

Математический анализ

(Когнитивные технологии)

Занятие 5. Необходимые сведения из тригонометрии

К.Г. Койфман

30 октября 2025 г.

1 Предполагаемые знания

Предполагается, что читатель знаком со следующими терминами и понятиями:

- Угол.
- Прямой угол.
- Треугольник.
- Прямоугольный треугольник.
- Декартова система координат на плоскости.
- Абсцисса точки.
- Ордината точки.

2 Определение тригонометрических функций

Пока рассматриваем **острые углы!**

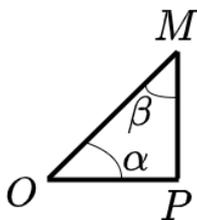


Рис. 1: К определению тригонометрических функций

Пусть $\triangle OPM$ — прямоугольный треугольник с гипотенузой OM и острыми углами $\angle\alpha = \angle POM$, $\angle\beta = \angle PMO$ (рис. 1).

В соответствии с теоремой о сумме углов треугольника на плоскости имеем: $\alpha + \beta = 90^\circ$.

Определение 1. Определим следующие величины:

- $\sin \alpha = \frac{MP}{OM}$ — **синус** угла α ,
- $\cos \alpha = \frac{OP}{OM}$ — **косинус** угла α ,
- $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ — **тангенс** угла α ,
- $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ — **котангенс** угла α .

Поскольку $\sin \beta = \frac{OP}{OM}$ и $\cos \beta = \frac{MP}{OM}$, то имеем:

$$\sin \alpha = \cos \beta, \quad \cos \alpha = \sin \beta.$$

Отсюда следуют **формулы приведения**:

$$\begin{aligned} \sin(90^\circ - \alpha) &= \sin \beta = \cos \alpha, \\ \cos(90^\circ - \alpha) &= \cos \beta = \sin \alpha. \end{aligned}$$

До сих пор мы предполагали, что **угол α острый**. Поставим целью распространить значения тригонометрических функций на все углы. Для этого заметим, что мы определяли значения чисто геометрически. Теперь посмотрим на них с аналитической точки зрения.

Пусть точка O является началом прямоугольной системы координат и центром окружности радиуса 1. Положительное направление обхода — **против часовой стрелки**. Построим прямоугольный $\triangle OPM$ (рис. 2).

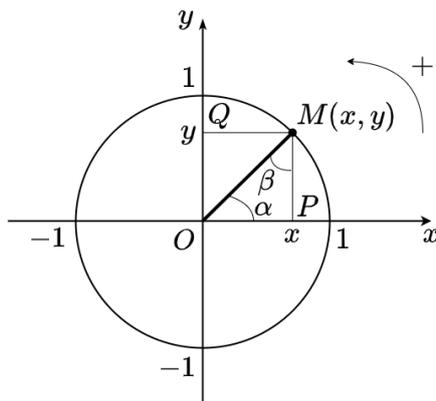


Рис. 2: Тригонометрическая окружность

Угол α — это угол между радиус-вектором \overrightarrow{OM} и осью Ox . Причем, поскольку окружность имеет радиус 1, то $OM = 1$. Далее, $OP = x$, $MP = y$. Поэтому,

$$\sin \alpha = \frac{MP}{OM} = \frac{y}{1} = y,$$

$$\cos \alpha = \frac{OP}{OM} = \frac{x}{1} = x.$$

Таким образом, **синус угла α равен ординате точки M** , а **косинус угла α равен абсциссе точки M** .

Введем понятия синуса и косинуса для любого угла α (**не обязательно острого**).

Определение 2. **Синусом** угла α между положительным направлением оси Ox и радиус-вектором \overrightarrow{OM} (отсчитываемым против хода часовой стрелки) называется **ордината** точки M , а **косинусом** этого же угла α — **абсцисса** точки M .

Поскольку $x^2 + y^2 = 1$, то

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

— **основное тригонометрическое тождество**.

Если углу α соответствует точка $M(x, y)$, то углу $-\alpha$ соответствует точка $M'(x, -y)$. Поэтому

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha,$$

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha.$$

Значит, **синус — нечетная функция**, а **косинус — четная**.

3 Тригонометрические соотношения

РК и экзамены — это стресс. Поэтому память может подводить. Следовательно, чем меньше формул требуется держать в уме, — тем легче. Предположим, что наизусть выучена формула

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta.$$

Выясним, какие формулы можно из нее вывести (свойства четности и формулы приведения для 90° при этом подразумеваются).

1. Формула для $\sin(\alpha - \beta)$:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha - \beta) &= \sin(\alpha + (-\beta)) = \sin \alpha \cos(-\beta) + \cos \alpha \sin(-\beta) = \\ &= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta. \end{aligned}$$

2. Формула для $\sin(2\alpha)$:

$$\sin(2\alpha) = \sin(\alpha + \alpha) = \sin \alpha \cos \alpha + \cos \alpha \sin \alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha.$$

3. Формула для $\cos(\alpha + \beta)$:

$$\begin{aligned}\cos(\alpha + \beta) &= \sin(90^\circ - (\alpha + \beta)) = \sin((90^\circ - \alpha) - \beta) = \\ &= \sin(90^\circ - \alpha) \cos \beta - \cos(90^\circ - \alpha) \sin \beta = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta.\end{aligned}$$

4. Формула для $\cos(\alpha - \beta)$:

$$\begin{aligned}\cos(\alpha - \beta) &= \cos(\alpha + (-\beta)) = \cos \alpha \cos(-\beta) - \sin \alpha \sin(-\beta) = \\ &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta.\end{aligned}$$

5. Формула для $\cos(2\alpha)$:

$$\cos(2\alpha) = \cos(\alpha + \alpha) = \cos \alpha \cos \alpha - \sin \alpha \sin \alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha.$$

6. Формула для $\cos x - \cos y$. Здесь рассуждение более сложное. Выпишем формулы:

$$\begin{aligned}\cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta, \\ \cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta.\end{aligned}$$

Здесь α и β произвольны и пока не связаны с x и y . Теперь вычтем из первого равенства второе:

$$\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2 \sin \alpha \sin \beta.$$

Далее введем обозначения:

$$\alpha + \beta = x, \quad \alpha - \beta = y.$$

Складывая и вычитая эти равенства, получим:

$$\begin{cases} 2\alpha = x + y \\ 2\beta = x - y \end{cases} \Rightarrow \alpha = \frac{x + y}{2}, \quad \beta = \frac{x - y}{2}.$$

Тогда:

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x + y}{2} \sin \frac{x - y}{2}.$$

Аналогичным образом получают формулы:

$$\begin{aligned}\cos x + \cos y &= 2 \cos \frac{x + y}{2} \cos \frac{x - y}{2}, \\ \sin x - \sin y &= 2 \sin \frac{x - y}{2} \cos \frac{x + y}{2}, \\ \sin x + \sin y &= 2 \sin \frac{x + y}{2} \cos \frac{x - y}{2}.\end{aligned}$$

4 Новые термины

- Синус.
- Косинус.
- Тангенс.
- Котангенс.