Математический анализ

(Когнитивные технологии)

Занятие 3. Действительные числа

К. Г. Койфман[1]

[1]МГТУ им. Н.Э. Баумана, г. Москва

koifman.bmstu@yandex.ru

https://www.researchgate.net/profile/Konstantin-Koifman

Москва, 2025

Рациональные числа

Рациональные числа

Множество натуральных чисел

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$

В $\mathbb{N}$

можно складывать и умножать; вычитание и деление не всегда возможны.

Множество целых чисел

$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \ldots\}$

В $\mathbb{Z}$

можно складывать, вычитать и умножать; деление не всегда возможно.

Множество рациональных чисел

$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}\}$

В $\mathbb{Q}$

можно складывать, умножать, вычитать и делить.

Проблема

Хватает ли нам элементов множества $\mathbb{Q}$ для измерений?

Имеется квадрат со стороной, равной единице длины. Чему равна длина его диагонали?

По теореме Пифагора

Квадрат длины диагонали равен

$$1^2 + 1^2 = 1 + 1 = 2.$$

По определению арифметического квадратного корня, сама длина диагонали равна

$$\sqrt{2}.$$

Но $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$! Далее мы это докажем.

Доказательство иррациональности $\sqrt{2}$

Лемма

- Квадрат четного числа есть число четное.
- Квадрат нечетного числа есть число нечетное.

Доказательство.

Действительно, пусть $n = 2k$ — четное число, где $k \in \mathbb{N}$. Тогда

$$n^2 = (2k)^2 = 2^2k^2 = 4k^2.$$

Обозначая $r = 2k^2 \in \mathbb{N}$, приходим к представлению $n^2 = 2r$. Значит, n^2 является четным числом.

Пусть теперь $n = 2k + 1$ — нечетное число, где $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Тогда

$$n^2 = (2k+1)^2 = (2k)^2 + 2(2k) + 1 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1.$$

Обозначая $r = 2k^2 + 2k \in \mathbb{N}$, приходим к представлению $n^2 = 2r + 1$. Значит, n^2 является нечетным числом. $\square$

Доказательство иррациональности $\sqrt{2}$

Теорема

Не существует такой рациональной дроби $\frac{p}{q}$ (где p и q — натуральные числа), квадрат которой был бы равен 2.

Доказательство иррациональности $\sqrt{2}$

Доказательство.

Действительно, предположим противное: существует число $r \in \mathbb{Q}$, такое, что $r^2 = 2$. По определению рационального числа, r можно представить в виде дроби: $r = \frac{p}{q}$, и при этом можно предположить, что эта дробь несократима, то есть, что p и q не имеют общих делителей. Таким образом, согласно предположению,

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2,$$

что влечет равенство $p^2 = 2q^2$. По этой причине, p^2 является четным числом и по Лемме мы получаем, что само число p является четным: $p = 2s$, $s \in \mathbb{N}$. Подстановка в предыдущее равенство тогда дает:

$$(2q^2 = p^2) \Rightarrow (2q^2 = 4s^2) \Rightarrow (q^2 = 2s^2),$$

и q^2 является четным числом. По той же Лемме это означает, что число q — четное. Таким образом, мы пришли к тому, что p и q имеют общим делителем 2, что противоречит исходному предположению об отсутствии общих делителей. Этим теорема доказана. $\square$

Множество действительных чисел

?Вопрос?

Как нам определить множество действительных чисел?

Комментарий [только читаем]

На самом деле, мы не имеем даже строгого определения натуральных чисел! С формально-логической точки зрения мы должны были бы, исходя из некоторой системы аксиом теории множеств (скажем, Цермело – Френкеля), построить натуральные числа (с нулем) и показать, что в совокупности они образуют множество. Далее, определяя тем или иным образом отношение эквивалентности, мы на основании множества натуральных чисел синтезируем множество целых чисел, а по нему, в свою очередь, — множество рациональных чисел. После этого, используя метод сечений, предложенный Дедекиндом, мы строим множество действительных чисел. В совокупности мы имеем долгий процесс, который рассматривается в теоретической арифметике. В математическом анализе мы пойдем другим путем.

Определение

Множество $\mathbb{R}$ элементов, обладающих свойствами **I–V** (перечислены далее), называется **множеством действительных чисел**. Каждый элемент этого множества называется **действительным числом**.

I. Операция сложения

Для любой упорядоченной пары действительных чисел a и b определено, и притом единственным образом, число, называемое их **суммой** и обозначаемое через $a + b$, так что при этом выполнены следующие условия.

(I_1) **Переместительный закон**: для любой пары чисел a и b справедливо равенство $a + b = b + a$.

(I_2) **Сочетательный закон**: для любой тройки чисел a, b и c имеем $(a + b) + c = a + (b + c)$.

(I_3) **Существование нуля**: существует число, обозначаемое 0 (**нуль**), такое, что $a + 0 = a$ для любого числа a.

(I_4) **Существование противоположного числа**: для любого числа a существует число, обозначаемое $-a$ (**противоположное данному**), такое, что $a + (-a) = 0$.

II. Операция умножения

Для любой упорядоченной пары действительных чисел a и b определено, и притом единственным образом, число, называемое их **произведением** и обозначаемое через $a \cdot b$ или ab, так что при этом выполнены следующие условия.

(II_1) **Переместительный закон**: для любой пары чисел a и b справедливо равенство $ab = ba$.

(II_2) **Сочетательный закон**: для любой тройки чисел a, b и c имеем $(ab)c = a(bc)$.

(II_3) **Существование единицы**: существует число, обозначаемое 1 (**единица**), такое, что $1 \neq 0$ и $a \cdot 1 = a$ для любого числа a.

(II_4) **Существование обратного числа**: для любого числа $a \neq 0$ существует число, обозначаемое $\frac{1}{a}$ (**обратное данному**), такое, что $a \cdot \frac{1}{a} = 1$.

III. Связь сложения и умножения

Для любой тройки чисел a, b и c имеем **распределительный закон** умножения относительно сложения:

$$(a+b)c = ac + bc.$$

IV. Упорядоченность

Для каждого числа a определено одно и только одно из соотношений: $a > 0$ (a больше нуля), $a = 0$ (a равно нулю) и $a < 0$ (a меньше нуля). При этом, если $a > 0$ и $b > 0$, то

(IV_1) $a + b > 0$,

(IV_2) $ab > 0$.

Свойства, перечисленные выше, знакомы еще со школы. Последнее свойство **V** является специальным; оно выражает непрерывность множества действительных чисел: если изобразить это множество на прямой, то в нем не будет пустот. Для формализации введем понятие сечения:

Определение

Сечением множества действительных чисел $\mathbb{R}$ называется любая пара множеств $A \subset \mathbb{R}$ и $B \subset \mathbb{R}$, которая удовлетворяет следующим условиям:

1) Объединение множеств A и B дает все множество $\mathbb{R}$, т.е., $A \cup B = \mathbb{R}$.
2) Каждое из множеств A и B не пусто, т.е., $A \neq \varnothing$ и $B \neq \varnothing$.
3) Каждое число множества A меньше каждого числа множества B, т.е., если $a \in A$ и $b \in B$, то $a < b$.

Обозначение: $A|B$; A — **нижний класс**, B — **верхний класс** сечения.

Примеры сечений

Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$.

- Положим $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant \alpha\}$ и $B = \{y \in \mathbb{R} \mid y > \alpha\}$. Тогда $A|B$ — сечение, причем в классе A имеется наибольшее число (им является α), а в B наименьшего числа нет.
- Зададим $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x < \alpha\}$ и $B = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant \alpha\}$. Тогда $A|B$ — сечение, причем в классе A нет наибольшего числа, а в B есть наименьшее число (им является α).

Определение

В обоих случаях говорят, что **сечение производится числом** α и пишут $\alpha = A|B$.

Свойство непрерывности действительных чисел выражается в виде следующей аксиомы:

V. Принцип Дедекинда (аксиома непрерывности)

Для каждого сечения $A|B$ множества действительных чисел существует число α, производящее это сечение.

На этом перечисление аксиом множества $\mathbb{R}$ завершено.

Итог

Новые термины:

- Множество действительных чисел.
- Переместительный закон сложения.
- Сочетательный закон сложения.
- Нуль.
- Число, противоположное данному.
- Переместительный закон умножения.
- Сочетательный закон умножения.
- Единица.
- Число, обратное данному.
- Распределительный закон умножения относительно сложения.

Итог

Новые термины (продолжение):

- Сечение.
- Нижний класс сечения.
- Верхний класс сечения.
- Принцип Дедекинда.

Итог

На дом:

- Выучить термины.

!!!Удачи!!!