Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана
Факультет “Фундаментальные науки”
Кафедра “Высшая математика”

Интегралы и дифференциальные уравнения

Модуль 2

Определенные и несобственные интегралы

Лекция 2.6

для ГУИМЦ, 2025

к.ф.-м.н. Емгушева Г.П.

Несобственный интеграл второго рода

Несобственный интеграл второго рода

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на полуинтервале $[a, b)$

Несобственный интеграл второго рода

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на полуинтервале $[a, b)$ и неограниченна слева от точки b

Несобственный интеграл второго рода

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на полуинтервале $[a, b)$ и неограниченна слева от точки b:

$$\lim_{x \to b-0} f(x) = \infty.$$

Несобственный интеграл второго рода

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на полуинтервале $[a, b)$ и неограниченна слева от точки b:

$$\lim_{x \to b-0} f(x) = \infty.$$

Такая точка b называется **особой точкой** функции $f(x)$.

Определение

Несобственным интегралом второго рода на полуинтервале $[a, b)$ от функции $f(x)$, неограниченной слева от точки b, называется предел

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx.$$

Определение

Несобственным интегралом второго рода на полуинтервале $[a, b)$ от функции $f(x)$, неограниченной слева от точки b, называется предел

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx.$$

Обозначение: $\int\limits_a^b f(x)dx$.

Замечание

Несобственный интеграл второго рода

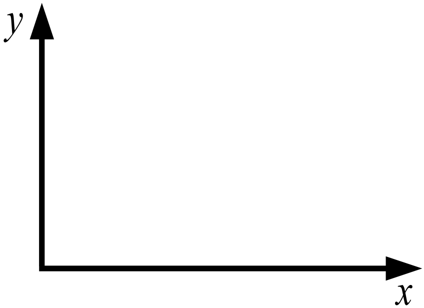
Замечание

Несобственный интеграл второго рода часто называют **интегралом от неограниченной функции**.

Геометрический смысл:

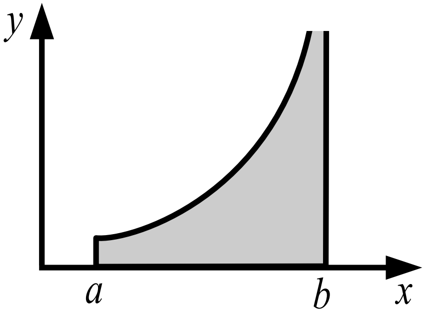
Несобственный интеграл второго рода

Геометрический смысл:



Несобственный интеграл второго рода

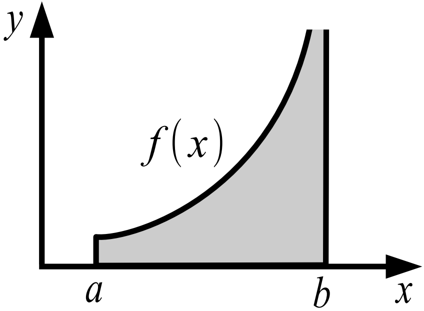
Геометрический смысл:



Рассмотрим бесконечно высокую справа криволинейную трапецию,

Несобственный интеграл второго рода

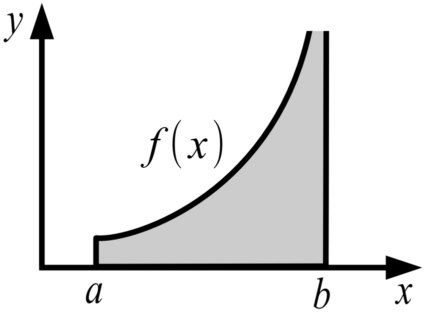
Геометрический смысл:



Рассмотрим бесконечно высокую справа криволинейную трапецию, ограниченную на полуинтервале $[a, b)$ сверху графиком функции $f(x)$ и снизу осью Ox.

Несобственный интеграл второго рода

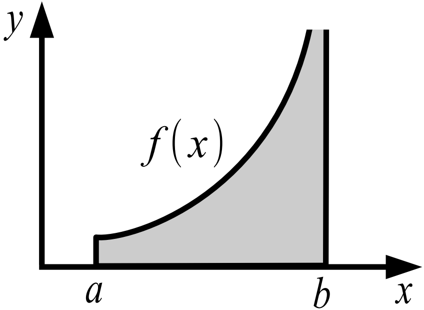
Геометрический смысл:



Трапеция ограничена слева прямой $x = a$,

Несобственный интеграл второго рода

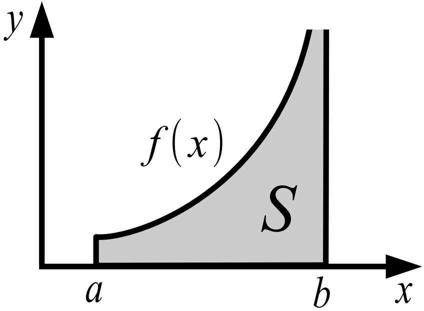
Геометрический смысл:



Трапеция ограничена слева прямой $x = a$, справа – прямой $x = b$, которая также служит вертикальной асимптотой графика функции $f(x)$.

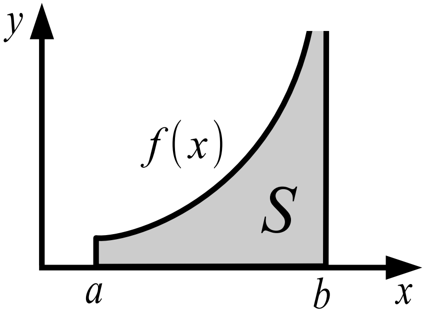
Несобственный интеграл второго рода

Геометрический смысл:



Площадь S этой трапеции численно равна несобственному интегралу второго рода от функции $f(x)$ на полуинтервале $[a, b)$

Геометрический смысл:



$$S = \int_a^b f(x)dx.$$

Несобственный интеграл второго рода

Аналогично, для функции $f(x)$, непрерывной на полуинтервале $(a, b]$ и неограниченной справа от точки a:

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = \infty,$$

Несобственный интеграл второго рода

Аналогично, для функции $f(x)$, непрерывной на полуинтервале $(a, b]$ и неограниченной справа от точки a:

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = \infty,$$

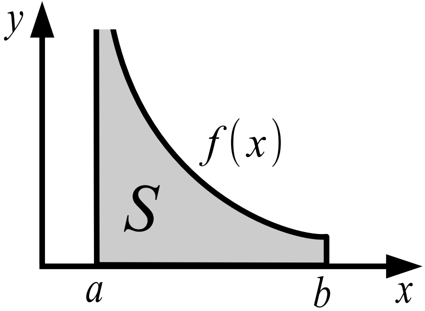
несобственный интеграл второго рода определяется согласно равенству:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int\limits_{a+\varepsilon}^b f(x)dx.$$

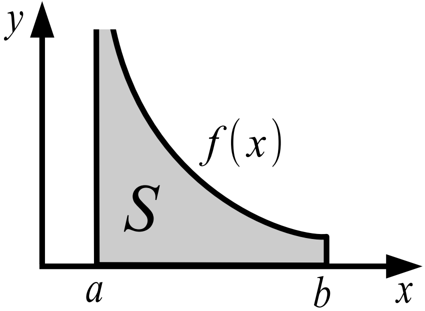
Несобственный интеграл второго рода

Геометрически этот интеграл для функции $f(x) > 0$ представляет собой площадь бесконечно высокой слева криволинейной трапеции.

Геометрически этот интеграл для функции $f(x) > 0$ представляет собой площадь бесконечно высокой слева криволинейной трапеции.



Геометрически этот интеграл для функции $f(x) > 0$ представляет собой площадь бесконечно высокой слева криволинейной трапеции.



Точка a является особой точкой функции $f(x)$.

Несобственный интеграл второго рода

Если функция $f(x)$ непрерывна во всех точках отрезка $[a, b]$ за исключением внутренней точки $c \in (a, b)$,

Несобственный интеграл второго рода

Если функция $f(x)$ непрерывна во всех точках отрезка $[a, b]$ за исключением внутренней точки $c \in (a, b)$, в окрестности которой она не ограничена

Несобственный интеграл второго рода

Если функция $f(x)$ непрерывна во всех точках отрезка $[a, b]$ за исключением внутренней точки $c \in (a, b)$, в окрестности которой она не ограничена:

$$\lim_{x \to c+0} f(x) = \infty \text{ и } \lim_{x \to c-0} f(x) = \infty,$$

Если функция $f(x)$ непрерывна во всех точках отрезка $[a, b]$ за исключением внутренней точки $c \in (a, b)$, в окрестности которой она не ограничена:

$$\lim_{x \to c+0} f(x) = \infty \text{ и } \lim_{x \to c-0} f(x) = \infty,$$

то несобственный интеграл второго рода по отрезку $[a, b]$ определяется как сумма двух несобственных интегралов по полуинтервалам $[a, c)$ и $(c, b]$

Несобственный интеграл второго рода

то несобственный интеграл второго рода по отрезку $[a, b]$ определяется как сумма двух несобственных интегралов по полуинтервалам $[a, c)$ и $(c, b]$

Несобственный интеграл второго рода

то несобственный интеграл второго рода по отрезку $[a, b]$ определяется как сумма двух несобственных интегралов по полуинтервалам $[a, c)$ и $(c, b]$

Несобственный интеграл второго рода

то несобственный интеграл второго рода по отрезку $[a, b]$ определяется как сумма двух несобственных интегралов по полуинтервалам $[a, c)$ и $(c, b]$

Несобственный интеграл второго рода

то несобственный интеграл второго рода по отрезку $[a, b]$ определяется как сумма двух несобственных интегралов по полуинтервалам $[a, c)$ и $(c, b]$

то несобственный интеграл второго рода по отрезку $[a, b]$ определяется как сумма двух несобственных интегралов по полуинтервалам $[a, c)$ и $(c, b]$

Несобственный интеграл второго рода

то несобственный интеграл второго рода по отрезку $[a, b]$ определяется как сумма двух несобственных интегралов по полуинтервалам $[a, c)$ и $(c, b]$:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

то несобственный интеграл второго рода по отрезку $[a, b]$ определяется как сумма двух несобственных интегралов по полуинтервалам $[a, c)$ и $(c, b]$:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx =$$

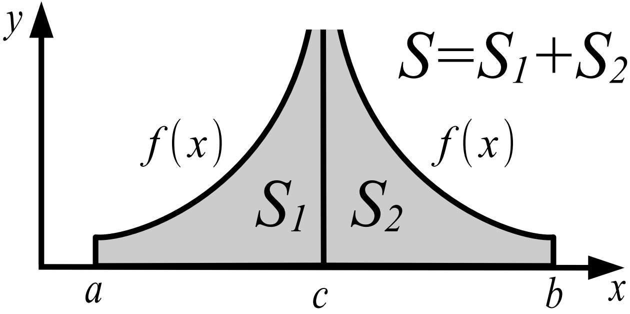
$$= \lim_{\varepsilon_1 \to 0+} \int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx + \lim_{\varepsilon_2 \to 0+} \int_{c+\varepsilon_2}^b f(x)dx.$$

Несобственный интеграл второго рода

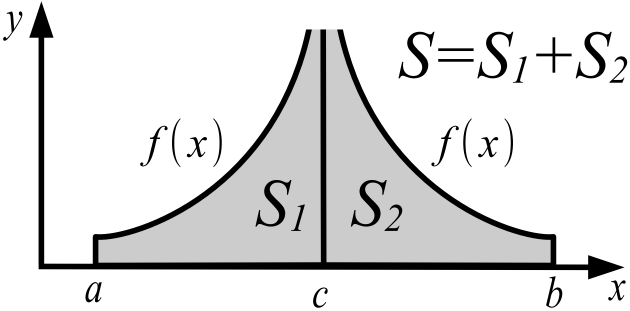
Геометрически такой интеграл для функции $f(x) > 0$ представляет собой сумму площадей двух примыкающих друг к другу бесконечно высоких криволинейных трапеций.

Несобственный интеграл второго рода

Геометрически такой интеграл для функции $f(x) > 0$ представляет собой сумму площадей двух примыкающих друг к другу бесконечно высоких криволинейных трапеций.



Геометрически такой интеграл для функции $f(x) > 0$ представляет собой сумму площадей двух примыкающих друг к другу бесконечно высоких криволинейных трапеций.



Точка c является особой точкой функции $f(x)$.

Пример:

Пример:

Рассмотрим интеграл $\int\limits_a^b \frac{dx}{(x-a)^2}$.

Пример:

Рассмотрим интеграл $\int\limits_a^b \frac{dx}{(x-a)^2}$.

Точка a является особой для подынтегральной функции
$$f(x) = \frac{1}{(x-a)^2},$$

Несобственный интеграл второго рода

Пример:

Рассмотрим интеграл $\int\limits_a^b \frac{dx}{(x-a)^2}$.

Точка a является особой для подынтегральной функции

$$f(x) = \frac{1}{(x-a)^2},$$

так как

$$\lim_{\varepsilon \to a+0} \frac{1}{(x-a)^2} = +\infty,$$

Несобственный интеграл второго рода

Пример:

Рассмотрим интеграл $\int\limits_a^b \frac{dx}{(x-a)^2}$.

Точка a является особой для подынтегральной функции

$$f(x) = \frac{1}{(x-a)^2},$$

так как

$$\lim_{\varepsilon \to a+0} \frac{1}{(x-a)^2} = +\infty,$$

а значит, исходный интеграл является несобственным.

Пример:

Вычислим несобственный интеграл

по определению:

Несобственный интеграл второго рода

Пример:

Вычислим несобственный интеграл

по определению:

$$\int\limits_a^b \frac{dx}{(x-a)^2}$$

Несобственный интеграл второго рода

Пример:

Вычислим несобственный интеграл

по определению:

$$\int\limits_a^b \frac{dx}{(x-a)^2} = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int\limits_{a+\varepsilon}^b \frac{dx}{(x-a)^2}$$

Несобственный интеграл второго рода

Пример:

Вычислим несобственный интеграл

по определению:

$$\int\limits_a^b \frac{dx}{(x-a)^2} = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int\limits_{a+\varepsilon}^b \frac{dx}{(x-a)^2} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0+} \left(-\frac{1}{x-a}\right)\Bigg|_{a+\varepsilon}^{b}$$

Пример:

Вычислим несобственный интеграл

по определению:

$$\int\limits_a^b \frac{dx}{(x-a)^2} = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int\limits_{a+\varepsilon}^b \frac{dx}{(x-a)^2} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0+} \left(-\frac{1}{x-a}\right)\Bigg|_{a+\varepsilon}^{b} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0+} \left(-\frac{1}{b-a} + \frac{1}{\varepsilon}\right)$$

Несобственный интеграл второго рода

Пример:

Вычислим несобственный интеграл по определению:

$$\int\limits_a^b \frac{dx}{(x-a)^2} = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int\limits_{a+\varepsilon}^b \frac{dx}{(x-a)^2} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0+} \left(-\frac{1}{x-a}\right)\Bigg|_{a+\varepsilon}^{b} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0+} \left(-\frac{1}{b-a} + \frac{1}{\varepsilon}\right) = +\infty.$$

Несобственный интеграл второго рода

Формула Ньютона-Лейбница:

1. Если $F(x)$ – произвольная первообразная функции $f(x)$ на полуинтервале $[a, b)$ и b – особая точка функции $f(x)$,

Формула Ньютона-Лейбница:

1. Если $F(x)$ – произвольная первообразная функции $f(x)$ на полуинтервале $[a, b)$ и b – особая точка функции $f(x)$, то

Несобственный интеграл второго рода

Формула Ньютона-Лейбница:

1. Если $F(x)$ – произвольная первообразная функции $f(x)$ на полуинтервале $[a, b)$ и b – особая точка функции $f(x)$, то

$$\int_a^b f(x)dx$$

Несобственный интеграл второго рода

Формула Ньютона-Лейбница:

1. Если $F(x)$ – произвольная первообразная функции $f(x)$ на полуинтервале $[a, b)$ и b – особая точка функции $f(x)$, то

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^{b-0}$$

Несобственный интеграл второго рода

Формула Ньютона-Лейбница:

1. Если $F(x)$ – произвольная первообразная функции $f(x)$ на полуинтервале $[a, b)$ и b – особая точка функции $f(x)$, то

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^{b-0} = \lim_{x \to b-0} F(x) - F(a).$$

Формула Ньютона-Лейбница:

2. Если $F(x)$ – произвольная первообразная функции $f(x)$ на полуинтервале $(a, b]$ и a – особая точка функции $f(x)$,

Несобственный интеграл второго рода

Формула Ньютона-Лейбница:

2. Если $F(x)$ – произвольная первообразная функции $f(x)$ на полуинтервале $(a, b]$ и a – особая точка функции $f(x)$, то

Формула Ньютона-Лейбница:

2. Если $F(x)$ – произвольная первообразная функции $f(x)$ на полуинтервале $(a, b]$ и a – особая точка функции $f(x)$, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx$$

Несобственный интеграл второго рода

Формула Ньютона-Лейбница:

2. Если $F(x)$ – произвольная первообразная функции $f(x)$ на полуинтервале $(a, b]$ и a – особая точка функции $f(x)$, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_{a+0}^{b}$$

Формула Ньютона-Лейбница:

2. Если $F(x)$ – произвольная первообразная функции $f(x)$ на полуинтервале $(a, b]$ и a – особая точка функции $f(x)$, то

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_{a+0}^{b} = F(b) - \lim_{x \to a+0} F(x).$$

Сходимость

Сходимость

Определение
Если несобственный интеграл второго рода существует и равен конечному числу, то он называется **сходящимся**. В противном случае он называется **расходящимся**.

Сходимость

Рассмотрим признаки сравнения несобственных интегралов второго рода с **неотрицательной** подынтегральной функцией, позволяющие устанавливать сходимость интегралов, не вычисляя их.

1. Признак сходимости

1. Признак сходимости

Если

1. Признак сходимости

Если

$\forall x \in [a, b)\ 0 \le f(x) \le g(x)$,

1. Признак сходимости

Если

$\forall x \in [a, b)\ 0 \leq f(x) \leq g(x)$,

точка b – особая точка функций $f(x)$ и $g(x)$,

1. Признак сходимости

Если

$\forall x \in [a, b)\ 0 \leq f(x) \leq g(x)$,

точка b – особая точка функций $f(x)$ и $g(x)$,

при этом $\int\limits_a^b g(x)dx$ сходится,

1. Признак сходимости

Если

$\forall x \in [a, b)\ 0 \leq f(x) \leq g(x)$,

точка b – особая точка функций $f(x)$ и $g(x)$,

при этом $\int\limits_a^b g(x)dx$ сходится,

то $\int\limits_a^b f(x)dx$ также сходится.

2. Признак расходимости

2. Признак расходимости

Если

2. Признак расходимости

Если

$\forall x \in [a, b)\ f(x) \geq g(x) \geq 0,$

2. Признак расходимости

Если

$\forall x \in [a, b)\ f(x) \geq g(x) \geq 0,$

точка b – особая точка функций $f(x)$ и $g(x)$,

2. Признак расходимости

Если

$\forall x \in [a, b)\ f(x) \geq g(x) \geq 0$,

точка b – особая точка функций $f(x)$ и $g(x)$,

при этом $\int\limits_a^b g(x)dx$ расходится,

2. Признак расходимости

Если

$\forall x \in [a, b)\ f(x) \geq g(x) \geq 0$,

точка b – особая точка функций $f(x)$ и $g(x)$,

при этом $\int\limits_a^b g(x)dx$ расходится,

то $\int\limits_a^b f(x)dx$ также расходится.

Сходимость

3. Предельный признак сравнения

3. Предельный признак сравнения

Если

3. Предельный признак сравнения

Если

$$\lim_{x \to b-0} \frac{f(x)}{g(x)} = K,\ 0 < K < +\infty,$$

Сходимость

3. Предельный признак сравнения

Если

$$\lim_{x \to b-0} \frac{f(x)}{g(x)} = K,\ 0 < K < +\infty,$$

$$\forall x \in [a, b)\ f(x) \geq 0,\ g(x) > 0,$$

Сходимость

3. Предельный признак сравнения

Если

$$\lim_{x \to b-0} \frac{f(x)}{g(x)} = K,\ 0 < K < +\infty,$$

$\forall x \in [a, b)\ f(x) \geq 0,\ g(x) > 0,$

точка b – особая точка функций $f(x)$ и $g(x)$,

3. Предельный признак сравнения

Если

$$\lim_{x\to b-0} \frac{f(x)}{g(x)} = K,\ 0 < K < +\infty,$$

$\forall x \in [a, b)\ f(x) \geq 0,\ g(x) > 0,$

точка b – особая точка функций $f(x)$ и $g(x)$,

то интегралы $\int\limits_a^b f(x)dx$ и $\int\limits_a^b g(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно.

Сходимость

Замечание

Сходимость

Замечание

Данные признаки сравнения справедливы и для случая, когда особой точкой является точка a.

В качестве **эталонных** несобственных интегралов второго рода, с которыми производится сравнение, используются интегралы вида

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^p}, \int_a^b \frac{dx}{(b-x)^p}, \; p > 0,$$

Сходимость

В качестве **эталонных** несобственных интегралов второго рода, с которыми производится сравнение, используются интегралы вида

$$\int\limits_a^b \frac{dx}{(x-a)^p}, \int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^p}, \ p > 0,$$

которые

Сходимость

В качестве **эталонных** несобственных интегралов второго рода, с которыми производится сравнение, используются интегралы вида

$$\int\limits_a^b \frac{dx}{(x-a)^p}, \int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^p}, \ p > 0,$$

которые

сходятся при $p < 1$,

Сходимость

В качестве **эталонных** несобственных интегралов второго рода, с которыми производится сравнение, используются интегралы вида

$$\int\limits_a^b \frac{dx}{(x-a)^p}, \int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^p}, \; p > 0,$$

которые

сходятся при $p < 1$,

расходятся при $p \geq 1$.

Сходимость

В рассматриваемых далее несобственных интегралах особой точкой может быть как точка a, так и точка b.

Определение

Несобственный интеграл второго рода

$$\int\limits_a^b f(x)dx$$

называется **абсолютно сходящимся**, если сходится интеграл

$$\int\limits_a^b |f(x)|dx.$$

Теорема (об абсолютной сходимости)

Сходимость

Теорема (об абсолютной сходимости)

Если несобственный интеграл второго рода $\int\limits_a^b |f(x)|dx$ сходится, то $\int\limits_a^b f(x)dx$ также сходится.

Определение

Несобственный интеграл второго рода

$$\int\limits_a^b f(x)dx$$

называется **условно сходящимся**, если он сам сходится, а интеграл

$$\int\limits_a^b |f(x)|dx$$

расходится.

Главное значение несобственного интеграла

Главное значение несобственного интеграла

Рассмотрим несобственный интеграл первого рода по бесконечному промежутку

Главное значение несобственного интеграла

Рассмотрим несобственный интеграл первого рода по бесконечному промежутку

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

Рассмотрим несобственный интеграл первого рода по бесконечному промежутку

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int\limits_{c}^{+\infty} f(x)dx$$

Главное значение несобственного интеграла

Рассмотрим несобственный интеграл первого рода по бесконечному промежутку

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon_1 \to +\infty} \int_{-\varepsilon_1}^{c} f(x)dx + \lim_{\varepsilon_2 \to +\infty} \int_{c}^{\varepsilon_2} f(x)dx$$

Главное значение несобственного интеграла

и несобственный интеграл второго рода с особой точкой c внутри отрезка $[a, b]$

и несобственный интеграл второго рода с особой точкой c внутри отрезка $[a, b]$

$$\int_a^b f(x)dx$$

Главное значение несобственного интеграла

и несобственный интеграл второго рода с особой точкой c внутри отрезка $[a, b]$

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$$

Главное значение несобственного интеграла

и несобственный интеграл второго рода с особой точкой c внутри отрезка $[a, b]$

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon_1 \to 0+} \int\limits_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx + \lim_{\varepsilon_2 \to 0+} \int\limits_{c+\varepsilon_2}^b f(x)dx.$$

Главное значение несобственного интеграла

В обоих интегралах пределы по переменным ε_1 и ε_2 вычисляются независимо друг от друга.

Главное значение несобственного интеграла

В обоих интегралах пределы по переменным ε_1 и ε_2 вычисляются независимо друг от друга. Положим $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$.

Главное значение несобственного интеграла

В обоих интегралах пределы по переменным ε_1 и ε_2 вычисляются независимо друг от друга.
Положим $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$.
Это позволяет в каждом интеграле формально переписать сумму двух пределов как предел суммы.

Главное значение несобственного интеграла

Это позволяет в каждом интеграле формально переписать сумму двух пределов как предел суммы.

Главное значение несобственного интеграла

Это позволяет в каждом интеграле формально переписать сумму двух пределов как предел суммы.

Это позволяет в каждом интеграле формально переписать сумму двух пределов как предел суммы.

Главное значение несобственного интеграла

Это позволяет в каждом интеграле формально переписать сумму двух пределов как предел суммы.

Главное значение несобственного интеграла

Это позволяет в каждом интеграле формально переписать сумму двух пределов как предел суммы.

$$\lim_{\varepsilon_1 \to (\cdot)} \ldots + \lim_{\varepsilon_2 \to (\cdot)} \ldots$$

Главное значение несобственного интеграла

Это позволяет в каждом интеграле формально переписать сумму двух пределов как предел суммы.

$$\lim_{\varepsilon_1 \to (\cdot)} \ldots + \lim_{\varepsilon_2 \to (\cdot)} \ldots$$

$$\downarrow$$

Главное значение несобственного интеграла

Это позволяет в каждом интеграле формально переписать сумму двух пределов как предел суммы.

$$\lim_{\varepsilon_1 \to (\cdot)} \ldots + \lim_{\varepsilon_2 \to (\cdot)} \ldots$$

$$\downarrow$$

$$\lim_{\varepsilon \to (\cdot)} \ldots + \lim_{\varepsilon \to (\cdot)} \ldots$$

Главное значение несобственного интеграла

Это позволяет в каждом интеграле формально переписать сумму двух пределов как предел суммы.

$$\lim_{\varepsilon_1\to(\cdot)} \ldots + \lim_{\varepsilon_2\to(\cdot)} \ldots$$

$$\downarrow$$

$$\lim_{\varepsilon\to(\cdot)} \ldots + \lim_{\varepsilon\to(\cdot)} \ldots$$

$$\downarrow$$

Главное значение несобственного интеграла

Это позволяет в каждом интеграле формально переписать сумму двух пределов как предел суммы.

$$\lim_{\varepsilon_1 \to (\cdot)} \ldots + \lim_{\varepsilon_2 \to (\cdot)} \ldots$$

$$\downarrow$$

$$\lim_{\varepsilon \to (\cdot)} \ldots + \lim_{\varepsilon \to (\cdot)} \ldots$$

$$\downarrow$$

$$\lim_{\varepsilon \to (\cdot)} \left(\ldots + \ldots \right)$$

Главное значение несобственного интеграла

$$\lim_{\varepsilon \to (\cdot)} (\ldots + \ldots)$$

Главное значение несобственного интеграла

$$\lim_{\varepsilon \to (\cdot)} (\ldots + \ldots)$$

Главное значение несобственного интеграла

$$\lim_{\varepsilon \to (\cdot)} (\ldots + \ldots)$$

Главное значение несобственного интеграла

$$\lim_{\varepsilon \to (\cdot)} (\ldots + \ldots)$$

Главное значение несобственного интеграла

$$\lim_{\varepsilon \to (\cdot)} (\ldots + \ldots)$$

Главное значение несобственного интеграла

$$\lim_{\varepsilon \to (\cdot)} (\ldots + \ldots)$$

Главное значение несобственного интеграла

$$\lim_{\varepsilon \to (\cdot)} (\ldots + \ldots)$$

Значение получающегося предела называется **главным значением несобственного интеграла** и обозначается $V.p.$

1. Главное значение несобственного интеграла первого рода

1. Главное значение несобственного интеграла первого рода

$$V.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

1. Главное значение несобственного интеграла первого рода

$$V.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to +\infty} \left(\int\limits_{-\varepsilon}^{c} f(x)dx + \int\limits_{c}^{\varepsilon} f(x)dx \right)$$

1. Главное значение несобственного интеграла первого рода

$$V.p.\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to+\infty}\left(\int\limits_{-\varepsilon}^{c} f(x)dx + \int\limits_{c}^{\varepsilon} f(x)dx\right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to+\infty}\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x)dx.$$

2. Главное значение несобственного интеграла второго рода

Главное значение несобственного интеграла

2. Главное значение несобственного интеграла второго рода

$$V.p. \int\limits_a^b f(x)dx =$$

2. Главное значение несобственного интеграла второго рода

$$V.p.\int\limits_a^b f(x)dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0+}\left(\int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int\limits_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx\right).$$