Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана
Факультет “Фундаментальные науки”
Кафедра “Высшая математика”

Интегралы и дифференциальные уравнения

Модуль 2

Определенные и несобственные интегралы

Лекция 2.4

для ГУИМЦ, 2025

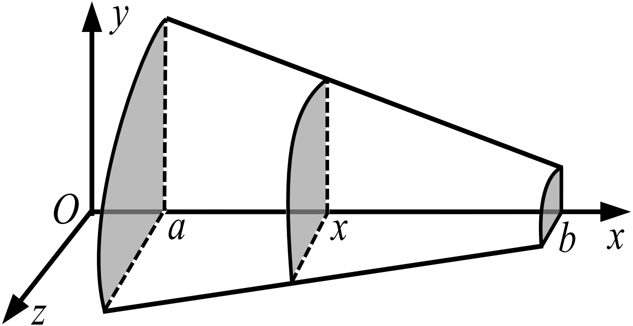
к.ф.-м.н. Емгушева Г.П.

Объем тела

1. Объем тела с известной площадью поперечного сечения.

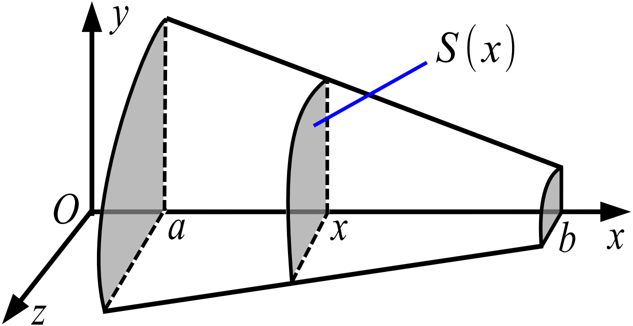
1. Объем тела с известной площадью поперечного сечения.

1. Объем тела с известной площадью поперечного сечения.



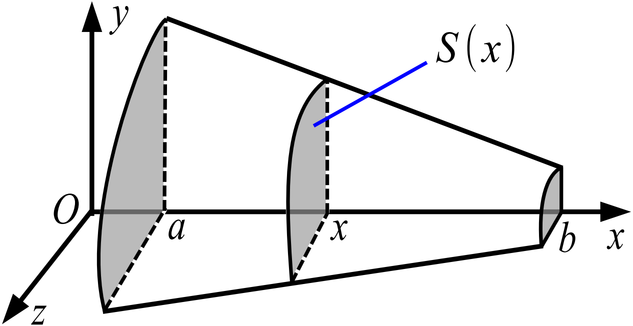
Пусть тело располагается вдоль оси Ox между двумя плоскостями $x = a$ и $x = b$, проходящими перпендикулярно оси Ox.

1. Объем тела с известной площадью поперечного сечения.



Для каждого $x \in [a, b]$ известна площадь $S(x)$ поперечного сечения тела.

1. Объем тела с известной площадью поперечного сечения.



Тогда объем этого тела вычисляется как

$$V = \int_a^b S(x)dx.$$

2. Объем тела вращения вокруг оси Ox.

Объем тела

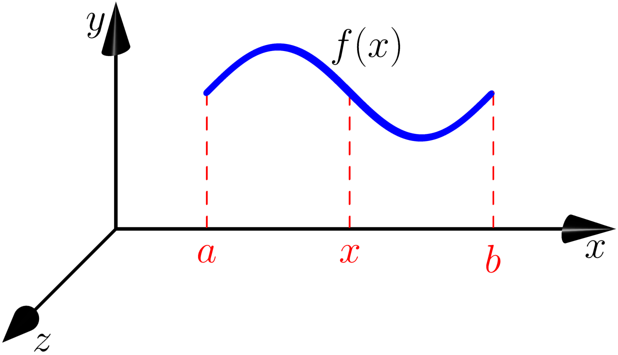
2. Объем тела вращения вокруг оси Ox.

Данное тело получается путем вращения вокруг оси Ox плоской фигуры, расположенной в плоскости Oxy

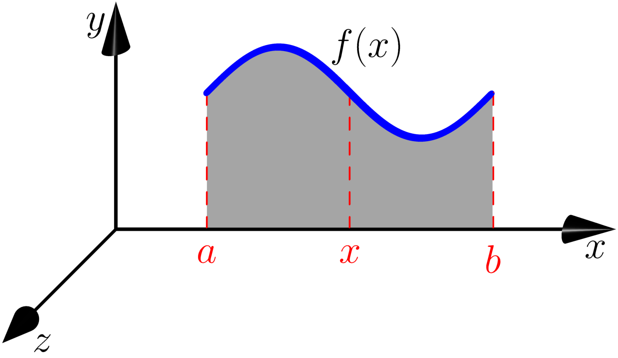
2. Объем тела вращения вокруг оси Ox.

Данное тело получается путем вращения вокруг оси Ox плоской фигуры, расположенной в плоскости Oxy и ограниченной осью Ox, вертикальными прямыми $x = a$, $x = b$ и графиком непрерывной **произвольной** функции $f(x)$.

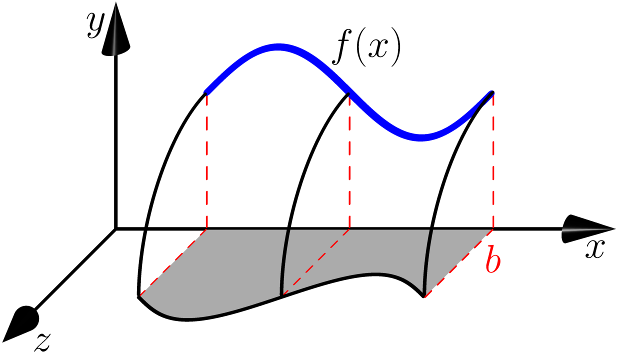
2. Объем тела вращения вокруг оси Ox.



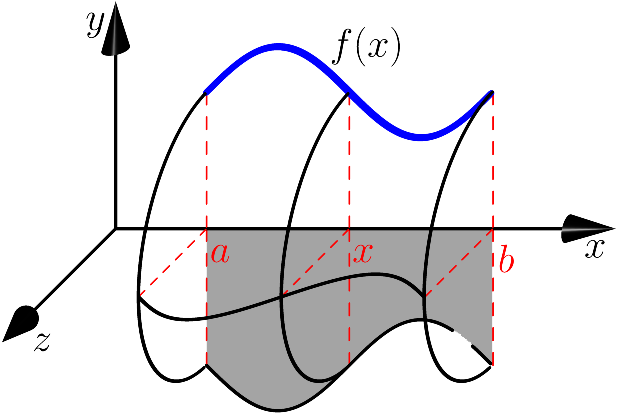
2. Объем тела вращения вокруг оси Ox.



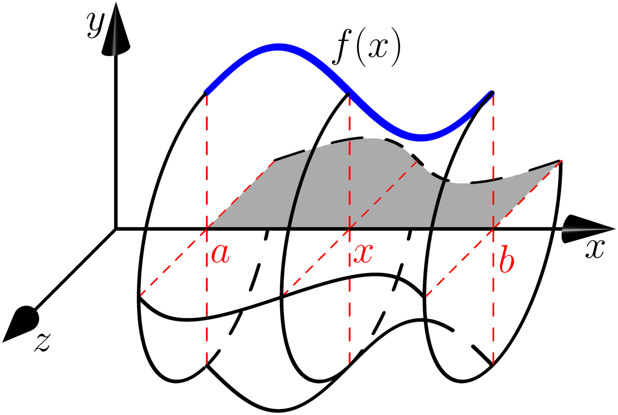
2. Объем тела вращения вокруг оси Ox.



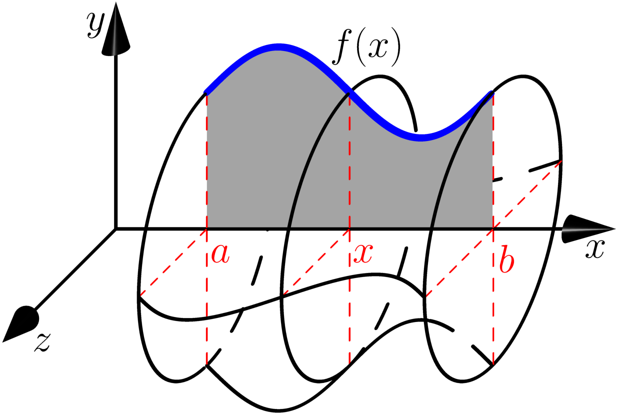
2. *Объем тела вращения вокруг оси* Ox.



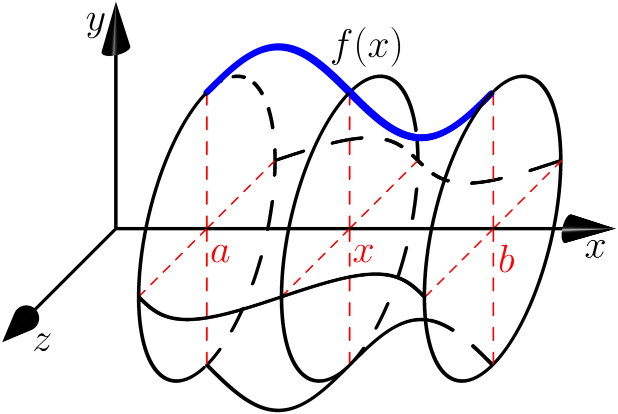
2. *Объем тела вращения вокруг оси* **Ox**.



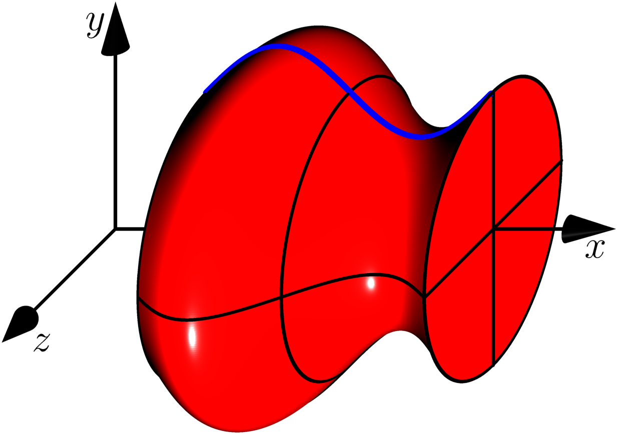
2. *Объем тела вращения вокруг оси* Ox.



2. Объем тела вращения вокруг оси **Ox**.



2. Объем тела вращения вокруг оси Ox.



2. Объем тела вращения вокруг оси Ox.

В этом случае поперечные сечения тела представляют собой круги радиуса $|f(x)|$ и площади $S(x) = \pi f^2(x)$.

2. Объем тела вращения вокруг оси Ox.

В этом случае поперечные сечения тела представляют собой круги радиуса $|f(x)|$ и площади $S(x) = \pi f^2(x)$.

Используя формулу объема тела с известной площадью поперечного сечения, получаем формулу для вычисления объема тела вращения вокруг оси Ox:

$$V_x = \pi \int_a^b f^2(x)dx.$$

Объем тела

2. Объем тела вращения вокруг оси Ox.

Пример:

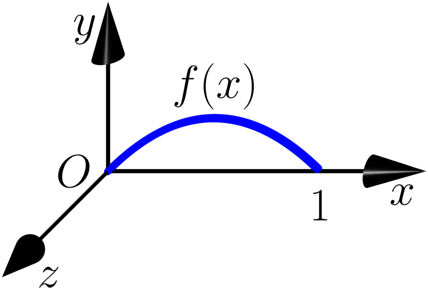
Объем тела

2. Объем тела вращения вокруг оси Ox.

Пример: Вычислить объем тела, получающегося в результате вращения графика функции $y = x(1 - x)$ вокруг оси Ox.

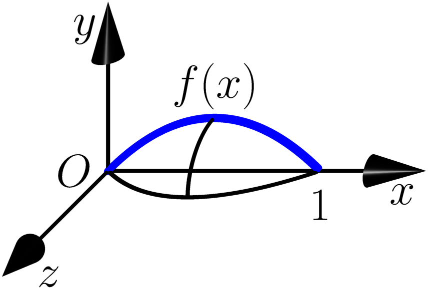
2. Объем тела вращения вокруг оси Ox.

Пример: Вычислить объем тела, получающегося в результате вращения графика функции $y = x(1-x)$ вокруг оси Ox.



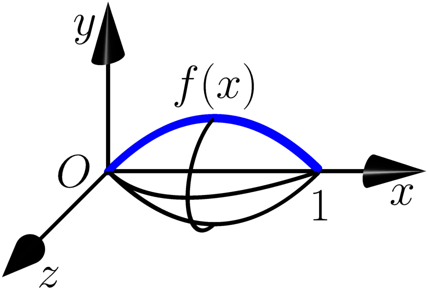
2. Объем тела вращения вокруг оси Ox.

Пример: Вычислить объем тела, получающегося в результате вращения графика функции $y = x(1 - x)$ вокруг оси Ox.



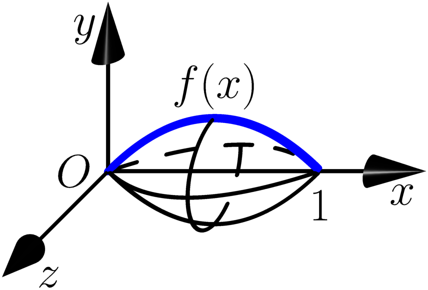
2. Объем тела вращения вокруг оси Ox.

Пример: Вычислить объем тела, получающегося в результате вращения графика функции $y = x(1 - x)$ вокруг оси Ox.



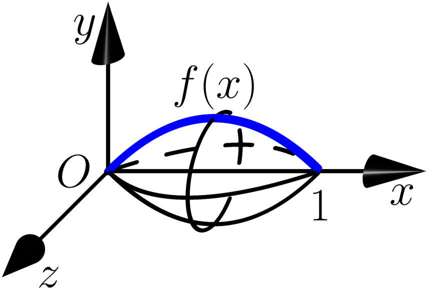
2. Объем тела вращения вокруг оси Ox.

Пример: Вычислить объем тела, получающегося в результате вращения графика функции $y = x(1 - x)$ вокруг оси Ox.



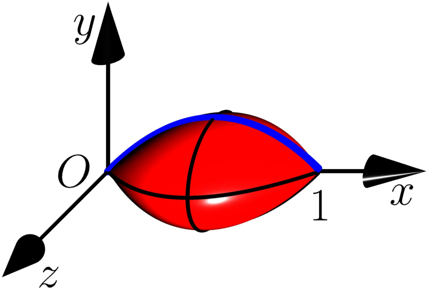
2. Объем тела вращения вокруг оси Ox.

Пример: Вычислить объем тела, получающегося в результате вращения графика функции $y = x(1 - x)$ вокруг оси Ox.



2. Объем тела вращения вокруг оси Ox.

Пример: Вычислить объем тела, получающегося в результате вращения графика функции $y = x(1-x)$ вокруг оси Ox.



2. Объем тела вращения вокруг оси Ox.

Пример: Вычислить объем тела, получающегося в результате вращения графика функции $y = x(1-x)$ вокруг оси Ox.

$$V_x = \pi \int_0^1 f^2(x)dx$$

Объем тела

2. Объем тела вращения вокруг оси Ox.

Пример: Вычислить объем тела, получающегося в результате вращения графика функции $y = x(1-x)$ вокруг оси Ox.

$$V_x = \pi \int\limits_0^1 f^2(x)dx = \pi \int\limits_0^1 x^2(1-x)^2dx$$

2. Объем тела вращения вокруг оси Ox.

Пример: Вычислить объем тела, получающегося в результате вращения графика функции $y = x(1-x)$ вокруг оси Ox.

$$V_x = \pi \int\limits_0^1 f^2(x)dx = \pi \int\limits_0^1 x^2(1-x)^2 dx =$$

$$= \pi \int\limits_0^1 x^2(1-2x+x^2)dx$$

2. Объем тела вращения вокруг оси Ox.

Пример: Вычислить объем тела, получающегося в результате вращения графика функции $y = x(1-x)$ вокруг оси Ox.

$$V_x = \pi \int_0^1 f^2(x)dx = \pi \int_0^1 x^2(1-x)^2 dx =$$

$$= \pi \int_0^1 x^2(1-2x+x^2)dx = \pi \int_0^1 (x^2-2x^3+x^4)dx$$

2. Объем тела вращения вокруг оси Ox.

Пример: Вычислить объем тела, получающегося в результате вращения графика функции $y = x(1-x)$ вокруг оси Ox.

$$V_x = \pi \int_0^1 f^2(x)dx = \pi \int_0^1 x^2(1-x)^2 dx =$$

$$= \pi \int_0^1 x^2(1-2x+x^2)dx = \pi \int_0^1 (x^2-2x^3+x^4)dx =$$

$$= \pi \left(\frac{x^3}{3} - 2\frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} \right) \Bigg|_0^1$$

2. Объем тела вращения вокруг оси Ox.

Пример: Вычислить объем тела, получающегося в результате вращения графика функции $y = x(1-x)$ вокруг оси Ox.

$$V_x = \pi \int_0^1 f^2(x)dx = \pi \int_0^1 x^2(1-x)^2 dx =$$

$$= \pi \int_0^1 x^2(1-2x+x^2)dx = \pi \int_0^1 (x^2-2x^3+x^4)dx =$$

$$= \pi \left(\frac{x^3}{3} - 2\frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} \right) \Bigg|_0^1 = \frac{\pi}{30}.$$

Объем тела

2. Объем тела вращения вокруг оси Ox.

Пусть тело получается путем вращения вокруг оси Ox плоской фигуры, расположенной в плоскости Oxy

2. Объем тела вращения вокруг оси Ox.

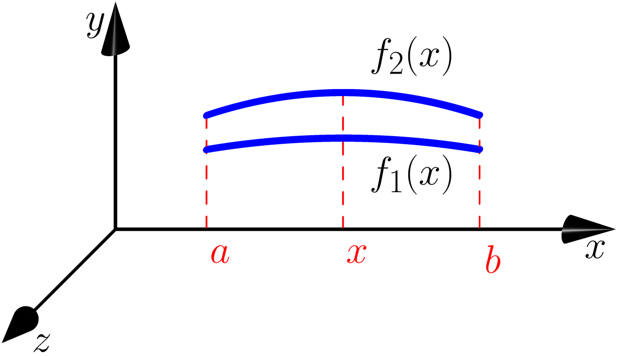
Пусть тело получается путем вращения вокруг оси Ox плоской фигуры, расположенной в плоскости Oxy и ограниченной вертикальными прямыми $x = a$, $x = b$, а также графиками непрерывных **неотрицательных** функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$,

Объем тела

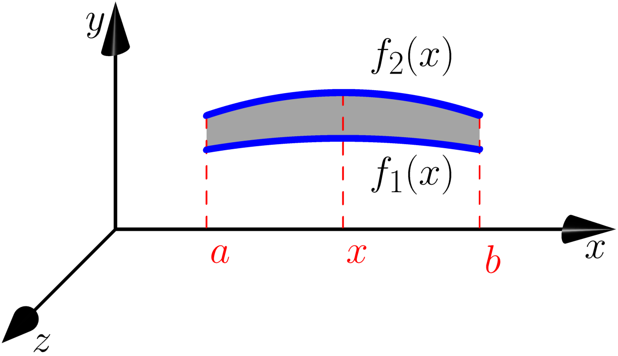
2. Объем тела вращения вокруг оси Ox.

Пусть тело получается путем вращения вокруг оси Ox плоской фигуры, расположенной в плоскости Oxy и ограниченной вертикальными прямыми $x = a$, $x = b$, а также графиками непрерывных **неотрицательных** функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$, причем $\forall x \in [a, b]$ $0 \leq f_1(x) \leq f_2(x)$.

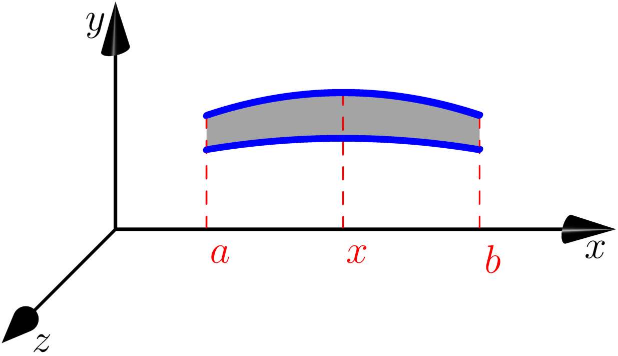
2. *Объем тела вращения вокруг оси* **Ox**.



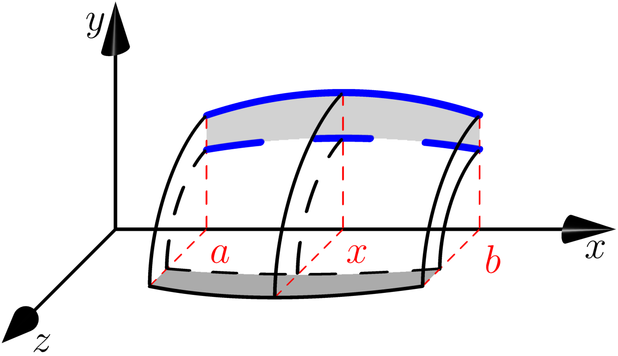
2. *Объем тела вращения вокруг оси* **Ox**.



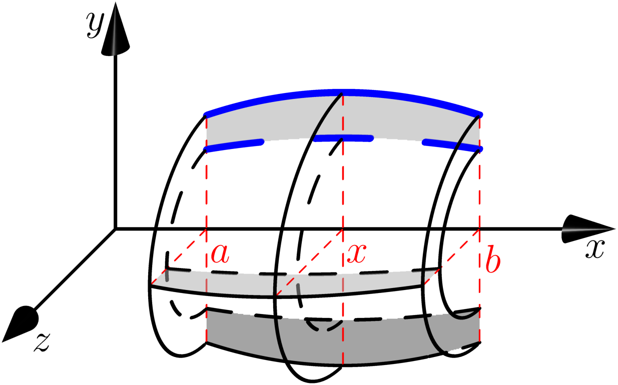
2. Объем тела вращения вокруг оси **Ox**.



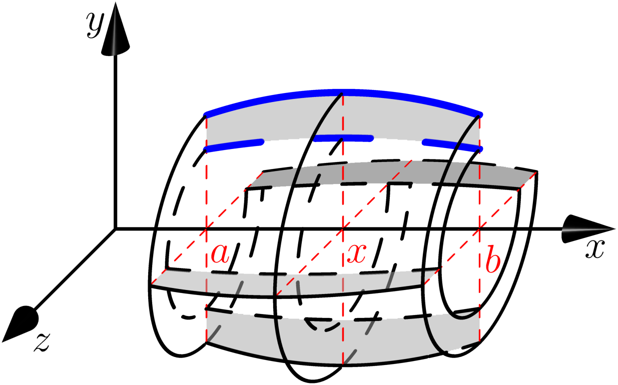
2. Объем тела вращения вокруг оси Ox.



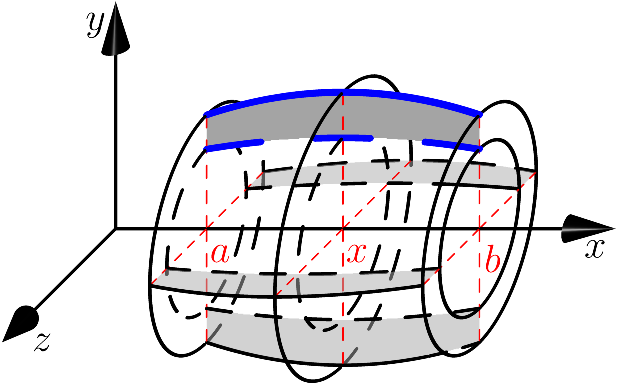
2. Объем тела вращения вокруг оси ***Ox***.



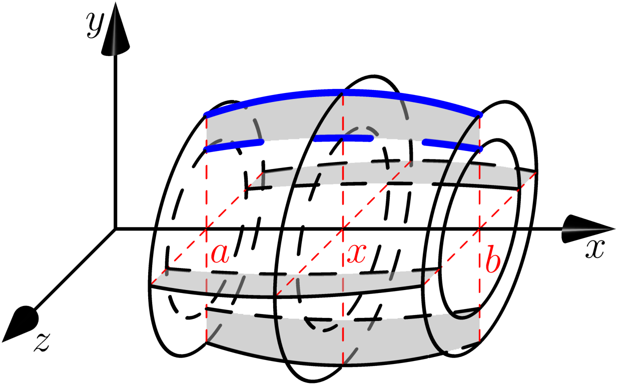
2. *Объем тела вращения вокруг оси* **Ox**.



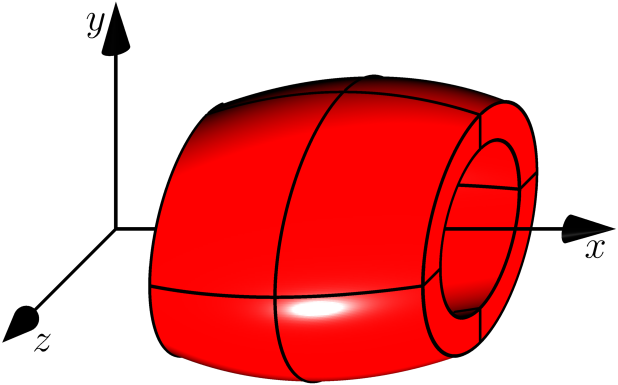
2. *Объем тела вращения вокруг оси* Ox.



2. *Объем тела вращения вокруг оси **Ox**.*



2. *Объем тела вращения вокруг оси* Ox.



2. Объем тела вращения вокруг оси Ox.

Данное тело имеет в центре сквозное отверстие,

2. Объем тела вращения вокруг оси Ox.

Данное тело имеет в центре сквозное отверстие, а его поперечные сечения представляют собой кольца

2. Объем тела вращения вокруг оси Ox.

Данное тело имеет в центре сквозное отверстие, а его поперечные сечения представляют собой кольца с площадью

$$S(x) = \pi f_2^2(x) - \pi f_1^2(x).$$

2. Объем тела вращения вокруг оси Ox.

Данное тело имеет в центре сквозное отверстие, а его поперечные сечения представляют собой кольца с площадью

$$S(x) = \pi f_2^2(x) - \pi f_1^2(x).$$

Зная площади поперечных сечений, получаем формулу для вычисления объема этого тела:

$$V_x = \pi \int_a^b (f_2^2(x) - f_1^2(x))dx.$$

3. Объем тела вращения вокруг оси Oy.

3. Объем тела вращения вокруг оси Oy.

Данное тело получается путем вращения вокруг оси Oy плоской фигуры, расположенной в плоскости Oxy

Объем тела

3. Объем тела вращения вокруг оси Oy.

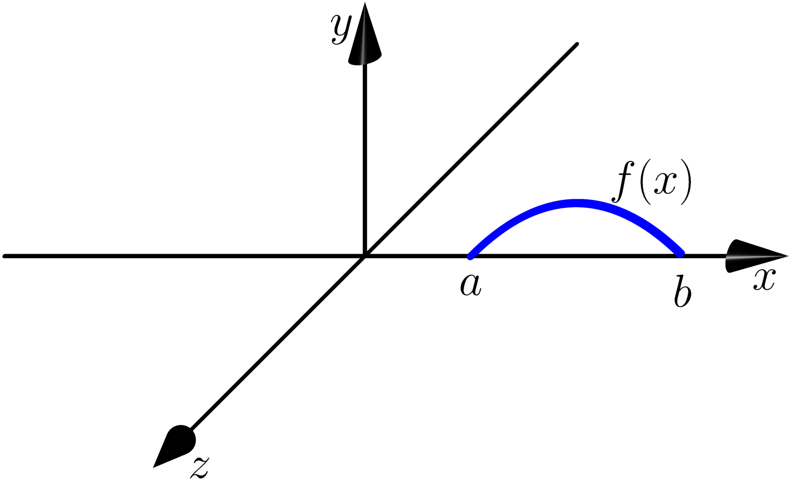
Данное тело получается путем вращения вокруг оси Oy плоской фигуры, расположенной в плоскости Oxy и ограниченной осью Ox, вертикальными прямыми $x = a$, $x = b$ и графиком непрерывной **произвольной** функции $f(x)$,

Объем тела

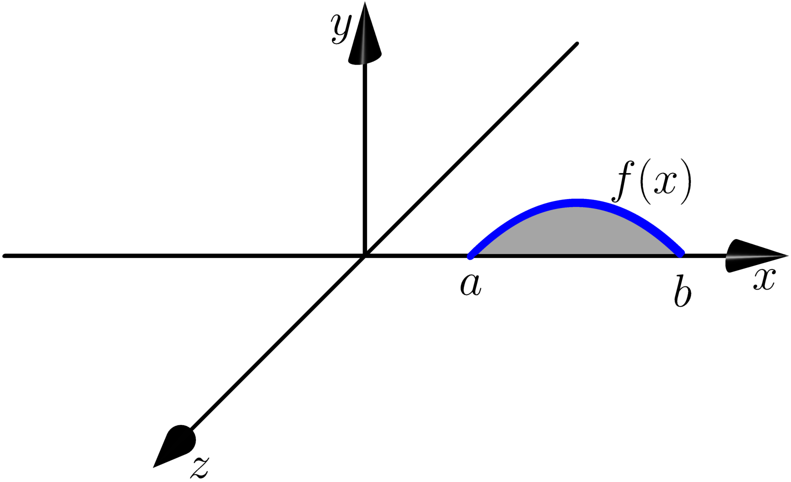
3. Объем тела вращения вокруг оси Oy.

Данное тело получается путем вращения вокруг оси Oy плоской фигуры, расположенной в плоскости Oxy и ограниченной осью Ox, вертикальными прямыми $x = a$, $x = b$ и графиком непрерывной **произвольной** функции $f(x)$, причем $a \geq 0$ – плоская фигура должна целиком располагаться правее начала координат.

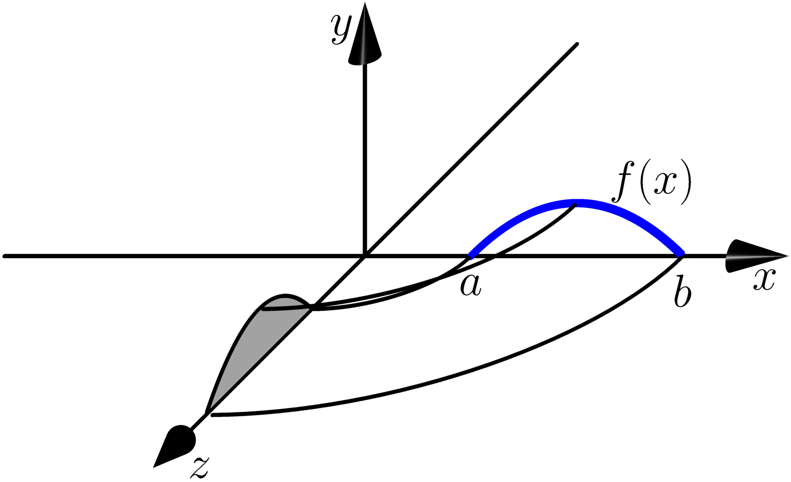
3. Объем тела вращения вокруг оси Oy.



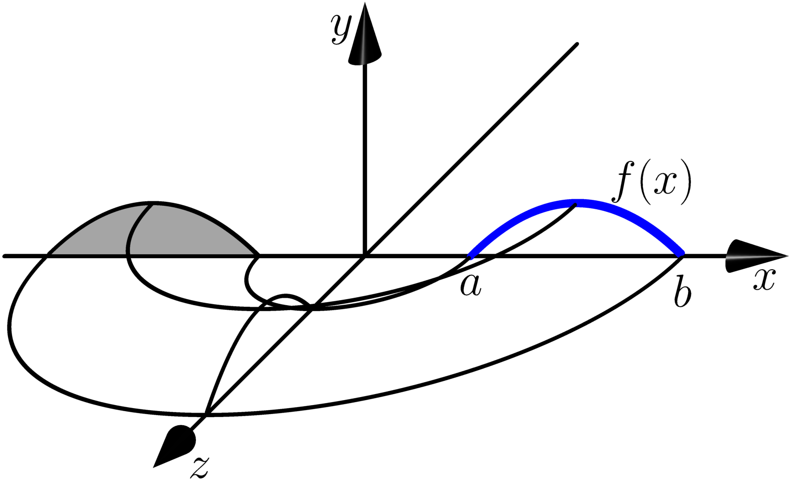
3. Объем тела вращения вокруг оси Oy.



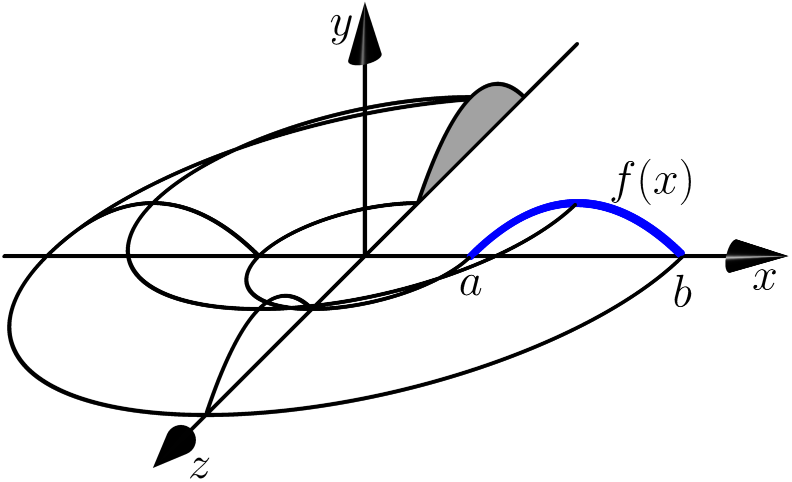
3. Объем тела вращения вокруг оси **Oy**.



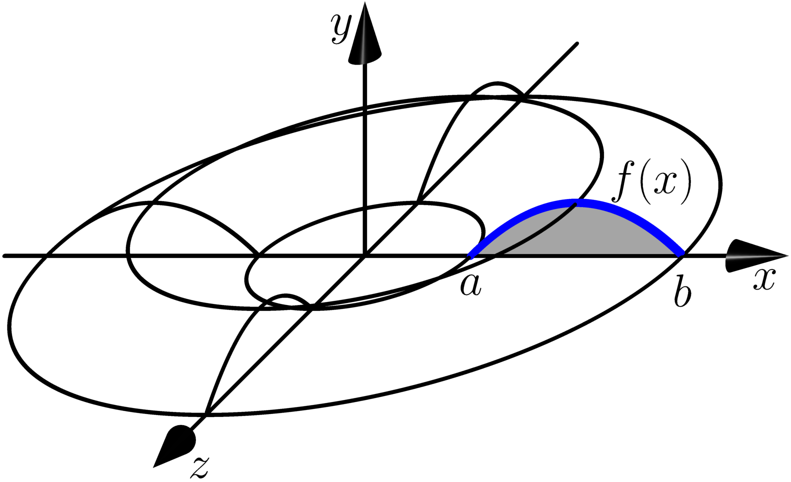
3. Объем тела вращения вокруг оси **Oy**.



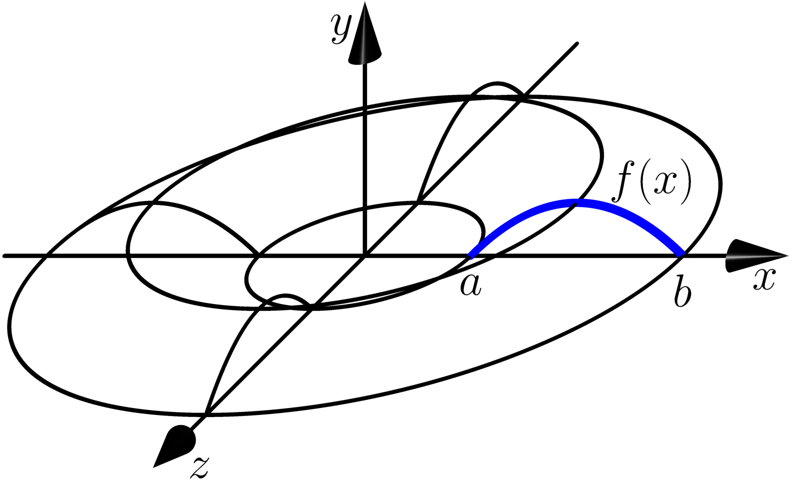
3. *Объем тела вращения вокруг оси* Oy.



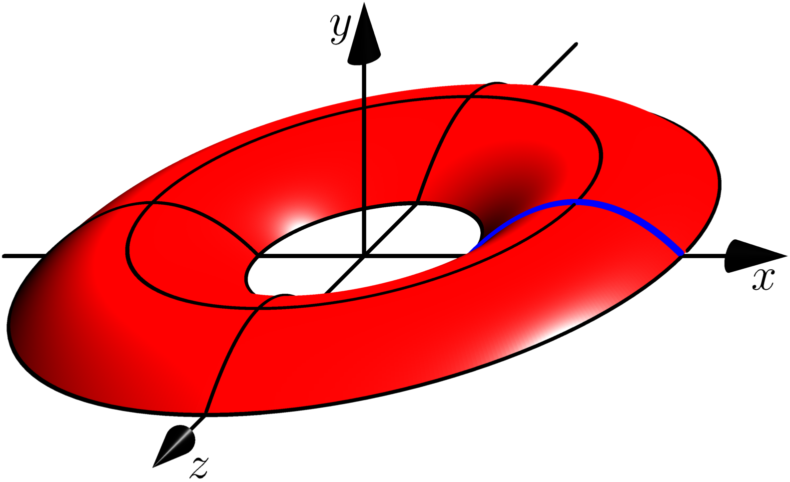
3. *Объем тела вращения вокруг оси* Oy.



3. *Объем тела вращения вокруг оси* Oy.



3. Объем тела вращения вокруг оси Oy.



Объем тела

3. Объем тела вращения вокруг оси Oy.

Объем такого тела вычисляется как

$$V_y = 2\pi \int\limits_a^b x|f(x)|dx, a \geq 0$$

3. Объем тела вращения вокруг оси Oy.

Пусть тело получается путем вращения вокруг оси Oy плоской фигуры, расположенной в плоскости Oxy

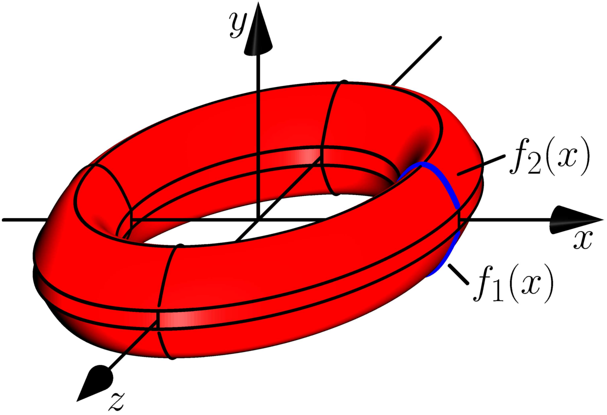
3. Объем тела вращения вокруг оси Oy.

Пусть тело получается путем вращения вокруг оси Oy плоской фигуры, расположенной в плоскости Oxy и ограниченной вертикальными прямыми $x = a$, $x = b$, а также графиками непрерывных **произвольных** функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$,

3. Объем тела вращения вокруг оси Oy.

Пусть тело получается путем вращения вокруг оси Oy плоской фигуры, расположенной в плоскости Oxy и ограниченной вертикальными прямыми $x = a$, $x = b$, а также графиками непрерывных **произвольных** функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$, причем $\forall x \in [a, b]\ f_1(x) \leq f_2(x)$ и $a \geq 0$.

3. Объем тела вращения вокруг оси **Oy**.



3. Объем тела вращения вокруг оси Oy.

Объем такого тела вычисляется по формуле

$$V_y = 2\pi \int\limits_a^b x(f_2(x) - f_1(x))dx, a \geq 0.$$

4. Объем тела вращения вокруг полярной оси l.

4. Объем тела вращения вокруг полярной оси l.

Данное тело получается путем вращения вокруг полярной оси l плоского сектора,

Объем тела

4. Объем тела вращения вокруг полярной оси l.

Данное тело получается путем вращения вокруг полярной оси l плоского сектора, ограниченного полярными радиусами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$

4. Объем тела вращения вокруг полярной оси l.

Данное тело получается путем вращения вокруг полярной оси l плоского сектора, ограниченного полярными радиусами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ и графиком непрерывной функции $\rho(\varphi)$, заданной в полярной системе координат,

Объем тела

4. Объем тела вращения вокруг полярной оси l.

Данное тело получается путем вращения вокруг полярной оси l плоского сектора, ограниченного полярными радиусами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ и графиком непрерывной функции $\rho(\varphi)$, заданной в полярной системе координат, причем

$$0 \leq \alpha \leq \beta \leq \pi$$

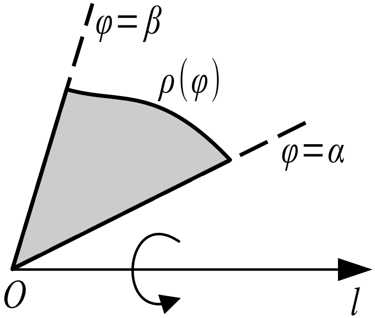
4. Объем тела вращения вокруг полярной оси l.

Данное тело получается путем вращения вокруг полярной оси l плоского сектора, ограниченного полярными радиусами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ и графиком непрерывной функции $\rho(\varphi)$, заданной в полярной системе координат, причем

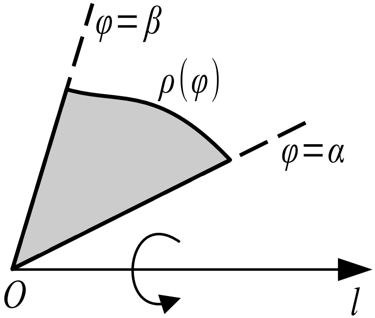
$$0 \leq \alpha \leq \beta \leq \pi$$

– плоский сектор должен располагаться **над** полярной осью.

4. *Объем тела вращения вокруг полярной оси l.*



4. Объем тела вращения вокруг полярной оси l.



Объем такого тела вычисляется по формуле

$$V_l = \frac{2}{3}\pi \int_{\alpha}^{\beta} \rho^3 \sin\varphi d\varphi.$$

Площадь поверхности вращения

1. Площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox графика **произвольной непрерывно-дифференцируемой** функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$,

1. Площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox графика **произвольной непрерывно-дифференцируемой** функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, вычисляется по формуле:

$$S_x = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Площадь поверхности вращения

2. Если **произвольная** функция $f(x)$ задана параметрически с помощью системы **непрерывно-дифференцируемых** функций

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$$

Площадь поверхности вращения

2. Если **произвольная** функция $f(x)$ задана параметрически с помощью системы **непрерывно-дифференцируемых** функций

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$$

то площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox графика этой функции на отрезке $[a, b]$,

2. Если **произвольная** функция $f(x)$ задана параметрически с помощью системы **непрерывно-дифференцируемых** функций

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$$

то площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox графика этой функции на отрезке $[a, b]$, определяется как

$$S_x = 2\pi \int\limits_{t_1}^{t_2} |y(t)| \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt,$$

Площадь поверхности вращения

$$S_x = 2\pi \int\limits_{t_1}^{t_2} |y(t)| \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt,$$

Площадь поверхности вращения

$$S_x = 2\pi \int\limits_{t_1}^{t_2} |y(t)| \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt,$$

Площадь поверхности вращения

$$S_x = 2\pi \int\limits_{t_1}^{t_2} |y(t)| \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt,$$

Площадь поверхности вращения

$$S_x = 2\pi \int\limits_{t_1}^{t_2} |y(t)| \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt,$$

Площадь поверхности вращения

$$S_x = 2\pi \int\limits_{t_1}^{t_2} |y(t)| \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt,$$

Площадь поверхности вращения

$$S_x = 2\pi \int\limits_{t_1}^{t_2} |y(t)| \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt,$$

Площадь поверхности вращения

$$S_x = 2\pi \int\limits_{t_1}^{t_2} |y(t)| \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt,$$

где t_1 и t_2 соответствуют крайним точкам графика функции $f(x)$,

Площадь поверхности вращения

$$S_x = 2\pi \int\limits_{t_1}^{t_2} |y(t)| \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt,$$

где t_1 и t_2 соответствуют крайним точкам графика функции $f(x)$,

t_1 всегда должен быть **меньше** t_2,

Площадь поверхности вращения

$$S_x = 2\pi \int\limits_{t_1}^{t_2} |y(t)| \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt,$$

где t_1 и t_2 соответствуют крайним точкам графика функции $f(x)$,

t_1 всегда должен быть **меньше** t_2,

при этом t_1 может соответствовать как начальной $(x = a)$, так и конечной $(x = b)$ точке.

3. Рассмотрим в полярной системе координат **непрерывно-дифференцируемую** функцию $\rho(\varphi)$.

Площадь поверхности вращения

3. Рассмотрим в полярной системе координат **непрерывно-дифференцируемую** функцию $\rho(\varphi)$. Площадь поверхности, образованной вращением вокруг полярной оси l графика этой функции,

3. Рассмотрим в полярной системе координат **непрерывно-дифференцируемую** функцию $\rho(\varphi)$. Площадь поверхности, образованной вращением вокруг полярной оси *l* графика этой функции, расположенного **над** осью *l* и ограниченного полярными радиусами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$,

Площадь поверхности вращения

3. Рассмотрим в полярной системе координат **непрерывно-дифференцируемую** функцию $\rho(\varphi)$. Площадь поверхности, образованной вращением вокруг полярной оси l графика этой функции, расположенного **над** осью l и ограниченного полярными радиусами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$, вычисляется по формуле

$$S_l = 2\pi \int\limits_{\alpha}^{\beta} \rho \sin\varphi \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2} d\varphi,$$

где $0 \leq \alpha \leq \beta \leq \pi$.