Занятие 1.1
Входное тестирование

1 Вариант входного теста

1. Решить уравнение $\sin^2 x + \sin^2 2x = 1$.
2. Вычислить $\log_5\left(10^{\lg^2 5}\right) + 2^{\frac{\lg\lg 2}{\lg 2}}$.
3. Упростить выражение $\left(\dfrac{\sqrt{a}}{2} - \dfrac{1}{2\sqrt{a}}\right)^2 \left(\dfrac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1} - \dfrac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1}\right)$.
4. Решить неравенство $|4x-3| \le x+6$.
5. Решить уравнение $5 + \sqrt{x+3} = 3x$.
6. Найти область определения функции

$$f(x) = \sqrt{16 - 0.5^x} + \sqrt{x^2 + x - 6}.$$

7. Изобразить на плоскости множество точек, удовлетворяющих условию $5x - 13 \ge 3y$.

8. Решить неравенство $\dfrac{1}{3x-5} \le \dfrac{1}{2x-3}$.

2 Решение задач

1. Решить уравнение $\sin^2 x + \sin^2 2x = 1$.

Решение:

$\sin^2 x + \sin^2 2x = 1$,
$\sin^2 x + 4\sin^2 x\cos^2 x = 1$,
$\sin^2 x + 4\sin^2 x(1 - \sin^2 x) = 1$,
$4\sin^4 x - 5\sin^2 x + 1 = 0$,
$\sin^2 x = 1$ или $\sin^2 x = 1/4$,
$\sin x = \pm 1$ или $\sin x = \pm 1/2$,

$x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n$, $x = \pm\dfrac{\pi}{6} + 2\pi n$, $x = \pm\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in Z$.

2. Вычислить $\log_5\left(10^{\lg^2 5}\right) + 2^{\frac{\lg\lg 2}{\lg 2}}$.
Решение:
Здесь используем формулу перехода к новому основанию:
$\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$.

$$\log_5\left(10^{\lg^2 5}\right) + 2^{\frac{\lg\lg 2}{\lg 2}} = \lg^2 5 \cdot \log_5 10 + 2^{\log_2 \lg 2} =$$
$$= \lg^2 5 \cdot \frac{\lg 10}{\lg 5} + \lg 2 = \lg 5 + \lg 2 = \lg(5 \cdot 2) = \lg 10 = 1.$$

3. Упростить выражение $\left(\dfrac{\sqrt{a}}{2} - \dfrac{1}{2\sqrt{a}}\right)^2 \left(\dfrac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1} - \dfrac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1}\right)$.
Решение:
$$\left(\frac{\sqrt{a}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{a}}\right)^2 \left(\frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1} - \frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1}\right) =$$
$$= \left(\frac{a-1}{2\sqrt{a}}\right)^2 \frac{(\sqrt{a}-1)^2 - (\sqrt{a}+1)^2}{a-1} =$$
$$= \frac{(a-1)((\sqrt{a}-1) + (\sqrt{a}+1))((\sqrt{a}-1) - (\sqrt{a}+1))}{4a} =$$
$$= \frac{(a-1) \cdot 2\sqrt{a} \cdot (-2)}{4a} = \frac{1-a}{\sqrt{a}}.$$

4. Решить неравенство $|4x-3| \le x+6$.
Решение:
$|4x-3| \le x+6$.
Раскрываем знак модуля:
$$\begin{cases} 4x - 3 \le x + 6, \\ 4x - 3 \ge -(x+6). \end{cases}$$
Решаем каждое из неравенств системы:

$$\begin{cases} x \le 3, \\ x \ge -3/5. \end{cases}$$

Объединяем получившиеся ответы: $x \in [-3/5; 3]$.

5. Решить уравнение $5 + \sqrt{x+3} = 3x$.

Решение:

$5 + \sqrt{x+3} = 3x$,

$\sqrt{x+3} = 3x - 5$,

$(\sqrt{x+3})^2 = (3x-5)^2$,

$x + 3 = 9x^2 - 30x + 25$,

$9x^2 - 31x + 22 = 0$,

$x_1 = 22/9$, $x_2 = 1$.

Проверка:

$x_1 = 22/9$

$5 + \sqrt{22/9 + 3} = 3 \cdot 22/9$, $22/3 = 22/3$ - верное тождество.

$x_2 = 1$

$5 + \sqrt{1+3} = 3 \cdot 1$, $7 = 3$ - неверное тождество.

Следовательно, уравнение имеет только один корень $x = 22/9$.

6. Найти область определения функции

$$f(x) = \sqrt{16 - 0.5^x} + \sqrt{x^2 + x - 6}.$$

Решение:

Область определения функции задается из условия неотрицательности подкоренных выражений:

$$\begin{cases} 16 - 0.5^x \ge 0, \\ x^2 + x - 6 \ge 0. \end{cases}$$

Сначала рассмотрим первое неравенство:

$16 - 0.5^x \ge 0$,

$0.5^x \le 16$,

$0.5^x \le 2^4$,

$0.5^x \le 0.5^{-4}$.

Мы имеем показательное неравенство, в котором основание степени меньше единицы. Следовательно, отбрасывая основание, меняем знак неравенства:

$x \geq -4$.

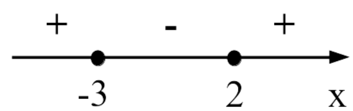
Теперь решаем второе неравенство системы:

$x^2 + x - 6 \geq 0$.

Используем метод интервалов:

$x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow x_1 = -3$, $x_2 = 2$.

Отмечаем найденные корни на числовой прямой и определяем знаки многочлена $x^2 + x - 6$ в получившихся интервалах:



Тогда решением второго неравенства будет:

$x \in (-\infty; -3] \cup [2; +\infty)$.

Найденные решения первого и второго неравенств формируют систему:

$$\begin{cases} x \geq -4, \\ x \in (-\infty; -3] \cup [2; +\infty). \end{cases}$$

Чтобы найти область определения функции $f(x)$, осталось объединить эти решения, выбрав только те значения x, которые принадлежат одновременно обоим решениям:

$D(f) = [-4; -3] \cup [2; +\infty)$.

7. Изобразить на плоскости множество точек, удовлетворяющих условию $5x - 13 \geq 3y$.

Решение:

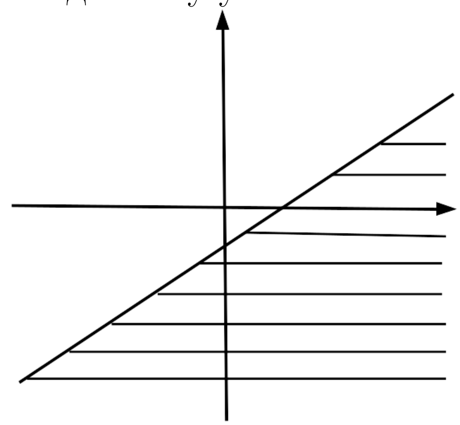
В заданном условии выражаем y через x:

$y \leq \dfrac{5}{3}x - \dfrac{13}{3}$.

Далее на плоскости рисуем прямую:

$y = \dfrac{5}{3}x - \dfrac{13}{3}$.

Все точки плоскости, которые расположены на этой прямой и ниже, удовлетворяют заданному условию.



8. Решить неравенство $\dfrac{1}{3x-5} \le \dfrac{1}{2x-3}$.

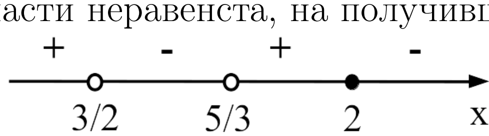
Решение:

$\dfrac{1}{3x-5} \le \dfrac{1}{2x-3}$,

$\dfrac{1}{3x-5} - \dfrac{1}{2x-3} \le 0$,

$\dfrac{-x+2}{(3x-5)(2x-3)} \le 0$.

Последнее неравенство решаем методом интервалов. Находим нули числителя и знаменателя: $x_1 = 2$, $x_2 = 5/3$, $x_3 = 3/2$. Отмечаем найденные значения на числовой прямой, причем нули знаменателя обозначаются выколотыми точками, и определяем знаки выражения, стоящего в левой части неравенста, на получившихся интервалах:



Ответ включает все промежутки, которым соответствует знак минус. Так как неравенство нестрогое, то концы промежутков, отмеченные закрашенными точками, также входят в ответ. В нашем случае это точка $x = 2$.

Соответственно, получаем ответ: $x \in (3/2; 5/3) \cup [2; +\infty)$.