Математический анализ

(Когнитивные технологии)

Занятие 6. Метод математической индукции

К.Г. Койфман

14 ноября 2025 г.

1 Формулировка и примеры

При доказательстве утверждений, зависящих от натурального числа, применяют следующий метод, называемый методом математической индукции. Пусть $P(n)$ — утверждение, зависящее от $n \in \mathbb{N}$, про которое известно, что

1. **База индукции.** Высказывание $P(1)$ — истинно.

2. **Индукционный переход.** Если для некоторого $k \in \mathbb{N}$ высказывание $P(k)$ истинно, то высказывание $P(k+1)$ также истинно.

Тогда $P(n)$ истинно для всех $n \in \mathbb{N}$.

Для обоснования метода будем рассуждать «от противного». Пусть при сделанных выше предположениях найдутся такие значения n, что $P(n)$ — ложное утверждение. Пусть, далее, n_1 — наименьший среди таких n. (Поскольку любое непустое подмножество $\mathbb{N}$ имеет наименьший элемент, то n_1 всегда существует.) Заметим, что по предположению 1, $n_1 \neq 1$. Тогда $n_1 > 1$, а значит $n_1 - 1 \in \mathbb{N}$. Так как n_1 — наименьшее среди таких n, что $P(n)$ ложно, то $P(n_1 - 1)$ истинно. Тогда по предположению 2 высказывание $P(n_1)$ также истинно. Противоречие.

Идея метода состоит в следующем. Если мы покажем, что предположения 1 и 2 верны, то: раз $P(1)$ верно по первому предположению, то по второму предположению верно и $P(2)$, а раз верно $P(2)$, то опять же по второму предположению верно $P(3)$... Этот процесс подобен тому, как если бы вы взяли косточки домино, расположили их вертикально в ряд друг за другом, то если толкнуть первую косточку, та, падая, опрокинула бы следующую за ней косточку и т.д.

Пример 1. Докажем, что сумма $S(n)$ первых n натуральных чисел равна $\frac{n(n+1)}{2}$, т.е.,

$$P(n):\ 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Действительно, при $n = 1$ имеем $S(1) = 1$ и $\frac{1(1+1)}{2} = 1$. Итак, $P(1)$ истинно. Предположим теперь, что для некоторого значения k справедливо равенство $S(k) =$

$\frac{k(k+1)}{2}$ и докажем, что тогда и $S(k+1) = \frac{(k+1)(k+1+1)}{2}$. С этой целью запишем:

$$S(k+1) = 1 + 2 + \ldots + k + (k+1) = S(k) + (k+1).$$

Используя предположение для k, получаем:

$$S(k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2} = \frac{(k+1)(k+1+1)}{2}.$$

В соответствии с методом математической индукции, утверждение $P(n)$ доказано для любого n.

Пример 2. Докажем, что для $q \neq 1$ справедливо свойство

$$P(n): \ 1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

— сумма геометрической прогрессии.

Действительно, если $n = 1$, то

$$1 + q = \frac{(1+q)(1-q)}{(1-q)} = \frac{1-q^2}{1-q} = \frac{1-q^{1+1}}{1-q}.$$

База индукции установлена. Теперь предположим, что для $n = k$ выполнено

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^k = \frac{1 - q^{k+1}}{1 - q}.$$

Тогда для $n = k + 1$,

$$\begin{aligned} 1 + q + q^2 + \ldots + q^k + q^{k+1} &= \frac{1 - q^{k+1}}{1 - q} + q^{k+1} = \\ &= \frac{1 - q^{k+1} + (1-q)q^{k+1}}{1-q} = \frac{1 - q^{k+1} + q^{k+1} - q^{(k+1)+1}}{1-q} = \\ &= \frac{1 - q^{(k+1)+1}}{1-q}. \end{aligned}$$

Установлена справедливость индукционного перехода. Значит, утверждение $P(n)$ доказано для любого n.

Замечание 1. *Из того, что утверждение $P(k)$ истинно для достаточно длинного отрезка $1 \leqslant k \leqslant l$ вовсе не следует, что $P(n)$ истинно для всех $n \in \mathbb{N}$. Например, исследование при $n = 1,\ 2, \ldots 40$ чисел вида $n^2 - n + 41$ способно склонить к мысли о простоте этих чисел (число называют простым, если оно делится только на единицу и самого себя). Но $41^2 - 41 + 41 = 41^2$ — составное число.*

Утверждение $P(n)$ может быть истинным для $n \geqslant n_0$. Тогда метод математической индукции приобретает следующую формулировку. Пусть $P(n)$ — утверждение, зависящее от $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant n_0 \in \mathbb{N}$, про которое известно, что

1. **База индукции.** Высказывание $P(n_0)$ — истинно.

2. **Индукционный переход.** Если для некоторого $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant n_0$, высказывание $P(k)$ истинно, то высказывание $P(k+1)$ также истинно.

Тогда $P(n)$ истинно для всех $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant n_0$.

Можно рассматривать $P(n)$, начиная не с 1, а с 0. Тогда формулировка такая. Пусть $P(n)$ — утверждение, зависящее от $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, про которое известно, что

1. **База индукции.** Высказывание $P(0)$ — истинно.

2. **Индукционный переход.** Если для некоторого $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ высказывание $P(k)$ истинно, то высказывание $P(k+1)$ также истинно.

Тогда $P(n)$ истинно для всех $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

2 Бином Ньютона

В комбинаторике и теории вероятностей используется формула

$$C_n^k = \binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

— **число сочетаний из n элементов по k элементов**. Оно определяет количество способов, с помощью которых можно сформировать неупорядоченные k-элементные множества из данных n элементов. Символ $n!$ обозначает **факториал** числа n:

$$n! := 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$$

— произведение всех последовательных натуральных чисел от 1 до n.

Соглашение: $0! = 1$.

Некоторые свойства числа сочетаний (понадобятся далее):

1. $C_n^0 = 1$. Действительно,

$$C_n^0 = \frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{n!} = 1.$$

2. $C_n^n = 1$. Действительно,

$$C_n^n = \frac{n!}{n!(n-n)!} = \frac{n!}{n!0!} = 1.$$

3. Справедлива формула $C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k$. В самом деле,

$$C_n^k + C_n^{k-1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-(k-1))!} =$$
$$= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k+1}\right) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\frac{n+1}{k(n+1-k)} =$$
$$= \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = C_{n+1}^k.$$

Пусть $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$ — набор чисел, занумерованный натуральными числами. Тогда сумму

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

коротко записывают как

$$\sum_{i=1}^{n} a_i,$$

т.е.,

$$\sum_{i=1}^{n} a_i := a_1 + a_2 + \ldots + a_n.$$

При этом полагают, что

$$\sum_{i=1}^{1} a_i := a_1.$$

Пример 3. Докажем **бином Ньютона**:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \ldots + C_n^k a^{n-k} b^k + \ldots + C_n^n b^n,$$

для всех $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Действительно, при $n = 0$ имеем

$$(a+b)^0 = 1 = C_0^0 a^0 b^0,$$

и база индукции установлена. Допустим теперь, что для некоторого n формула верна и докажем тогда ее истинность при $n+1$, т.е., установим соотношение

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k a^{n+1-k} b^k.$$

Сначала используем предположение об истинности формулы для n:

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n = (a+b) \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k+1} b^k + \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^{k+1}.$$

Теперь выделим из первой суммы слагаемое при $k = 0$, а из второй — слагаемое при $k = n$:

$$(a+b)^{n+1} = a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} C_n^k a^{n-k+1} b^k + \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k a^{n-k} b^{k+1} + b^{n+1}.$$

Выполним следующее преобразование:

$$\sum_{k=0}^{n-1} C_n^k a^{n-k} b^{k+1} = \sum_{k=1}^{n} C_n^{k-1} a^{n-k+1} b^k.$$

Тогда

$$(a+b)^{n+1} = a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} (C_n^k + C_n^{k-1}) a^{n-k+1} b^k + b^{n+1}.$$

Вспоминая свойства C_n^k, получаем

$$(a+b)^{n+1} = C_{n+1}^0 a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} C_{n+1}^k a^{n+1-k} b^k + C_{n+1}^{n+1} b^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k a^{n+1-k} b^k,$$

и бином Ньютона доказан по методу математической индукции.

3 Новые термины

- Метод математической индукции.
- База индукции.
- Индукционный переход.
- Число сочетаний из n элементов по k элементов.
- Факториал.
- Бином Ньютона.