

Математический анализ

(Когнитивные технологии)

Занятие 2. Множества

К. Г. Койфман¹

¹МГТУ им. Н.Э. Баумана, г. Москва

koifman.bmstu@yandex.ru

<https://www.researchgate.net/profile/Konstantin-Koifman>

Москва, 2025

Основные понятия

Философское пояснение

Множество есть многое, мыслимое нами как единое. (Георг Кантор)

Отношение принадлежности

Пусть A и a — множества.

- запись $a \in A$ означает: « a является элементом A »;
- запись $a \notin A$ означает « a не является элементом A ».

Символ $\in$ есть модифицированная первая буква слова «element» («элемент», на англ.).

Замечание

Мы рассматриваем множества с **«наивной»** точки зрения. В действительности, понятие «множество» и отношение «быть элементом» являются неопределяемыми и их свойства постулируются в рамках некоторой **системы аксиом**.

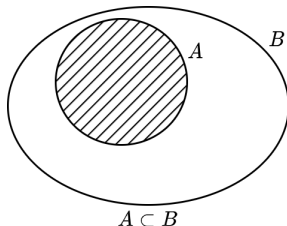
Определение 1

Два множества A и B называются **равными**, если они состоят из одних и тех же элементов. Обозначение: $A = B$.

Определение 2

Множество A называется **подмножеством** множества B , если каждый элемент множества A является элементом множества B . Обозначение: $A \subset B$. Говорят: множество A **содержится** в множестве B .

Иллюстрация:



Логические операции и кванторы

Порой словесные определения выглядят довольно громоздко. Для сокращения письма мы будем употреблять специальные символы:

- связки $\neg$ («не»), $\wedge$ («и»), $\vee$ («или», в неразделительном смысле), $\Rightarrow$ («следует»), и $\Leftrightarrow$ («равносильно»);
- квантор всеобщности $\forall$ («любой», «каждый»), — перевернутая первая буква слова «All» («все», на англ.),
- квантор существования $\exists$ («существует», «найдется»), — перевернутая первая буква слова «Exists» («существует», на англ.).

Точный смысл этих понятий определяется в курсе математической логики.

Символ равенства по определению

Пусть q — ранее определенный объект, а p — новый объект, заданный посредством q . Пишут: $p := q$ (« p по определению есть q »).

Сокращенная запись определения равенства имеет вид:

$$(A = B) := \forall x : (x \in A) \Leftrightarrow (x \in B).$$

Словами: для каждого x включение $x \in A$ равносильно включению $x \in B$.

Сокращенная запись определения подмножества имеет вид:

$$(A \subset B) := \forall x : (x \in A) \Rightarrow (x \in B).$$

Словами: для каждого x включение $x \in A$ влечет включение $x \in B$.

Специальные множества

- **Пустое множество** $\emptyset$, не содержащее элементов.
- **Универсальное множество** U , которое содержит в себе рассматриваемые множества.

В математическом анализе $U = \mathbb{R}$ (множество действительных чисел).

Способы задания множеств

- Конечным списком: $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ — множество, состоящее из $a_1, a_2, \dots, a_n$.
- При помощи свойства P : $A = \{x \in U \mid P(x)\}$ — множество, состоящее из всех тех x из U , для которых истинно $P(x)$.

Примеры задания множеств

- Множество букв в слове “геометрия”: $A = \{\text{г, е, о, м, т, р, и, я}\}$. (буква “е” два раза не повторяется).
- Множество первых пяти натуральных чисел: $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.
- Множество положительных действительных чисел:
 $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ ($\mathbb{R}_+$ есть множество тех действительных чисел x , которые удовлетворяют неравенству $x > 0$).
- Пусть $P(x)$ означает « x является столицей какого-то государства», A — множество городов Земли, тогда $C = \{x \in A \mid P(x)\}$ есть множество столиц Земли.

Примеры отношений между множествами

- $1 \in \{1, 2, 3\}$.
- $5 \notin \{1, 2, 3\}$.
- $\{1, 2\} \subset \{1, 2, 3\}$.
- $\mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}$.
- $\emptyset \in \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, $\{\emptyset\} \in \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.
- Пусть C — множество столиц Земли. Тогда Москва $\in C$, Орел $\notin C$, {Москва, Лондон} $\subset C$, {Кельн, Лондон} $\not\subset C$.

Операции над множествами

Пусть A и B — подмножества универсального множества U .

Определение

Объединением множеств A и B называют множество

$$A \cup B := \{x \in U \mid (x \in A) \vee (x \in B)\},$$

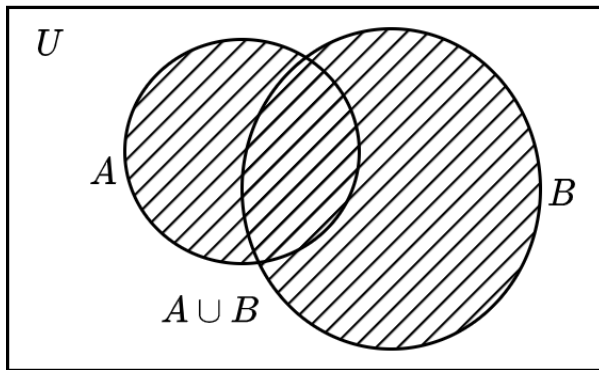
состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат **хотя бы одному** из множеств A , B .

Пример

Если $A = \{1, 2, 3, 4\}$, а $B = \{1, 2, 5, 6\}$, то

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Иллюстрация к объединению множеств:



Определение

Пересечением множеств A и B называют множество

$$A \cap B := \{x \in U \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\},$$

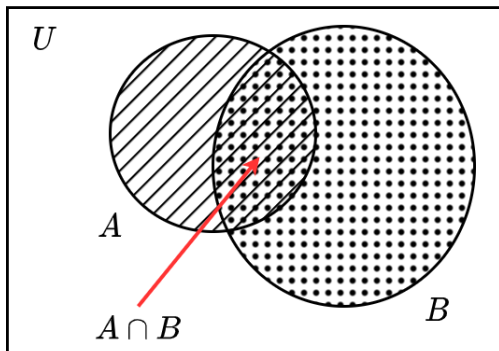
состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат как множеству A , так и множеству B .

Пример

Если $A = \{1, 2, 3, 4\}$, а $B = \{1, 2, 5, 6\}$, то

$$A \cap B = \{1, 2\}.$$

Иллюстрация к пересечению множеств:



Определение

Разностью множеств A и B называют множество

$$A \setminus B := \{x \in U \mid (x \in A) \wedge (x \notin B)\},$$

состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат множеству A , но не принадлежат множеству B .

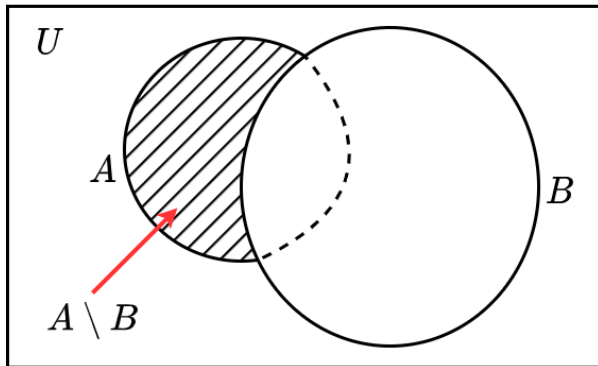
Пример

Если $A = \{1, 2, 3, 4\}$, а $B = \{1, 2, 5, 6\}$, то

$$A \setminus B = \{3, 4\},$$

$$B \setminus A = \{5, 6\}.$$

Иллюстрация к разности множеств:



Примеры на объединение, пересечение и разность

Пусть $A = (-1, 2]$, $B = [1, 4)$ Тогда

- $A \cup B = (-1, 4)$,
- $A \cap B = [1, 2]$,
- $A \setminus B = (-1, 1)$ и $B \setminus A = (2, 4)$.

Из произвольных множеств A , B можно образовать множество $\{A, B\}$ — **неупорядоченную пару**, а также множество (A, B) — **упорядоченную пару**, где имеется признак, выделяющий первый (т.е., A) и второй (т.е., B) элементы. Один из способов определения упорядоченной пары принадлежит К. Куратовскому:

$$(A, B) := \{\{A\}, \{A, B\}\}.$$

Пусть X и Y — множества.

Определение

Декартовым произведением множеств X и Y называется множество

$$X \times Y := \{(x, y) \mid (x \in X) \wedge (y \in Y)\},$$

образованное всеми упорядоченными парами (x, y) , первый элемент которых принадлежит X , а второй — принадлежит Y .

Примеры на декартово произведение

- $\mathbb{R}^2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \mid (x \in \mathbb{R}) \wedge (y \in \mathbb{R})\}$ — плоскость.
- $[0, 1]^2 := [0, 1] \times [0, 1]$ — квадрат с единичной стороной.
- Если $A = \{1, 2\}$, $B = \{b\}$, то $A \times B = \{(1, b), (2, b)\}$ и $B \times A = \{(b, 1), (b, 2)\}$.

Итог

Новые термины:

- Множество.
- Равные множества.
- Подмножество.
- Пустое множество.
- Универсальное множество.
- Объединение множеств.
- Пересечение множеств.
- Разность множеств.
- Упорядоченная пара.
- Декартово произведение множеств.

На дом:

- По учебнику Кудрявцева прочитать раздел 1.1 (стр. 5–7).
- Составить в письменном виде словарь (гlossарий) по прочитанному: «термин — его определение» (в порядке появления в тексте).
- Выучить определения. Если возникли трудности — прийти на консультацию.
- Показать словарики преподавателям по МА, УПСР, СТР.

!!!Удачи!!!