Математический анализ

(Когнитивные технологии)

Занятие 5. Необходимые сведения из тригонометрии

К. Г. Койфман[1]

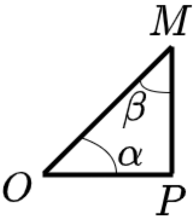
[1]МГТУ им. Н.Э. Баумана, г. Москва

koifman.bmstu@yandex.ru

https://www.researchgate.net/profile/Konstantin-Koifman

Москва, 2025

Определение тригонометрических функций



Пока рассматриваем острые углы!
Пусть $\triangle OPM$ — прямоугольный треугольник с гипотенузой OM и острыми углами $\angle\alpha = \angle POM$, $\angle\beta = \angle PMO$.
В соответствии с теоремой о сумме углов треугольника на плоскости имеем: $\alpha + \beta = 90°$.

Определение

- $\sin\alpha = \frac{MP}{OM}$,
- $\cos\alpha = \frac{OP}{OM}$,
- $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$,
- $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

Поскольку $\sin\beta = \frac{OP}{OM}$ и $\cos\beta = \frac{MP}{OM}$, то имеем:

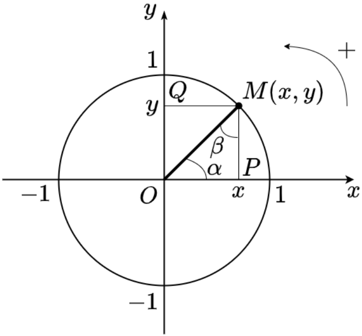
$$\sin\alpha = \cos\beta, \quad \cos\alpha = \sin\beta.$$

Отсюда следуют формулы приведения:

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \sin\beta = \cos\alpha,$$
$$\cos(90^\circ - \alpha) = \cos\beta = \sin\alpha.$$

До сих пор мы предполагали, что угол α острый. Теперь поставим целью распространить значения тригонометрических функций на все углы. Для этого заметим, что мы определяли значения чисто геометрически. Теперь посмотрим на них с аналитической точки зрения.

Пусть точка O является началом прямоугольной системы координат и центром окружности радиуса 1. Положительное направление обхода — против часовой стрелки. Построим прямоугольный $\triangle OPM$.



Угол α — это угол между радиус-вектором $\overrightarrow{OM}$ и осью Ox. Причем, поскольку окружность имеет радиус 1, то $OM = 1$. Далее, $OP = x$, $MP = y$.

Поэтому,

$$\sin\alpha = \frac{MP}{OM} = \frac{y}{1} = y,$$
$$\cos\alpha = \frac{OP}{OM} = \frac{x}{1} = x.$$

Таким образом, синус угла α равен ординате точки M, а косинус угла α равен абсциссе точки M.

Введем понятия синуса и косинуса для любого угла α (не обязательно острого).

Определение

Синусом угла α между положительным направлением оси Ox и радиус-вектором $\overrightarrow{OM}$ (отсчитываемым против хода часовой стрелки) называется **ордината** точки M, а **косинусом** этого же угла α — **абсцисса** точки M.

Поскольку $x^2 + y^2 = 1$, то

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

— основное тригонометрическое тождество.
Если углу α соответствует точка $M(x,\ y)$, то углу $-\alpha$ соответствует точка $M'(x,\ -y)$. Поэтому

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha,$$
$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha.$$

Значит, синус — нечетная функция, а косинус — четная.

Тригонометрические соотношения

РК и экзамены — это стресс. Поэтому память может подводить. Следовательно, чем меньше формул требуется держать в уме, — тем легче. Предположим, что наизусть выучена формула

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta.$$

Выясним, какие формулы можно из нее вывести (свойства четности и формулы приведения для 90° при этом подразумеваются).

1. Формула для $\sin(\alpha - \beta)$:

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin(\alpha+(-\beta)) = \sin\alpha\cos(-\beta) + \cos\alpha\sin(-\beta) = \\ = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta.$$

2. Формула для $\sin(2\alpha)$:

$$\sin(2\alpha) = \sin(\alpha+\alpha) = \sin\alpha\cos\alpha + \cos\alpha\sin\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha.$$

3. Формула для $\cos(\alpha+\beta)$:

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta) &= \sin(90^\circ-(\alpha+\beta)) = \sin((90^\circ-\alpha)-\beta) = \\ &= \sin(90^\circ-\alpha)\cos\beta - \cos(90^\circ-\alpha)\sin\beta = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.\end{aligned}$$

4. Формула для $\cos(\alpha-\beta)$:

$$\begin{aligned}\cos(\alpha-\beta) &= \cos(\alpha+(-\beta)) = \cos\alpha\cos(-\beta) - \sin\alpha\sin(-\beta) = \\ &= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.\end{aligned}$$

5. Формула для $\cos(2\alpha)$:

$$\cos(2\alpha) = \cos(\alpha+\alpha) = \cos\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\sin\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha.$$

6. Формула для $\cos x - \cos y$. Здесь рассуждение более сложное. Выпишем формулы:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$$

Здесь α и β произвольны и пока не связаны с x и y. Теперь вычтем из первого равенства второе:

$$\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta) = -2\sin\alpha\sin\beta.$$

Далее введем обозначения:

$$\alpha + \beta = x, \quad \alpha - \beta = y.$$

Складывая и вычитая эти равенства, получим:

$$\begin{cases} 2\alpha = x + y \\ 2\beta = x - y \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{x+y}{2}, \ \beta = \frac{x-y}{2}.$$

Тогда:

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}.$$

Аналогичным образом получаются формулы:

$$
\begin{aligned}
\cos x + \cos y &= 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2},\\
\sin x - \sin y &= 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2},\\
\sin x + \sin y &= 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}.
\end{aligned}
$$

Итог

Итог

Новые термины:

- Синус.
- Косинус.
- Тангенс.
- Котангенс.

На дом:

- Выучить определения тригонометрических функций и научиться выводить тригонометрические формулы из формулы синуса суммы.

!!!Удачи!!!