ly_N}{y_n} + \frac{\frac{x_n - x_N}{y_n - y_N}(y_n - y_N) - l(y_n - y_N)}{y_n} = \\ &= \frac{x_N - ly_N}{y_n} + \left(\frac{y_n - y_N}{y_n} \right) \left(\frac{x_n - x_N}{y_n - y_N} - l \right) = \\ &= \frac{x_N - ly_N}{y_n} + \left(1 - \frac{y_N}{y_n} \right) \left(\frac{x_n - x_N}{y_n - y_N} - l \right). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\frac{x_n}{y_n} - l = \frac{x_N - ly_N}{y_n} + \left(1 - \frac{y_N}{y_n} \right) \left(\frac{x_n - x_N}{y_n - y_N} - l \right),$$

и

$$\left| \frac{x_n}{y_n} - l \right| \leq \left| \frac{x_N - ly_N}{y_n} \right| + \left| 1 - \frac{\textcolor{red}{y}_N}{\textcolor{red}{y}_n} \right| \left| \frac{x_n - x_N}{y_n - y_N} - l \right|.$$

Поскольку $y_N < y_n$ и $y_n \rightarrow +\infty$ то можно считать, что $0 < \frac{y_N}{y_n} < 1$. Следовательно, первая скобка во втором слагаемом справа может быть сделана < 1 .

Приходим к окончательному неравенству:

$$\left| \frac{x_n}{y_n} - l \right| < \left| \frac{x_N - ly_N}{y_n} \right| + \left| \frac{x_n - x_N}{y_n - y_N} - l \right|.$$

Поскольку $y_n \rightarrow +\infty$, первое слагаемое может быть взято $< \frac{\varepsilon}{2}$ при $n > N_1$. Наконец, как мы видели выше, второе слагаемое $< \frac{\varepsilon}{2}$ при $n > N$. Значит, если $n > \max\{N_1, N\}$, то

$$\left| \frac{x_n}{y_n} - l \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

В силу произвольности ε , этим доказано, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = l.$$

Доказательство теоремы завершено. □

3 Примеры применения

Пример 1. Докажем, что при $a > 1$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n} = +\infty.$$

Действительно, согласно теореме Штольца,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n - a^{n-1}}{n - (n-1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n - a^{n-1}}{1} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(a^n - \frac{a^n}{a} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} a^n \left(1 - \frac{1}{a} \right) = +\infty. \end{aligned}$$

Пример 2. Покажем, вслед за Коши, что если последовательность $\{a_n\}$ имеет предел (конечный или бесконечный), то тот же предел имеет последовательность $\{b_n\}$, общий член которой равен среднему арифметическому первых n значений $\{a_n\}$:

$$b_n = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}.$$

Действительно, полагая в теореме Штольца $x_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ и $y_n = n$, получаем

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} b_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n) - (a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1})}{n - (n-1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n. \end{aligned}$$

В частности, если $a_n = \sqrt[n]{n}$, то, как известно, $a_n \rightarrow 1$. Тогда и

$$\frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \dots + \sqrt[n]{n}}{n} \rightarrow 1.$$

4 Новые термины

- Медианта дробей.
- Теорема Штольца.