

Математический анализ

(Когнитивные технологии)

Занятие 4. Необходимые сведения из элементарной алгебры

К. Г. Койфман¹

¹МГТУ им. Н.Э. Баумана, г. Москва

koifman.bmstu@yandex.ru

<https://www.researchgate.net/profile/Konstantin-Koifman>

Москва, 2025

Степени

Определение

Произведение одинаковых сомножителей называется **степенью**:

$$a^n := \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ раз}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Здесь a — основание степени, n — показатель степени.

Примеры

- $a^2 = a \cdot a$ — **квадрат** числа a .
- $a^3 = a \cdot a \cdot a$ — **куб** числа a .

Свойство 1

Чётная степень отрицательного числа есть число положительное, а нечётная степень — число отрицательное:

$$(-a)^{2n} > 0, \quad (-a)^{2n+1} < 0, \quad \text{где } a > 0.$$

Свойство 2

При умножении степеней одного и того же числа показатели степеней складываются:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

Свойство 3

Чтобы возвести степень какого-либо числа в другую степень, надо перемножить показатели степеней:

$$(a^n)^m = a^{m \cdot n}.$$

Распространение степени на целые показатели:

$$a^0 := 1,$$

$$a^{-n} := \frac{1}{a^n}, \quad n > 0.$$

Теперь символ a^n определен для всех $n \in \mathbb{Z}$. Единая формула:

$$a^n := \begin{cases} \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ раз}}, & \text{при } n > 0, \\ 1, & \text{при } n = 0, \\ \underbrace{\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a} \cdot \dots \cdot \frac{1}{a}}_{-n \text{ раз}}, & \text{при } n < 0. \end{cases}$$

Определение

Алгебраическим корнем n -й степени из числа a называется такое число b , n -я степень которого равна a :

$$(b \text{ — корень } n\text{-й степени из } a) \Leftrightarrow b^n = a.$$

Примеры

- Число 4 имеет два алгебраических квадратных корня: -2 и 2 , т.к. $(-2)^2 = 2^2 = 4$.
- Число 125 имеет один кубический корень 5, т.к. $5^3 = 125$.

Определение

Арифметическим корнем n -й степени из **положительного числа a** называется **положительный алгебраический корень n -й степени из a** .
Обозначение: $\sqrt[n]{a}$.

Замечание

Из всех алгебраических корней n -й степени от данного числа лишь один положительный. Поэтому арифметический корень определен единственным образом.

Примеры

- $\sqrt{4} := \sqrt[2]{4} = 2$.
- $\sqrt[3]{125} = 5$.

Распространение степени на дробные показатели

Пусть $m, n > 0$ — целые, $a > 0$ — произвольное. Выражение $a^{\frac{m}{n}}$ означает корень, показатель которого равен знаменателю, а показатель степени подкоренного числа равен m :

$$a^{\frac{m}{n}} := \sqrt[n]{a^m}.$$

Основное свойство

Если $p > 0$ — целое, то

$$a^{\frac{mp}{np}} = a^{\frac{m}{n}}.$$

Соглашение

Условимся употреблять отрицательные дробные показатели в том же смысле, в каком мы употребляли отрицательные целые показатели. Например,

$$a^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{a^{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{a^3}}.$$

Свойства степеней с дробными показателями

$$a^r \cdot a^{r'} = a^{r+r'},$$

$$a^r : a^{r'} = a^{r-r'},$$

$$(a^r)^{r'} = a^{r \cdot r'},$$

$$(a \cdot b)^r = a^r \cdot b^r,$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}.$$

Распространение степени на вещественные показатели

Пусть $a > 1$ и b — вещественные числа. Тогда рассмотрим всевозможные $r, r' \in \mathbb{Q}$, для которых

$$r < b < r'.$$

Степенью числа a с показателем b называют (и обозначают символом a^b) вещественное число c , содержащееся между всеми степенями a^r и $a^{r'}$:

$$a^r < c < a^{r'}.$$

На основании принципа Дедекинда можно показать, что существует точная верхняя граница \sup у любого непустого ограниченного сверху множества. Отсюда,

$$a^b = \sup_{\mathbb{Q} \ni r < b} \{a^r\}.$$

Если $0 < a < 1$, то положим $a^b := \left(\frac{1}{a}\right)^{-b}$.

Формулы
сокращенного
умножения

Сводка формул сокращенного умножения

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2,$$

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b),$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3,$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2),$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2).$$

Например,

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Из формул сокращенного умножения можно получать более сложные формулы. Например, покажем, что

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

(используется в курсе АГ). Действительно,

$$\begin{aligned}(a + b + c)^2 &= [(a + b) + c]^2 = (a + b)^2 + 2(a + b)c + c^2 = \\ &= a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2.\end{aligned}$$

Формулы сокращенного умножения позволяют решать некоторые алгебраические уравнения. Рассмотрим пример: **уравнение от Бхаскары**,

$$x^4 - 2x^2 - 400x = 9999$$

(Бхаскара II (1114–1178) — индийский математик и астроном).
Прибавим к обеим частям уравнения по единице:

$$x^4 - 2x^2 - 400x + 1 = 9999 + 1,$$

что дает

$$x^4 - 2x^2 - 400x + 1 = 10000.$$

Замечая, что $10000 = 100^2$, перенесем это число в левую часть:

$$x^4 - 2x^2 - 400x + 1 - 100^2 = 0.$$

Формулы сокращенного умножения

Учитывая, что $2x^2 = 4x^2 - 2x^2$, имеем:

$$x^4 - (4x^2 - 2x^2) - 400x + 1 - 100^2 = 0,$$

или

$$x^4 - 4x^2 + 2x^2 - 400x + 1 - 100^2 = 0.$$

Теперь перегруппируем слагаемые:

$$(x^4 + 2x^2 + 1) - (4x^2 + 400x + 100^2) = 0.$$

Но (формула квадрата суммы) $x^4 + 2x^2 + 1 = (x^2 + 1)^2$ и $4x^2 + 400x + 100^2 = (2x + 100)^2$, поэтому предыдущее соотношение принимает вид

$$(x^2 + 1)^2 - (2x + 100)^2 = 0.$$

Применим формулу разности квадратов:

$$(x^2 + 1 - 2x - 100)(x^2 + 1 + 2x + 100) = 0.$$

Формулы сокращенного умножения

Теперь заметим, что (квадрат разности и суммы)
 $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$ и $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$. Тогда

$$((x - 1)^2 - 10^2)((x + 1)^2 + 100) = 0.$$

Вторая скобка всегда > 0 , поэтому мы ее можем отбросить. В итоге приходим к равносильному уравнению

$$(x - 1)^2 - 10^2 = 0.$$

Формула разности квадратов дает:

$$(x - 1 - 10)(x - 1 + 10) = 0,$$

или

$$(x - 11)(x + 9) = 0.$$

Таким образом, решения исходного уравнения представлены числами $x = -9$ и $x = 11$.

ИТОГ

Новые термины:

- Степень с натуральным показателем.
- Степень с целым показателем.
- Алгебраический корень.
- Арифметический корень.
- Степень с дробным показателем.
- Степень с вещественным показателем.
- Формулы сокращенного умножения.

На дом:

- Выучить определения степеней и формулы сокращенного умножения.

!!!Удачи!!!