Математический анализ
(Когнитивные технологии)
Занятие 4. Необходимые сведения из элементарной алгебры

К.Г. Койфман

27 октября 2025 г.

1 Предполагаемые знания

Предполагается, что читатель знаком со следующими терминами и понятиями:

- Множество натуральных чисел.
- Множество целых чисел.
- Множество рациональных чисел.
- Множество действительных чисел.
- Принцип Дедекинда.
- Точная верхняя граница.

2 Степени

Поставим целью на основе знаний, полученных в ходе изучения математического анализа, определить степень с произвольным вещественным (рациональным или иррациональным) показателем. Для достижения этой цели мы начнем с самых основ:

Определение 1. *Произведение одинаковых сомножителей называется* ***степенью****:*

$$a^n := \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ раз}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Здесь a — основание степени, n — показатель степени.

Пример 1. *Степени и их наименования:*

- $a^2 = a \cdot a$ — ***квадрат*** *числа a.*
- $a^3 = a \cdot a \cdot a$ — ***куб*** *числа a.*

Степени обладают следующими свойствами:

- Четная степень отрицательного числа есть число положительное, а нечетная степень — число отрицательное:
$$(-a)^{2n} > 0, \quad (-a)^{2n+1} < 0, \quad \text{где} \quad a > 0.$$
- При умножении степеней одного и того же числа показатели степеней складываются:
$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$
- Чтобы возвести степень какого-либо числа в другую степень, надо перемножить показатели степеней:
$$(a^n)^m = a^{m \cdot n}.$$

Они вытекают напрямую из определения.

Вместе с тем, отношение степеней не всегда можно выразить в виде степени, если оперировать лишь натуральными показателями. Поэтому — в этом и состоит переход от арифметики к алгебре, — мы распространим степени на целые показатели, вводя следующие определения:
$$a^0 := 1,$$
$$a^{-n} := \frac{1}{a^n}, \quad n > 0.$$

Теперь символ a^n определен для всех $n \in \mathbb{Z}$. Единая формула:
$$a^n := \begin{cases} \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ раз}}, & \text{при } n > 0, \\ 1, & \text{при } n = 0, \\ \underbrace{\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{a}}_{-n \text{ раз}}, & \text{при } n < 0. \end{cases}$$

Следующая наша цель — распространить понятие степени на дробные показатели. Однако на этом этапе нам понадобится понятие корня. Различают два вида корней — алгебраический и арифметический.

Определение 2. ***Алгебраическим корнем*** *n-й степени из числа a называется такое число b, n-я степень которого равна a:*
$$(b \text{ — корень } n\text{-й степени из } a) \Leftrightarrow b^n = a.$$

Пример 2. *Примеры алгебраических корней:*

- *Число 4 имеет два алгебраических квадратных корня: -2 и 2, т.к. $(-2)^2 = 2^2 = 4$.*

- *Число* 125 *имеет один кубический корень* 5, *т.к.* $5^3 = 125$.

Определение 3. ***Арифметическим корнем*** *n-й степени из* ***положительного*** *числа a называется* ***положительный*** *алгебраический корень n-й степени из a. Обозначение:* $\sqrt[n]{a}$.

Замечание 1. *Из всех алгебраических корней n-й степени от данного числа лишь один положительный. Поэтому арифметический корень определен единственным образом.*

Пример 3. *Примеры арифметических корней:*

- $\sqrt{4} := \sqrt[2]{4} = 2$.
- $\sqrt[3]{125} = 5$.

Все готово для распространения степени на дробные показатели. Пусть m, $n > 0$ — целые, $a > 0$ — произвольное. Выражение $a^{\frac{m}{n}}$ означает корень, показатель которого равен знаменателю, а показатель степени подкоренного числа равен m:

$$a^{\frac{m}{n}} := \sqrt[n]{a^m}.$$

Основное свойство: если $p > 0$ — целое, то

$$a^{\frac{mp}{np}} = a^{\frac{m}{n}}.$$

Условимся употреблять отрицательные дробные показатели в том же смысле, в каком мы употребляли отрицательные целые показатели. Например,

$$a^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{a^{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{a^3}}.$$

Свойства степеней с дробными показателями:

$$\begin{gathered} a^r \cdot a^{r'} = a^{r+r'}, \\ a^r : a^{r'} = a^{r-r'}, \\ (a^r)^{r'} = a^{r \cdot r'}, \\ (a \cdot b)^r = a^r \cdot b^r, \\ \left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}. \end{gathered}$$

Теперь мы подошли к финальному построению настоящего раздела — распространению степени на вещественные показатели. Пусть $a > 1$ и b — вещественные числа. Тогда рассмотрим всевозможные числа r, $r' \in \mathbb{Q}$, для которых

$$r < b < r'.$$

Степенью числа a с показателем b называют (и обозначают символом a^b) вещественное число c, содержащееся между всеми степенями a^r и $a^{r'}$:

$$a^r < c < a^{r'}.$$

На основании принципа Дедекинда можно показать, что существует точная верхняя граница sup у любого непустого ограниченного сверху множества. Отсюда,

$$a^b = \sup_{\mathbb{Q}\ni r<b} \{a^r\}.$$

Если $0 < a < 1$, то положим $a^b := \left(\frac{1}{a}\right)^{-b}$.

3 Формулы сокращенного умножения

На семинарах по математическому анализу мы интенсивно используем формулы сокращенного умножения:

$$\begin{aligned}
(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2,\\
(a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2,\\
a^2 - b^2 &= (a-b)(a+b),\\
(a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,\\
(a-b)^3 &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3,\\
a^3 + b^3 &= (a+b)(a^2 - ab + b^2),\\
a^3 - b^3 &= (a-b)(a^2 + ab + b^2).
\end{aligned}$$

Их надо знать наизусть. Вместе с тем, эти формулы можно легко вывести. Например,

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Из формул сокращенного умножения можно получать более сложные формулы. Например, покажем, что

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

(используется в курсе АГ). Действительно,

$$\begin{aligned}
(a+b+c)^2 = [(a+b)+c]^2 = (a+b)^2 + 2(a+b)c + c^2 = \\
= a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2.
\end{aligned}$$

Формулы сокращенного умножения позволяют решать некоторые алгебраические уравнения. Рассмотрим пример: **уравнение от Бхаскары**,

$$x^4 - 2x^2 - 400x = 9999$$

(Бхаскара II (1114–1178) — индийский математик и астроном).

С целью получить корни уравнения прибавим к обеим его частям по единице:

$$x^4 - 2x^2 - 400x + 1 = 9999 + 1,$$

что дает

$$x^4 - 2x^2 - 400x + 1 = 10000.$$

Замечая, что $10000 = 100^2$, перенесем это число в левую часть:

$$x^4 - 2x^2 - 400x + 1 - 100^2 = 0.$$

Учитывая, что $2x^2 = 4x^2 - 2x^2$, имеем:

$$x^4 - (4x^2 - 2x^2) - 400x + 1 - 100^2 = 0,$$

или

$$x^4 - 4x^2 + 2x^2 - 400x + 1 - 100^2 = 0.$$

Теперь перегруппируем слагаемые:

$$(x^4 + 2x^2 + 1) - (4x^2 + 400x + 100^2) = 0.$$

Но (формула квадрата суммы) $x^4+2x^2+1 = (x^2+1)^2$ и $4x^2+400x+100^2 = (2x+100)^2$, поэтому предыдущее соотношение принимает вид

$$(x^2 + 1)^2 - (2x + 100)^2 = 0.$$

Применим формулу разности квадратов:

$$(x^2 + 1 - 2x - 100)(x^2 + 1 + 2x + 100) = 0.$$

Теперь заметим, что (квадрат разности и суммы) $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$ и $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$. Тогда

$$((x - 1)^2 - 10^2)((x + 1)^2 + 100) = 0.$$

Вторая скобка всегда > 0, поэтому мы ее можем отбросить. В итоге приходим к равносильному уравнению

$$(x - 1)^2 - 10^2 = 0.$$

Формула разности квадратов дает:

$$(x - 1 - 10)(x - 1 + 10) = 0,$$

или

$$(x - 11)(x + 9) = 0.$$

Таким образом, решения исходного уравнения представлены числами $x = -9$ и $x = 11$.

4 Новые термины

- Степень с натуральным показателем.
- Степень с целым показателем.
- Алгебраический корень.
- Арифметический корень.
- Степень с дробным показателем.
- Степень с вещественным показателем.
- Формулы сокращенного умножения.