Математический анализ
(Когнитивные технологии)
Занятие 2. Множества

К.Г. Койфман

16 сентября 2025 г.

1 Основные понятия

Современная математика оперирует понятиями множества и структуры, выстраиваемой над множеством[1]. Множества встречаются еще в школе, при нахождении области определения функции или решений неравенств. В обыденной жизни также приходится иметь дело с множествами. Однако понятие множества определить совсем не просто, подобно тому, как не просто определить понятие точки или прямой в элементарной геометрии. Мы принимаем следующее философское пояснение, принадлежащее Георгу Кантору — основателю теории множеств:

Множество есть многое, мыслимое нами как единое.

Часто вместо термина «множество» используются слова: «семейство», «собрание», «совокупность».

Между множествами определено отношение принадлежности. Пусть A и a — множества.

- запись $a \in A$ означает: «a является элементом A»;
- запись $a \notin A$ означает «a не является элементом A».

Символ $\in$ есть модифицированная первая буква слова «element» («элемент», на англ.).

Замечание 1. *Мы рассматриваем множества с «наивной» точки зрения. В действительности, понятие «множество» и отношение «быть элементом» являются неопределяемыми и их свойства постулируются в рамках некоторой системы аксиом.*

Определение 1. *Два множества A и B называются **равными**, если они состоят из одних и тех же элементов. Обозначение: $A = B$.*

[1] Алгебраические, топологические и геометрические структуры являются примерами.

Определение 2. *Множество A называется* ***подмножеством*** *множества B (рис. 1), если каждый элемент множества A является элементом множества B. Обозначение: $A \subset B$. Говорят: множество A* ***содержится*** *в множестве B.*

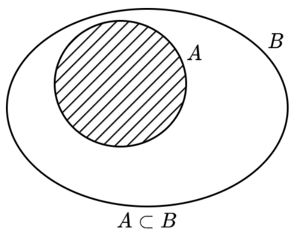

Рис. 1: Подмножество

Порой словесные определения выглядят довольно громоздко. Для сокращения письма мы будем употреблять специальные символы:

- связки $\neg$ («не»), $\wedge$ («и»), $\vee$ («или», в неразделительном смысле), $\Rightarrow$ («следует»), и $\Leftrightarrow$ («равносильно»);
- квантор всеобщности $\forall$ («любой», «каждый»), — перевернутая первая буква слова «All» («все», на англ.),
- квантор существования $\exists$ («существует», «найдется»), — перевернутая первая буква слова «Exists» («существует», на англ.).

Точный смысл этих понятий определяется в курсе математической логики.

Введем символ равенства по определению. Пусть q — ранее определенный объект, а p — новый объект, заданный посредством q. Пишут: $p := q$ («p по определению есть q»).

Тогда сокращенная запись определения равенства имеет вид:

$$(A = B) := \forall x : \ (x \in A) \Leftrightarrow (x \in B).$$

Словами: для каждого x включение $x \in A$ равносильно включению $x \in B$.

Сокращенная запись определения подмножества имеет вид:

$$(A \subset B) := \forall x : \ (x \in A) \Rightarrow (x \in B).$$

Словами: для каждого x включение $x \in A$ влечет включение $x \in B$.

Используются специальные множества:

- **Пустое множество** $\varnothing$, не содержащее элементов.
- **Универсальное множество** U, которое содержит в себе рассматриваемые множества.

В математическом анализе $U = \mathbb{R}$ (множество действительных чисел).

Способы задания множеств:

- Конечным списком: $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ — множество, состоящее из $a_1, a_2, \ldots, a_n$.
- При помощи свойства P: $A = \{x \in U \mid P(x)\}$ — множество, состоящее из всех тех x из U, для которых истинно $P(x)$.

Пример 1. *Примеры задания множеств:*

- *Множество букв в слове "геометрия": $A = \{г,\ е,\ о,\ м,\ т,\ р,\ и,\ я\}$. (буква "е" два раза не повторяется).*
- *Множество первых пяти натуральных чисел: $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$.*
- *Множество положительных действительных чисел: $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ ($\mathbb{R}_+$ есть множество тех действительных чисел x, которые удовлетворяют неравенству $x > 0$).*
- *Пусть $P(x)$ означает «x является столицей какого-то государства», A — множество городов Земли, тогда $C = \{x \in A \mid P(x)\}$ есть множество столиц Земли.*

Пример 2. *Примеры отношений между множествами:*

- $1 \in \{1,\ 2,\ 3\}$.
- $5 \notin \{1,\ 2,\ 3\}$.
- $\{1,\ 2\} \subset \{1,\ 2,\ 3\}$.
- $\mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}$.
- $\varnothing \in \{\varnothing,\ \{\varnothing\}\}$, $\{\varnothing\} \in \{\varnothing,\ \{\varnothing\}\}$.
- *Пусть C — множество столиц Земли. Тогда Москва $\in C$, Орел $\notin C$, $\{$Москва, Лондон$\} \subset C$, $\{$Кельн, Лондон$\} \not\subset C$.*

2 Операции над множествами

Пусть A и B — подмножества универсального множества U.

Определение 3. ***Объединением*** *множеств A и B (рис. 2) называют множество*

$$A \cup B := \{x \in U \mid (x \in A) \vee (x \in B)\},$$

состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат ***хотя бы одному*** *из множеств A, B.*

Пример 3. *Если $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$, а $B = \{1,\ 2,\ 5,\ 6\}$, то*

$$A \cup B = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}.$$

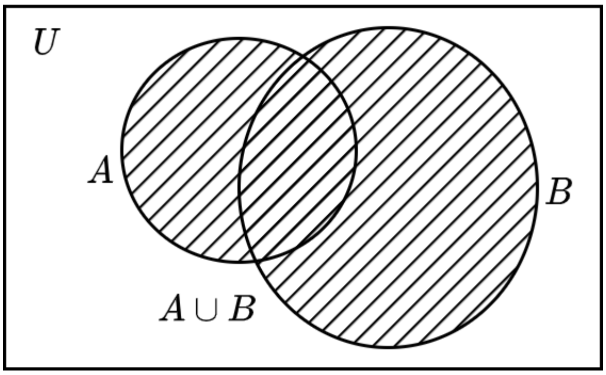

Рис. 2: Иллюстрация к объединению множеств

Определение 4. ***Пересечением*** *множеств A и B (рис. 3) называют множество*

$$A \cap B := \{x \in U \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\},$$

состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат как множеству A, так и множеству B.

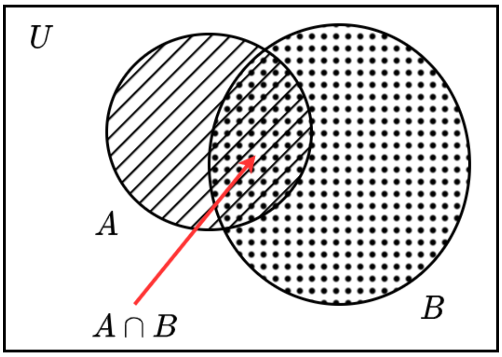

Рис. 3: Иллюстрация к пересечению множеств

Пример 4. *Если $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$, а $B = \{1,\ 2,\ 5,\ 6\}$, то*

$$A \cap B = \{1,\ 2\}.$$

Определение 5. ***Разностью*** *множеств A и B (рис. 4) называют множество*

$$A \setminus B := \{x \in U \mid (x \in A) \wedge (x \notin B)\},$$

состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат множеству A, но не принадлежат множеству B.

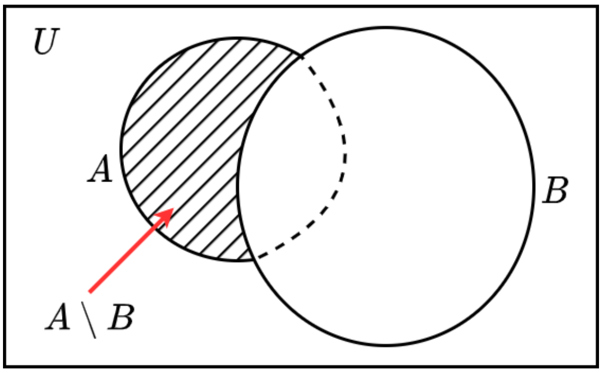

Рис. 4: Иллюстрация к разности множеств

Пример 5. *Если* $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$*, а* $B = \{1,\ 2,\ 5,\ 6\}$*, то*

$$A \setminus B = \{3,\ 4\},$$
$$B \setminus A = \{5,\ 6\}.$$

Примеры на объединение, пересечение и разность:

Пример 6. *Пусть* $A = (-1,\ 2]$*,* $B = [1,\ 4)$ *Тогда*

- $A \cup B = (-1,\ 4)$*,*
- $A \cap B = [1,\ 2]$*,*
- $A \setminus B = (-1,\ 1)$ *и* $B \setminus A = (2,\ 4)$*.*

Из произвольных множеств A, B можно образовать множество $\{A,\ B\}$ — **неупорядоченную пару**, а также множество $(A,\ B)$ — **упорядоченную пару**, где имеется признак, выделяющий первый (т.е., A) и второй (т.е., B) элементы. Один из способов определения упорядоченной пары принадлежит К. Куратовскому:

$$(A,\ B) := \{\{A\},\ \{A,\ B\}\}.$$

Пусть X и Y — множества.

Определение 6. ***Декартовым произведением*** *множеств* X *и* Y *называется множество*

$$X \times Y := \{(x,\ y) \mid (x \in X) \wedge (y \in Y)\},$$

образованное всеми упорядоченными парами $(x,\ y)$*, первый элемент которых принадлежит* X*, а второй — принадлежит* Y*.*

Пример 7. *Примеры на декартово произведение:*

- $\mathbb{R}^2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x,\ y) \mid (x \in \mathbb{R}) \wedge (y \in \mathbb{R})\}$ *— плоскость.*
- $[0,\ 1]^2 := [0,\ 1] \times [0,\ 1]$ *— квадрат с единичной стороной.*
- *Если* $A = \{1,\ 2\}$*,* $B = \{b\}$*, то* $A \times B = \{(1,\ b),\ (2,\ b)\}$ *и* $B \times A = \{(b,\ 1),\ (b,\ 2)\}$*.*

3 Новые термины

- Множество.
- Равные множества.
- Подмножество.
- Пустое множество.
- Универсальное множество.
- Объединение множеств.
- Пересечение множеств.
- Разность множеств.
- Упорядоченная пара.
- Декартово произведение множеств.