Математический анализ

(Когнитивные технологии)

Занятие 3. Действительные числа

К.Г. Койфман

2 октября 2025 г.

1 Предполагаемые знания

Предполагается, что читатель знаком со следующими терминами и понятиями:

- Множество.
- Равные множества.
- Подмножество.
- Пустое множество.
- Универсальное множество.
- Объединение множеств.
- Пересечение множеств.
- Разность множеств.
- Упорядоченная пара.
- Декартово произведение множеств.
- Множество натуральных чисел.
- Множество целых чисел.
- Множество рациональных чисел.

2 Рациональные числа

Из школьного курса арифметики и алгебры Вам знакомы следующие числовые множества. Во-первых, это множество натуральных чисел

$$\mathbb{N} = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots\}.$$

Его элементы используются для счета[1]. Натуральные числа можно складывать и умножать; вычитание и деление не всегда возможны. Далее, это множество целых чисел

$$\mathbb{Z} = \{0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 4,\ \ldots\}.$$

Его элементы используются для описания таких величин, которые характеризуются не только числовым значением, но и направлением вдоль фиксированной прямой[2]. Целые числа можно складывать, вычитать и умножать; деление не всегда возможно. Наконец, это множество рациональных чисел

$$\mathbb{Q} = \{\tfrac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}\}.$$

Его элементы используются для измерений. Рациональные числа можно складывать, умножать, вычитать и делить. Напомним, как эти действия производятся:

- Сложение в $\mathbb{Q}$. Приводим к общему знаменателю и после этого складываем полученные числители:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad + bc}{bd}.$$

- Вычитание в $\mathbb{Q}$. Приводим к общему знаменателю и после этого вычитаем из первого полученного числителя второй:

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} - \frac{bc}{bd} = \frac{ad - bc}{bd}.$$

- Умножение в $\mathbb{Q}$. Перемножаем отдельно числители и знаменатели:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

- Деление в $\mathbb{Q}$. Умножаем первую дробь на перевернутую вторую:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}.$$

Уже при использовании рациональных чисел мы сталкиваемся со следующим вопросом: хватает ли нам элементов множества $\mathbb{Q}$ для измерений? Для большей ясности рассмотрим следующую геометрическую задачу.

[1] Счет состоит в том, что, отделяя один предмет за другим (на самом деле или только мысленно), мы называем каждый раз число отделенных предметов.

[2] Пример: температура.

Имеется квадрат со стороной, равной единице длины. Чему равна длина его диагонали?

По теореме Пифагора мы получаем, что квадрат длины диагонали равен

$$1^2 + 1^2 = 1 + 1 = 2.$$

Тогда, по определению арифметического квадратного корня, сама длина диагонали равна

$$\sqrt{2}.$$

Но $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$! Далее мы это докажем.

Предварительно нам понадобится следующая лемма.

Лемма 1. *Справедливы утверждения:*

- *Квадрат четного числа есть число четное.*
- *Квадрат нечетного числа есть число нечетное.*

Доказательство. Действительно, пусть $n = 2k$ — четное число, где $k \in \mathbb{N}$. Тогда

$$n^2 = (2k)^2 = 2^2 k^2 = 4k^2.$$

Обозначая $r = 2k^2 \in \mathbb{N}$, приходим к представлению $n^2 = 2r$. Значит, n^2 является четным числом.

Пусть теперь $n = 2k + 1$ — нечетное число, где $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Тогда

$$n^2 = (2k+1)^2 = (2k)^2 + 2(2k) + 1 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1.$$

Обозначая $r = 2k^2 + 2k \in \mathbb{N}$, приходим к представлению $n^2 = 2r + 1$. Значит, n^2 является нечетным числом. $\square$

Все готово для доказательства следующей классической теоремы:

Теорема 1. *Не существует такой рациональной дроби $\frac{p}{q}$ (где p и q — натуральные числа), квадрат которой был бы равен 2.*

Доказательство. Действительно, предположим противное: существует число $r \in \mathbb{Q}$, такое, что $r^2 = 2$. По определению рационального числа, r можно представить в виде дроби: $r = \frac{p}{q}$, и при этом можно предположить, что эта дробь несократима, то есть, что p и q не имеют общих делителей. Таким образом, согласно предположению,

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2,$$

что влечет равенство $p^2 = 2q^2$. По этой причине, p^2 является четным числом и по Лемме 1 мы получаем, что само число p является четным: $p = 2s$, $s \in \mathbb{N}$. Подстановка в предыдущее равенство тогда дает:

$$(2q^2 = p^2) \Rightarrow (2q^2 = 4s^2) \Rightarrow (q^2 = 2s^2),$$

и q^2 является четным числом. По той же Лемме 1 это означает, что число q — четное. Таким образом, мы пришли к тому, что p и q имеют общим делителем 2, что противоречит исходному предположению об отсутствии общих делителей. Этим теорема доказана. $\square$

3 Множество действительных чисел

Таким образом, мы приходим к следующему вопросу: как нам построить расширение множества рациональных чисел, чтобы с использованием новых чисел можно было производить любые измерения? Таким расширением, как Вы, наверное, могли догадаться, является множество действительных чисел.

Замечание 1. *На самом деле, мы не имеем даже строгого определения натуральных чисел! С формально-логической точки зрения мы должны были бы, исходя из некоторой системы аксиом теории множеств (скажем, Цермело – Френкеля), построить натуральные числа (с нулем) и показать, что в совокупности они образуют множество. Далее, определяя тем или иным образом отношение эквивалентности, мы на основании множества натуральных чисел синтезируем множество целых чисел, а по нему, в свою очередь, — множество рациональных чисел. После этого, используя метод сечений, предложенный Дедекиндом, мы строим множество действительных чисел. В совокупности мы имеем долгий процесс, который рассматривается в теоретической арифметике. В математическом анализе мы пойдем другим путем.*

Определение 1. *Множество $\mathbb{R}$ элементов, обладающих свойствами **I–V** (перечислены далее), называется **множеством действительных чисел**. Каждый элемент этого множества называется **действительным числом**.*

I. Операция сложения. Для любой упорядоченной пары действительных чисел a и b определено, и притом единственным образом, число, называемое их **суммой** и обозначаемое через $a + b$, так что при этом выполнены следующие условия.

(I_1) **Переместительный закон**: для любой пары чисел a и b справедливо равенство $a + b = b + a$.

(I_2) **Сочетательный закон**: для любой тройки чисел a, b и c имеем $(a + b) + c = a + (b + c)$.

(I_3) **Существование нуля**: существует число, обозначаемое 0 (**нуль**), такое, что $a + 0 = a$ для любого числа a.

(I_4) **Существование противоположного числа**: для любого числа a существует число, обозначаемое $-a$ (**противоположное данному**), такое, что $a + (-a) = 0$.

II. Операция умножения. Для любой упорядоченной пары действительных чисел a и b определено, и притом единственным образом, число, называемое их **произведением** и обозначаемое через $a \cdot b$ или ab, так что при этом выполнены следующие условия.

(II_1) **Переместительный закон**: для любой пары чисел a и b справедливо равенство $ab = ba$.

(II_2) **Сочетательный закон**: для любой тройки чисел a, b и c имеем $(ab)c = a(bc)$.

(II_3) **Существование единицы**: существует число, обозначаемое 1 (**единица**), такое, что $1 \neq 0$ и $a \cdot 1 = a$ для любого числа a.

(II_4) **Существование обратного числа**: для любого числа $a \neq 0$ существует число, обозначаемое $\frac{1}{a}$ (**обратное данному**), такое, что $a \cdot \frac{1}{a} = 1$.

III. Связь сложения и умножения. Для любой тройки чисел a, b и c имеем **распределительный закон** умножения относительно сложения:

$$(a + b)c = ac + bc.$$

IV. Упорядоченность. Для каждого числа a определено одно и только одно из соотношений: $a > 0$ (a больше нуля), $a = 0$ (a равно нулю) и $a < 0$ (a меньше нуля). При этом, если $a > 0$ и $b > 0$, то

(IV_1) $a + b > 0$,

(IV_2) $ab > 0$.

V. Принцип Дедекинда (аксиома непрерывности). Свойства, перечисленные выше, знакомы еще со школы. Последнее свойство **V** является специальным; оно выражает непрерывность множества действительных чисел: если изобразить это множество на прямой, то в нем не будет пустот. Для формализации введем понятие сечения:

Определение 2. ***Сечением*** *множества действительных чисел* $\mathbb{R}$ *называется любая пара множеств* $A \subset \mathbb{R}$ *и* $B \subset \mathbb{R}$, *которая удовлетворяет следующим условиям:*

1) *Объединение множеств* A *и* B *дает все множество* $\mathbb{R}$, *т.е.,* $A \cup B = \mathbb{R}$.

2) *Каждое из множеств* A *и* B *не пусто, т.е.,* $A \neq \varnothing$ *и* $B \neq \varnothing$.

3) *Каждое число множества* A *меньше каждого числа множества* B, *т.е., если* $a \in A$ *и* $b \in B$, *то* $a < b$.

Обозначение: $A|B$; A — ***нижний класс***, B — ***верхний класс*** *сечения.*

Пример 1 (Примеры сечений)**.** *Пусть* $\alpha \in \mathbb{R}$.

- *Положим* $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant \alpha\}$ *и* $B = \{y \in \mathbb{R} \mid y > \alpha\}$. *Тогда* $A|B$ — *сечение, причем в классе* A *имеется наибольшее число (им является* α*), а в* B *наименьшего числа нет.*

- *Зададим* $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x < \alpha\}$ *и* $B = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant \alpha\}$. *Тогда* $A|B$ — *сечение, причем в классе* A *нет наибольшего числа, а в* B *есть наименьшее число (им является* α*).*

Определение 3. *В обоих случаях говорят, что* ***сечение производится числом*** *α и пишут $\alpha = A|B$.*

Свойство непрерывности действительных чисел выражается в виде следующей аксиомы:

Принцип Дедекинда. *Для каждого сечения $A|B$ множества действительных чисел существует число α, производящее это сечение.*

На этом перечисление аксиом множества $\mathbb{R}$ завершено.

4 Новые термины

- Множество действительных чисел.
- Переместительный закон сложения.
- Сочетательный закон сложения.
- Нуль.
- Число, противоположное данному.
- Переместительный закон умножения.
- Сочетательный закон умножения.
- Единица.
- Число, обратное данному.
- Распределительный закон умножения относительно сложения.
- Сечение.
- Нижний класс сечения.
- Верхний класс сечения.
- Принцип Дедекинда.