Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана
Факультет "Фундаментальные науки"
Кафедра "Высшая математика"

Интегралы и дифференциальные уравнения

Модуль 2

Определенные и несобственные интегралы

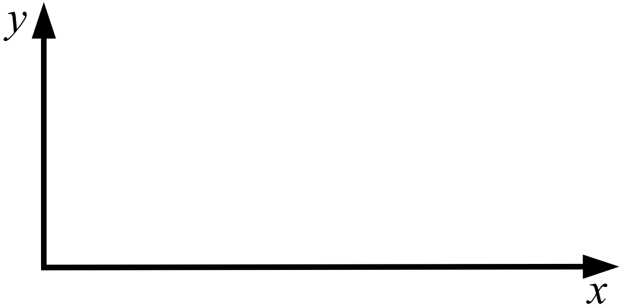
Лекция 2.3

для ГУИМЦ, 2025

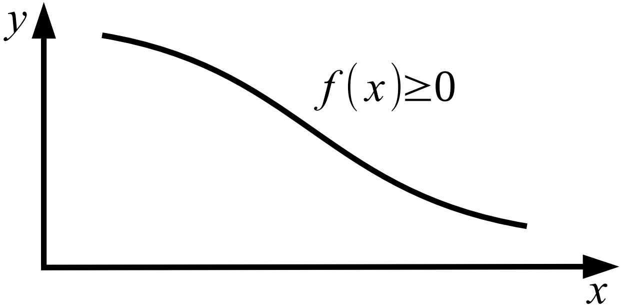
к.ф.-м.н. Емгушева Г.П.

Площадь плоской фигуры

Площадь плоской фигуры

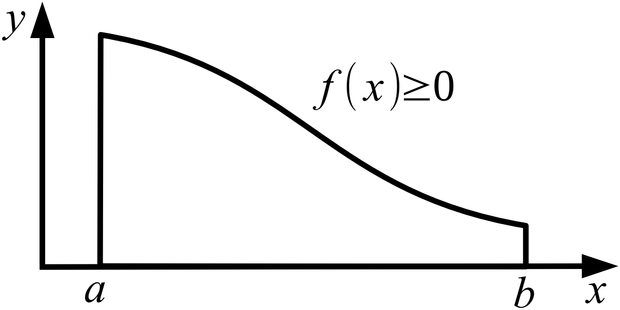


Площадь плоской фигуры



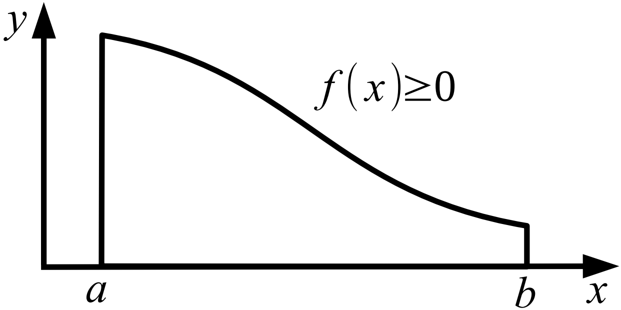
Рассмотрим плоскую фигуру, ограниченную графиком непрерывной **неотрицательной** функции $y = f(x)$,

Площадь плоской фигуры



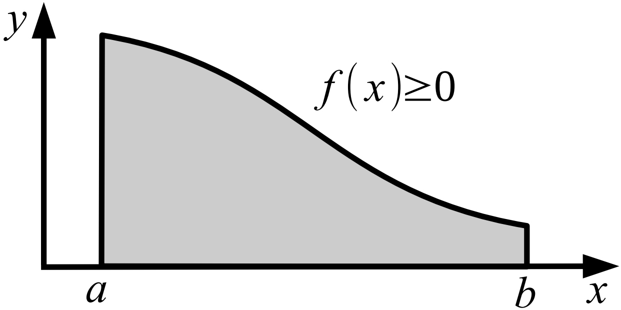
Рассмотрим плоскую фигуру, ограниченную графиком непрерывной **неотрицательной** функции $y = f(x)$, двумя вертикальными прямыми $x = a$, $x = b$

Площадь плоской фигуры



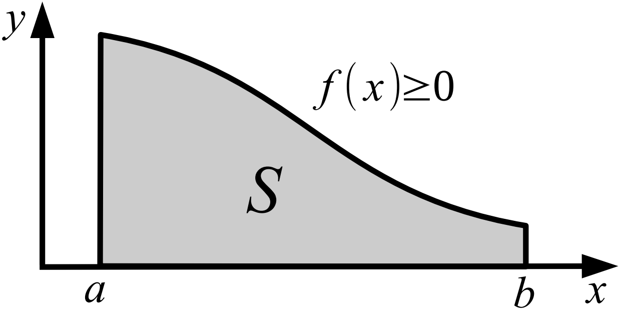
Рассмотрим плоскую фигуру, ограниченную графиком непрерывной **неотрицательной** функции $y = f(x)$, двумя вертикальными прямыми $x = a$, $x = b$ и осью Ox.

Площадь плоской фигуры



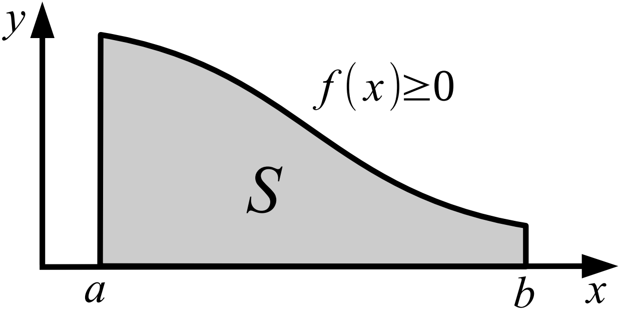
Рассмотрим плоскую фигуру, ограниченную графиком непрерывной **неотрицательной** функции $y = f(x)$, двумя вертикальными прямыми $x = a$, $x = b$ и осью Ox.

Площадь плоской фигуры



Площадь S этой фигуры вычисляется согласно геометрическому смыслу определенного интеграла

Площадь плоской фигуры



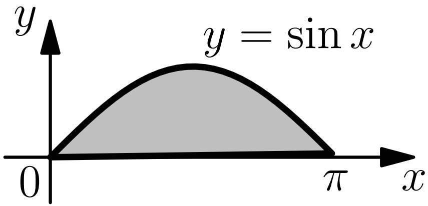
Площадь S этой фигуры вычисляется согласно геометрическому смыслу определенного интеграла по формуле

$$S = \int_a^b f(x)dx.$$

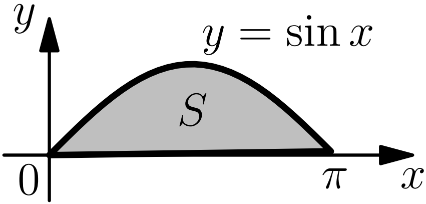
Пример:

Пример: Найти площадь фигуры, ограниченной осью Ox и первой аркой синусоиды.

Пример: Найти площадь фигуры, ограниченной осью Ox и первой аркой синусоиды.

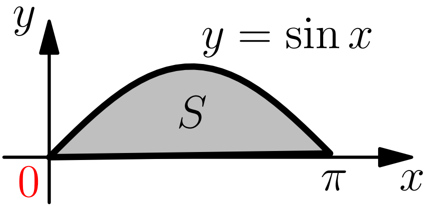


Пример: Найти площадь фигуры, ограниченной осью Ox и первой аркой синусоиды.



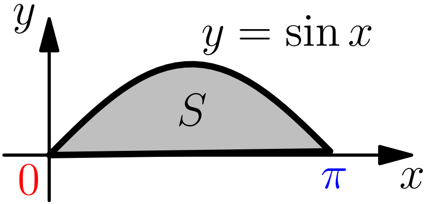
$$S = \int_0^{\pi} \sin x dx$$

Пример: Найти площадь фигуры, ограниченной осью Ox и первой аркой синусоиды.



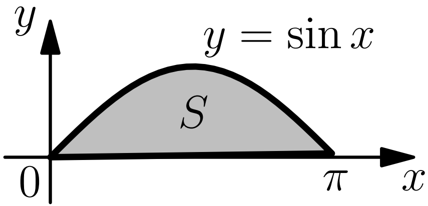
$$S = \int_0^{\pi} \sin x dx$$

Пример: Найти площадь фигуры, ограниченной осью Ox и первой аркой синусоиды.



$$S = \int_0^{\pi} \sin x dx$$

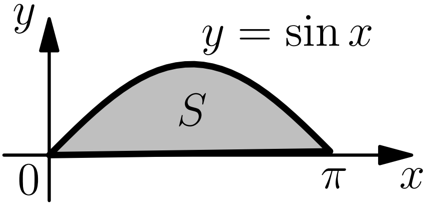
Пример: Найти площадь фигуры, ограниченной осью Ox и первой аркой синусоиды.



$$S = \int_0^{\pi} \sin x dx$$

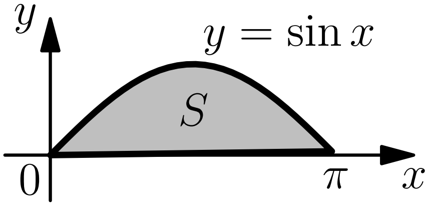
Площадь плоской фигуры

Пример: Найти площадь фигуры, ограниченной осью Ox и первой аркой синусоиды.



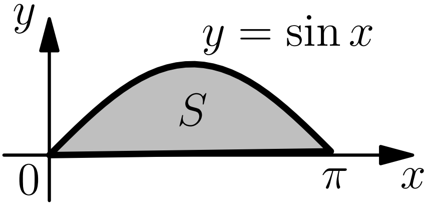
$$S = \int\limits_0^{\pi} \sin x dx = -\cos x\Big|_0^{\pi}$$

Пример: Найти площадь фигуры, ограниченной осью Ox и первой аркой синусоиды.



$$S = \int_0^{\pi} \sin x dx = -\cos x\Big|_0^{\pi} = -(\cos\pi - \cos 0)$$

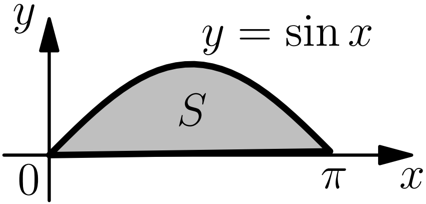
Пример: Найти площадь фигуры, ограниченной осью Ox и первой аркой синусоиды.



$$S = \int\limits_0^{\pi} \sin x dx = -\cos x\Big|_0^{\pi} = -(\cos\pi - \cos 0) =$$

$$= -(-1-1)$$

Пример: Найти площадь фигуры, ограниченной осью Ox и первой аркой синусоиды.



$$S = \int\limits_0^{\pi} \sin x dx = -\cos x\Big|_0^{\pi} = -(\cos\pi - \cos 0) =$$
$$= -(-1-1) = 2.$$

Площадь плоской фигуры

Часто **неотрицательную** функцию $y = f(x)$ бывает удобнее задавать в параметрическом виде с помощью системы функций

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$$

Часто **неотрицательную** функцию $y = f(x)$ бывает удобнее задавать в параметрическом виде с помощью системы функций

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$$

где t - параметр, определяющий значения переменных x и y,

Площадь плоской фигуры

Часто **неотрицательную** функцию $y = f(x)$ бывает удобнее задавать в параметрическом виде с помощью системы функций

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$$

где t - параметр, определяющий значения переменных x и y,

функции $x(t)$ и $y(t)$ подбираются из условия

$$y(t) = f(x(t)).$$

Площадь плоской фигуры

Если при обычном способе задания функции переменные x и y связаны прямо

Если при обычном способе задания функции переменные x и y связаны прямо

$$x \text{ --- } y$$

Площадь плоской фигуры

Если при обычном способе задания функции переменные x и y связаны прямо

$$x \text{ --- } y$$

то в параметрическом виде переменные x и y связаны опосредовано через промежуточный параметр t

Площадь плоской фигуры

Если при обычном способе задания функции переменные x и y связаны прямо

$$x \text{ --- } y$$

то в параметрическом виде переменные x и y связаны опосредовано через промежуточный параметр t

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
x \arrow[dr, dash] & & y \arrow[dl, dash] \\
& t &
\end{tikzcd}$$

Площадь плоской фигуры

В этом случае согласно теореме о замене переменной в определенном интеграле площадь плоской фигуры вычисляется по формуле

Площадь плоской фигуры

В этом случае согласно теореме о замене переменной в определенном интеграле площадь плоской фигуры вычисляется по формуле

S

Площадь плоской фигуры

В этом случае согласно теореме о замене переменной в определенном интеграле площадь плоской фигуры вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

В этом случае согласно теореме о замене переменной в определенном интеграле площадь плоской фигуры вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b f(x)dx = \left| \phantom{\rule{10em}{0pt}} \right|$$

В этом случае согласно теореме о замене переменной в определенном интеграле площадь плоской фигуры вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b f(x)dx = \left| \begin{array}{c} x = x(t), \\ \\ \\ \\ \end{array} \right|$$

В этом случае согласно теореме о замене переменной в определенном интеграле площадь плоской фигуры вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b f(x)dx = \left| \begin{array}{c} x = x(t), \\ \\ \\ \\ \end{array} \right|$$

В этом случае согласно теореме о замене переменной в определенном интеграле площадь плоской фигуры вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b f(x)dx = \left| \begin{array}{c} x = x(t), \\ f(x) \end{array} \right|$$

В этом случае согласно теореме о замене переменной в определенном интеграле площадь плоской фигуры вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b f(x)dx = \left| \begin{array}{c} x = x(t), \\ f(x) = f(x(t)) \\ \\ \\ \end{array} \right|$$

Площадь плоской фигуры

В этом случае согласно теореме о замене переменной в определенном интеграле площадь плоской фигуры вычисляется по формуле

$$S = \int\limits_a^b f(x)dx = \left| \begin{array}{c} x = x(t), \\ f(x) = f(x(t)) = y(t), \\ \\ \\ \end{array} \right|$$

В этом случае согласно теореме о замене переменной в определенном интеграле площадь плоской фигуры вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b f(x)dx = \left| \begin{array}{c} x = x(t), \\ f(x) = f(x(t)) = y(t), \\ \\ \\ \end{array} \right|$$

Площадь плоской фигуры

В этом случае согласно теореме о замене переменной в определенном интеграле площадь плоской фигуры вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b f(x)dx = \left| \begin{array}{c} x = x(t), \\ f(x) = f(x(t)) = y(t), \\ dx \\ \\ \\ \end{array} \right|$$

Площадь плоской фигуры

В этом случае согласно теореме о замене переменной в определенном интеграле площадь плоской фигуры вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b f(x)dx = \left| \begin{array}{c} x = x(t), \\ f(x) = f(x(t)) = y(t), \\ dx = x'(t)dt, \end{array} \right|$$

В этом случае согласно теореме о замене переменной в определенном интеграле площадь плоской фигуры вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b f(x)dx = \left| \begin{array}{c} x = x(t), \\ f(x) = f(x(t)) = y(t), \\ dx = x'(t)dt, \\ x(t_1) = a, x(t_2) = b \end{array} \right|$$

В этом случае согласно теореме о замене переменной в определенном интеграле площадь плоской фигуры вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b f(x)dx = \left| \begin{array}{c} x = x(t), \\ f(x) = f(x(t)) = y(t), \\ dx = x'(t)dt, \\ x(t_1) = a, x(t_2) = b \end{array} \right| =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt.$$

В этом случае согласно теореме о замене переменной в определенном интеграле площадь плоской фигуры вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt.$$

В этом случае согласно теореме о замене переменной в определенном интеграле площадь плоской фигуры вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt.$$

Площадь плоской фигуры

В этом случае согласно теореме о замене переменной в определенном интеграле площадь плоской фигуры вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt.$$

Площадь плоской фигуры

В этом случае согласно теореме о замене переменной в определенном интеграле площадь плоской фигуры вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b f(x)dx \; = \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt.$$

Площадь плоской фигуры

В этом случае согласно теореме о замене переменной в определенном интеграле площадь плоской фигуры вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b f(x)dx = \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt.$$

Пределы интегрирования t_1 и t_2 находятся из условий $x(t_1) = a$ и $x(t_2) = b$,

Площадь плоской фигуры

В этом случае согласно теореме о замене переменной в определенном интеграле площадь плоской фигуры вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b f(x)dx = \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt.$$

Пределы интегрирования t_1 и t_2 находятся из условий $x(t_1) = a$ и $x(t_2) = b$, причем t_1 может быть как меньше, так и больше t_2.

Площадь плоской фигуры

В этом случае согласно теореме о замене переменной в определенном интеграле площадь плоской фигуры вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b f(x)dx = \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt.$$

Также важно помнить, что $y(t) \geq 0$, когда t находится между t_1 и t_2.

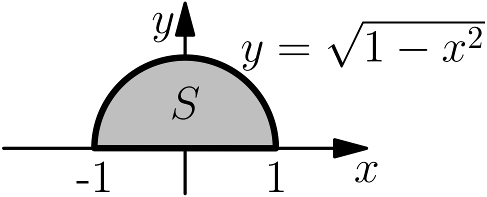
Площадь плоской фигуры

Пример:

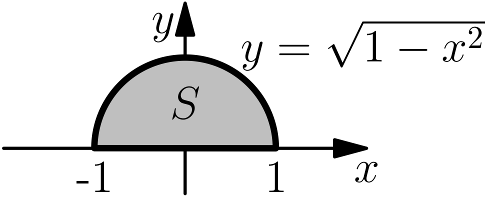
Площадь плоской фигуры

Пример: Найти площадь верхней половины круга, задаваемого неравенством $x^2 + y^2 \leq 1$.

Пример: Найти площадь верхней половины круга, задаваемого неравенством $x^2 + y^2 \leq 1$.



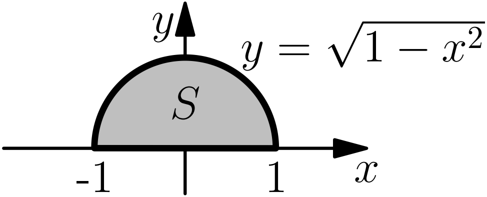
Пример: Найти площадь верхней половины круга, задаваемого неравенством $x^2 + y^2 \le 1$.



Полукруг сверху ограничен графиком функции $y = \sqrt{1 - x^2}$,

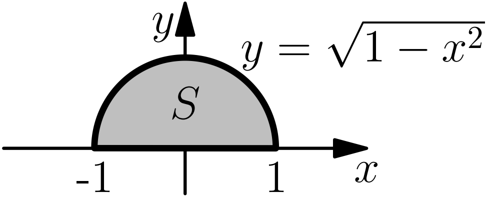
Площадь плоской фигуры

Пример: Найти площадь верхней половины круга, задаваемого неравенством $x^2 + y^2 \leq 1$.



Полукруг сверху ограничен графиком функции $y = \sqrt{1 - x^2}$, вычисление интеграла от которой является достаточно трудоемким делом.

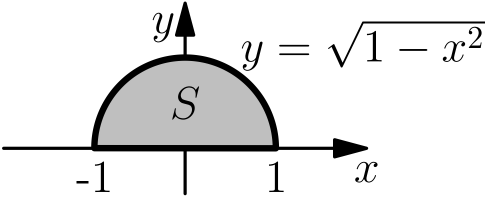
Пример: Найти площадь верхней половины круга, задаваемого неравенством $x^2 + y^2 \leq 1$.



Поэтому данную функцию лучше задать параметрически:

Площадь плоской фигуры

Пример: Найти площадь верхней половины круга, задаваемого неравенством $x^2 + y^2 \leq 1$.

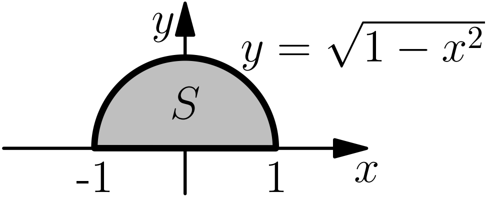


Поэтому данную функцию лучше задать параметрически:

$$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \end{cases} \quad t \in [0; \pi].$$

Площадь плоской фигуры

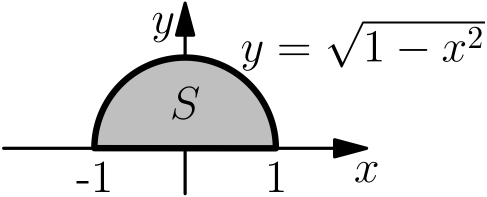
Пример: Найти площадь верхней половины круга, задаваемого неравенством $x^2 + y^2 \leq 1$.



Поскольку значения переменной x лежат на отрезке $[-1, 1]$,

Площадь плоской фигуры

Пример: Найти площадь верхней половины круга, задаваемого неравенством $x^2 + y^2 \leq 1$.

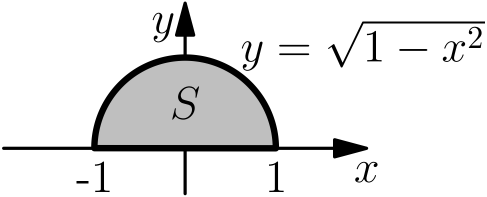


Поскольку значения переменной x лежат на отрезке $[-1, 1]$, то из условий

$$x(t_1) = -1 \text{ и } x(t_2) = 1$$

Площадь плоской фигуры

Пример: Найти площадь верхней половины круга, задаваемого неравенством $x^2 + y^2 \leq 1$.



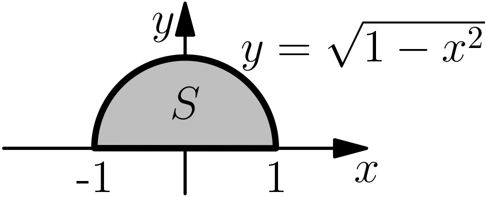
Поскольку значения переменной x лежат на отрезке $[-1, 1]$, то из условий

$$x(t_1) = -1 \text{ и } x(t_2) = 1$$

находим крайние значения параметра t:

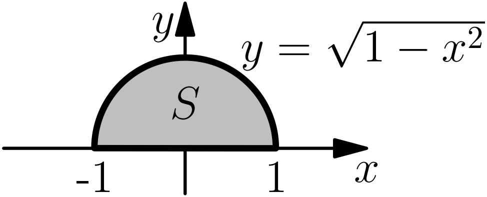
$$t_1 = \pi, \ t_2 = 0.$$

Пример: Найти площадь верхней половины круга, задаваемого неравенством $x^2 + y^2 \leq 1$.



Тогда

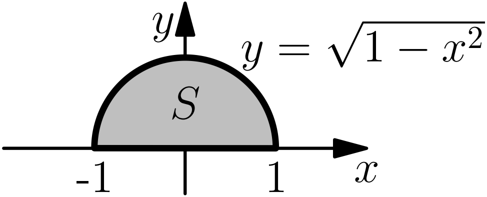
Пример: Найти площадь верхней половины круга, задаваемого неравенством $x^2 + y^2 \leq 1$.



Тогда

$$S = \int\limits_{\pi}^{0} y(t)x'(t)dt$$

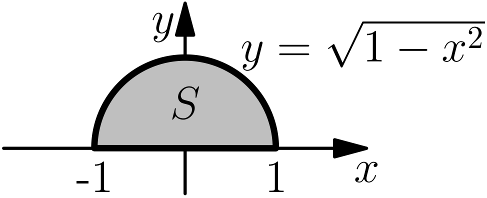
Пример: Найти площадь верхней половины круга, задаваемого неравенством $x^2 + y^2 \leq 1$.



Тогда

$$S = \int_{\pi}^{0} y(t)x'(t)dt = \int_{\pi}^{0} \sin t(\cos t)'dt$$

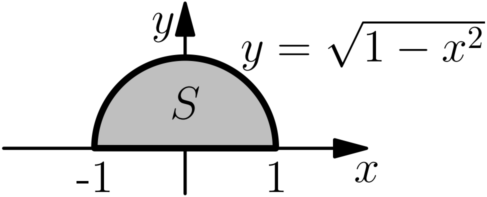
Пример: Найти площадь верхней половины круга, задаваемого неравенством $x^2 + y^2 \leq 1$.



Тогда

$$\int_{\pi}^{0} \sin t (\cos t)' dt$$

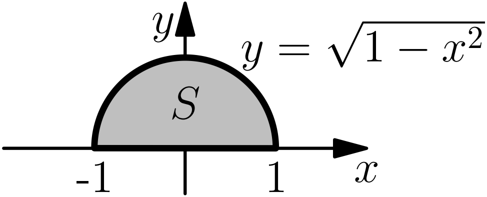
Пример: Найти площадь верхней половины круга, задаваемого неравенством $x^2 + y^2 \leq 1$.



Тогда

$$\int_{\pi}^{0} \sin t (\cos t)' dt$$

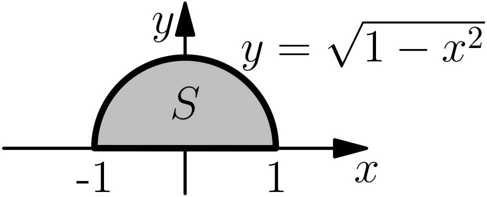
Пример: Найти площадь верхней половины круга, задаваемого неравенством $x^2 + y^2 \leq 1$.



Тогда

$$\int_{\pi}^{0} \sin t (\cos t)' dt$$

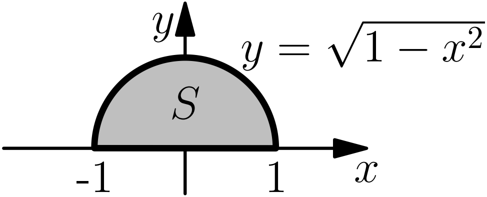
Пример: Найти площадь верхней половины круга, задаваемого неравенством $x^2 + y^2 \leq 1$.



Тогда

$$\int\limits_{\pi}^{0} \sin t (\cos t)' dt$$

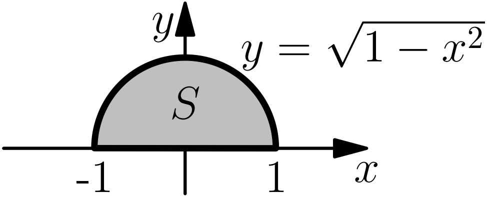
Пример: Найти площадь верхней половины круга, задаваемого неравенством $x^2 + y^2 \leq 1$.



Тогда

$$\int_{\pi}^{0} \sin t (\cos t)' dt$$

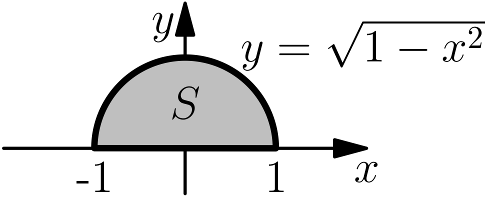
Пример: Найти площадь верхней половины круга, задаваемого неравенством $x^2 + y^2 \leq 1$.



Тогда

$$\int\limits_{\pi}^{0} \sin t (\cos t)' dt$$

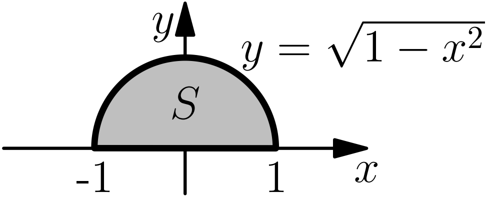
Пример: Найти площадь верхней половины круга, задаваемого неравенством $x^2 + y^2 \leq 1$.



Тогда

$$\int_{\pi}^{0} \sin t (\cos t)' dt = \int_{\pi}^{0} \sin t (-\sin t) dt$$

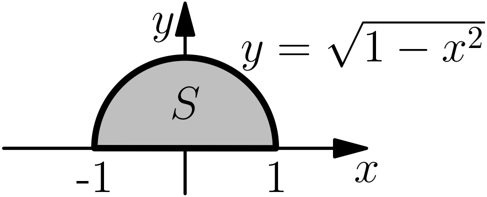
Пример: Найти площадь верхней половины круга, задаваемого неравенством $x^2 + y^2 \leq 1$.



Тогда

$$\int_{\pi}^{0} \sin t(-\sin t)dt$$

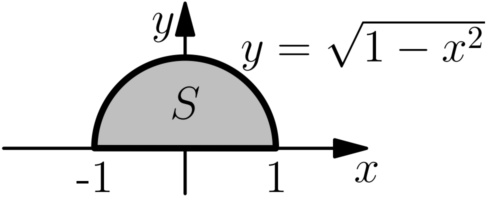
Пример: Найти площадь верхней половины круга, задаваемого неравенством $x^2 + y^2 \leq 1$.



Тогда

$$\int\limits_{\pi}^{0} \sin t(-\sin t)dt$$

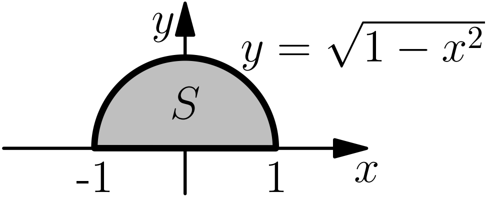
Пример: Найти площадь верхней половины круга, задаваемого неравенством $x^2 + y^2 \leq 1$.



Тогда

$$\int\limits_{\pi}^{0} \sin t(-\sin t)dt$$

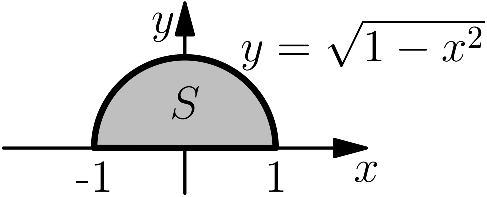
Пример: Найти площадь верхней половины круга, задаваемого неравенством $x^2 + y^2 \leq 1$.



Тогда

$$\int_{\pi}^{0} \sin t(-\sin t)dt$$

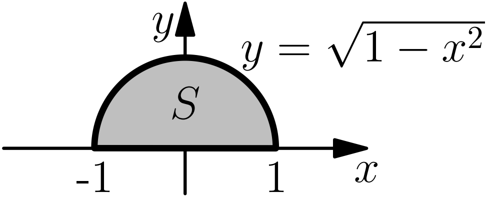
Пример: Найти площадь верхней половины круга, задаваемого неравенством $x^2 + y^2 \leq 1$.



Тогда

$$\int\limits_{\pi}^{0} \sin t(-\sin t)dt$$

Пример: Найти площадь верхней половины круга, задаваемого неравенством $x^2 + y^2 \leq 1$.

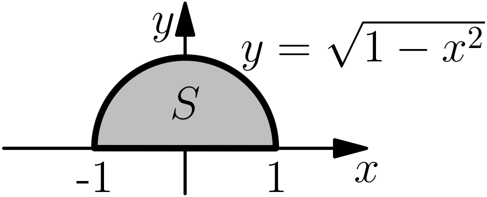


Тогда

$$\int\limits_{\pi}^{0} \sin t(-\sin t)dt$$

Площадь плоской фигуры

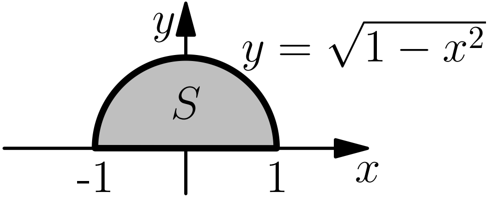
Пример: Найти площадь верхней половины круга, задаваемого неравенством $x^2 + y^2 \le 1$.



Тогда

$$\int_{\pi}^{0} \sin t(-\sin t)dt = -\int_{\pi}^{0} \sin^2 t dt$$

Пример: Найти площадь верхней половины круга, задаваемого неравенством $x^2 + y^2 \leq 1$.

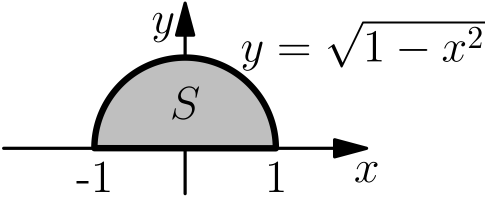


Тогда

$$-\int_{\pi}^{0} \sin^2 t dt$$

Площадь плоской фигуры

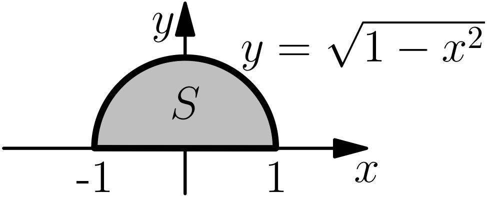
Пример: Найти площадь верхней половины круга, задаваемого неравенством $x^2 + y^2 \leq 1$.



Тогда

$$-\int_{\pi}^{0} \sin^2 t dt$$

Пример: Найти площадь верхней половины круга, задаваемого неравенством $x^2 + y^2 \leq 1$.

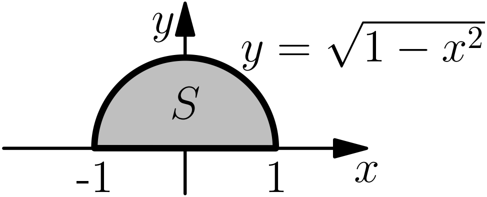


Тогда

$$-\int_{\pi}^{0} \sin^2 t dt$$

Площадь плоской фигуры

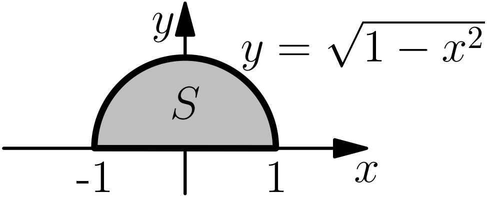
Пример: Найти площадь верхней половины круга, задаваемого неравенством $x^2 + y^2 \leq 1$.



Тогда

$$-\int\limits_{\pi}^{0} \sin^2 t dt$$

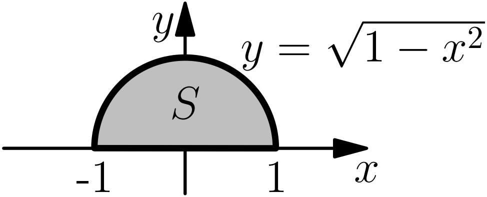
Пример: Найти площадь верхней половины круга, задаваемого неравенством $x^2 + y^2 \leq 1$.



Тогда

$$-\int_{\pi}^{0} \sin^2 t dt$$

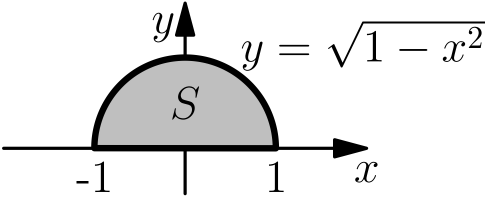
Пример: Найти площадь верхней половины круга, задаваемого неравенством $x^2 + y^2 \leq 1$.



Тогда

$$-\int_{\pi}^{0} \sin^2 t dt$$

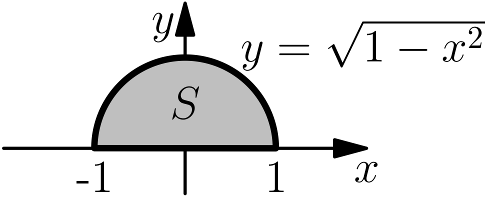
Пример: Найти площадь верхней половины круга, задаваемого неравенством $x^2 + y^2 \leq 1$.



Тогда

$$-\int_{\pi}^{0} \sin^2 t dt = -\int_{\pi}^{0} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt$$

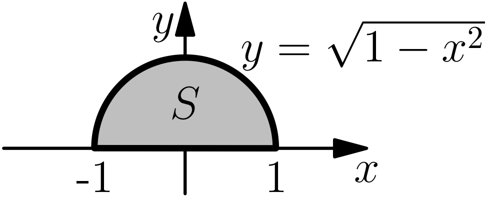
Пример: Найти площадь верхней половины круга, задаваемого неравенством $x^2 + y^2 \leq 1$.



Тогда

$$-\int\limits_{\pi}^{0} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt$$

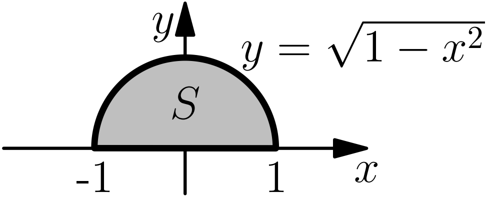
Пример: Найти площадь верхней половины круга, задаваемого неравенством $x^2 + y^2 \le 1$.



Тогда

$$-\int_{\pi}^{0} \frac{1-\cos 2t}{2}dt$$

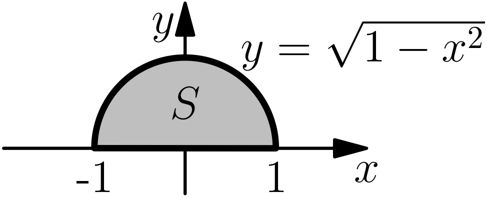
Пример: Найти площадь верхней половины круга, задаваемого неравенством $x^2 + y^2 \le 1$.



Тогда

$$-\int_{\pi}^{0} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt$$

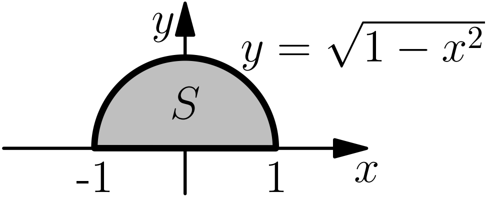
Пример: Найти площадь верхней половины круга, задаваемого неравенством $x^2 + y^2 \leq 1$.



Тогда

$$-\int_{\pi}^{0} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt$$

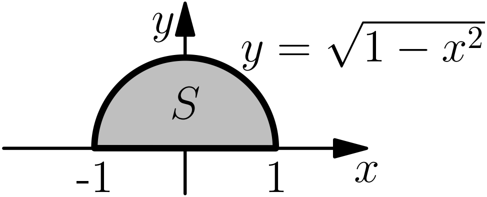
Пример: Найти площадь верхней половины круга, задаваемого неравенством $x^2 + y^2 \leq 1$.



Тогда

$$-\int_{\pi}^{0} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt$$

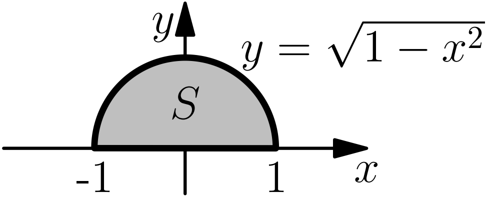
Пример: Найти площадь верхней половины круга, задаваемого неравенством $x^2 + y^2 \leq 1$.



Тогда

$$-\int_{\pi}^{0} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt$$

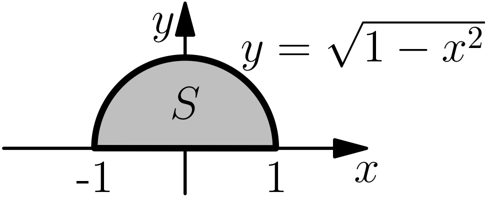
Пример: Найти площадь верхней половины круга, задаваемого неравенством $x^2 + y^2 \leq 1$.



Тогда

$$-\int\limits_{\pi}^{0} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt = -\frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_{\pi}^{0}$$

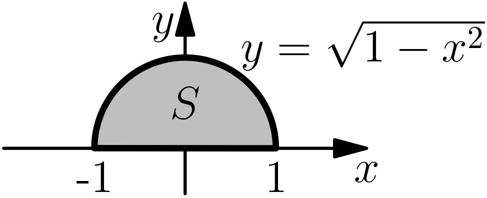
Пример: Найти площадь верхней половины круга, задаваемого неравенством $x^2 + y^2 \leq 1$.



Тогда

$$-\frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_{\pi}^{0}$$

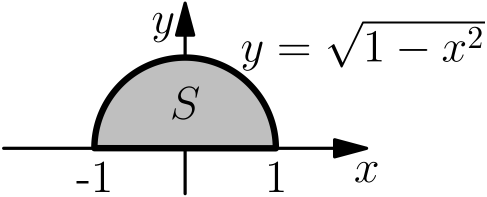
Пример: Найти площадь верхней половины круга, задаваемого неравенством $x^2 + y^2 \leq 1$.



Тогда

$$-\frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_{\pi}^{0}$$

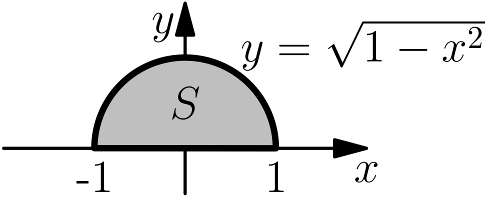
Пример: Найти площадь верхней половины круга, задаваемого неравенством $x^2 + y^2 \le 1$.



Тогда

$$-\frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_{\pi}^{0}$$

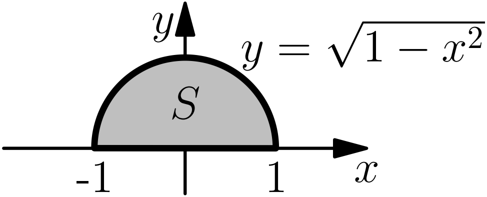
Пример: Найти площадь верхней половины круга, задаваемого неравенством $x^2 + y^2 \leq 1$.



Тогда

$$-\frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_{\pi}^{0}$$

Пример: Найти площадь верхней половины круга, задаваемого неравенством $x^2 + y^2 \leq 1$.

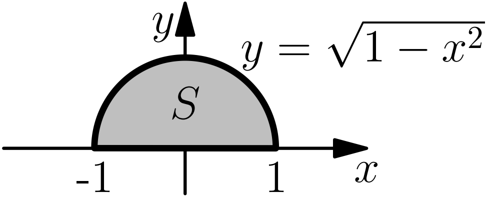


Тогда

$$-\frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_{\pi}^{0}$$

Площадь плоской фигуры

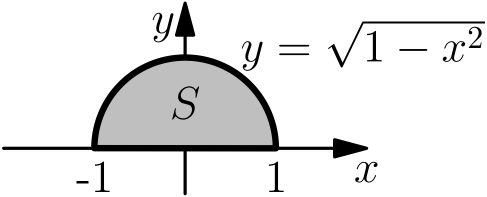
Пример: Найти площадь верхней половины круга, задаваемого неравенством $x^2 + y^2 \leq 1$.



Тогда

$$-\frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_{\pi}^{0}$$

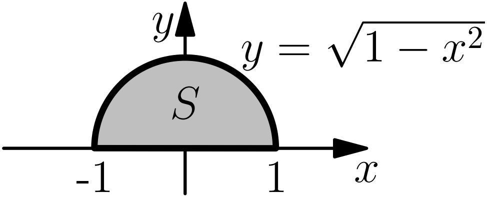
Пример: Найти площадь верхней половины круга, задаваемого неравенством $x^2 + y^2 \leq 1$.



Тогда

$$-\frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_{\pi}^{0} = \frac{\pi}{2}.$$

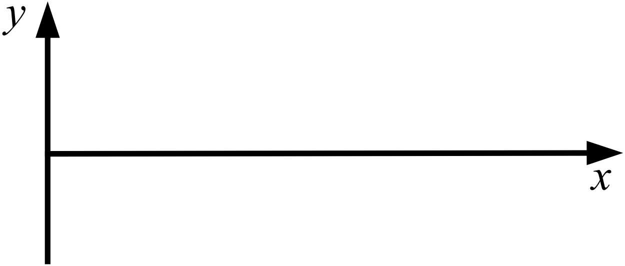
Пример: Найти площадь верхней половины круга, задаваемого неравенством $x^2 + y^2 \leq 1$.



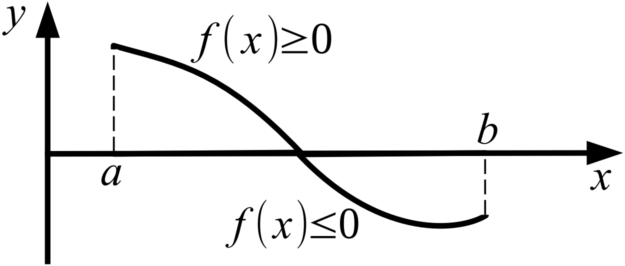
Тогда

$$S = \frac{\pi}{2}$$

Площадь плоской фигуры

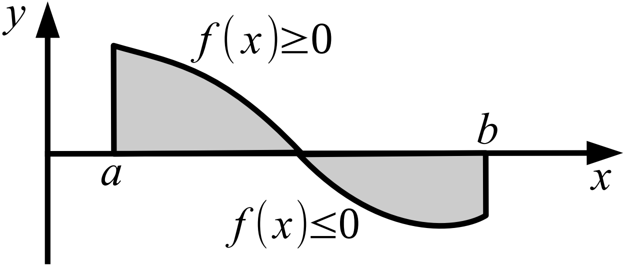


Площадь плоской фигуры



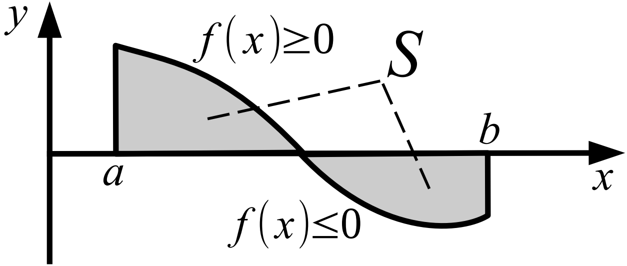
Рассмотрим непрерывную **произвольную** функцию $y = f(x)$, которая на отрезке $[a; b]$ принимает как положительные, так и отрицательные значения.

Площадь плоской фигуры



Тогда фигура, ограниченная графиком этой функции и осью Ox на отрезке $[a; b]$,

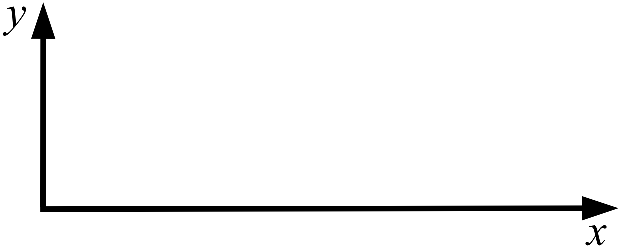
Площадь плоской фигуры



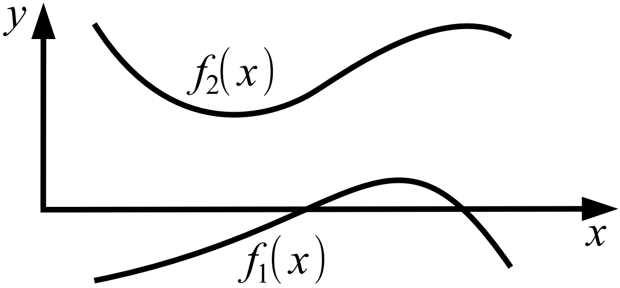
Тогда фигура, ограниченная графиком этой функции и осью Ox на отрезке $[a; b]$, имеет площадь, вычисляемую по формуле:

$$S = \int_a^b |f(x)|dx.$$

Площадь плоской фигуры

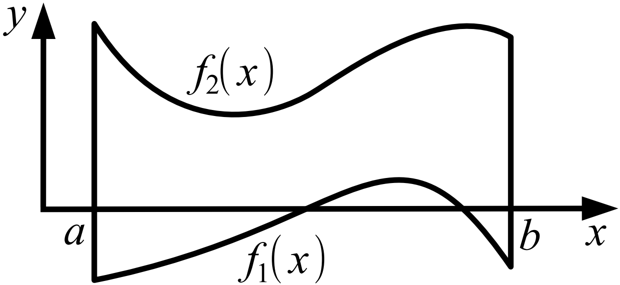


Площадь плоской фигуры



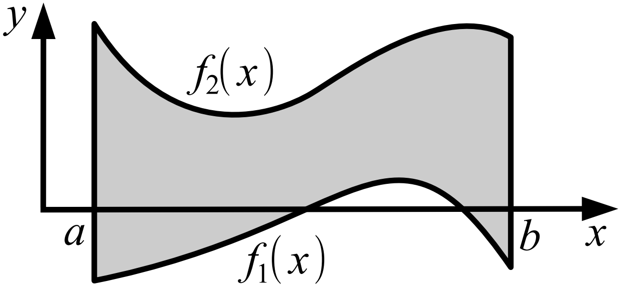
Пусть плоская фигура ограничена снизу и сверху графиками непрерывных **произвольных** функций $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$,

Площадь плоской фигуры



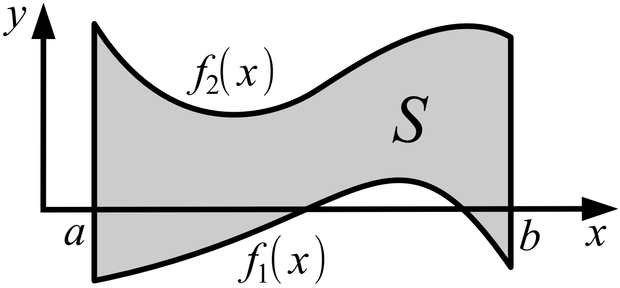
Пусть плоская фигура ограничена снизу и сверху графиками непрерывных **произвольных** функций $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$, а слева и справа – прямыми $x = a$ и $x = b$.

Площадь плоской фигуры



Пусть плоская фигура ограничена снизу и сверху графиками непрерывных **произвольных** функций $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$,
а слева и справа – прямыми $x = a$ и $x = b$.

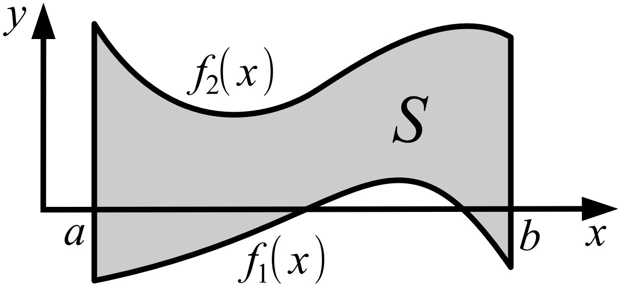
Площадь плоской фигуры



Площадь S этой фигуры вычисляется по формуле

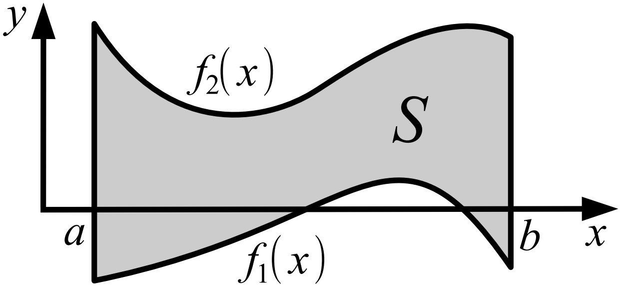
$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx.$$

Площадь плоской фигуры



Функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ могут принимать отрицательные значения,

Площадь плоской фигуры



Функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ могут принимать отрицательные значения, но должно выполняться условие:

$$\forall x \in [a, b] \; f_2(x) \geq f_1(x).$$

Площадь плоской фигуры

Пример:

Пример: Найти площадь плоской фигуры, заключенной между графиками функций

$$y = x^2 \text{ и } y = \sqrt{x}.$$

Площадь плоской фигуры

Пример:

$$y = x^2 \text{ и } y = \sqrt{x}$$

Площадь плоской фигуры

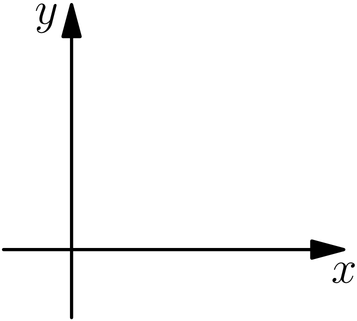
Пример:

$$y = x^2 \text{ и } y = \sqrt{x}$$

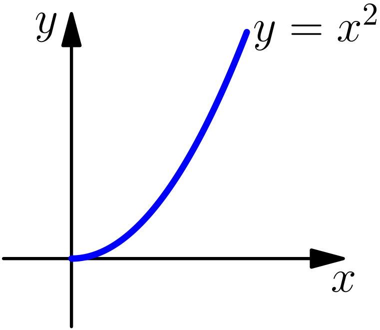
Площадь плоской фигуры

Пример: $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$

Пример: $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$

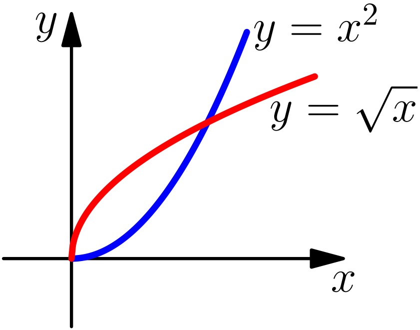


Пример: $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$



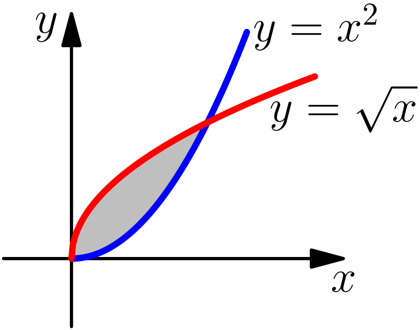
Площадь плоской фигуры

Пример: $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$



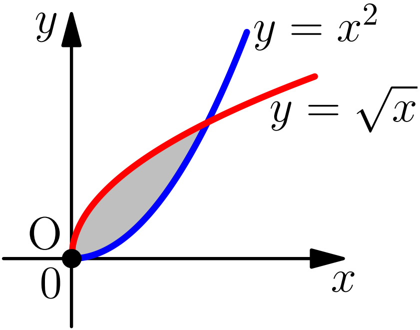
Площадь плоской фигуры

Пример: $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$



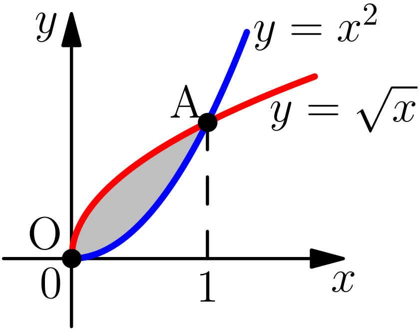
Фигура ограничена сверху графиком функции $y = \sqrt{x}$, снизу - графиком функции $y = x^2$.

Пример: $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$



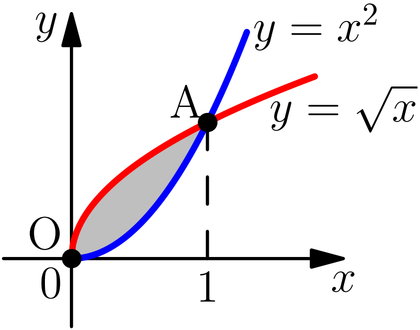
Крайней левой точкой фигуры служит точка O с абсциссой $a = 0$.

Пример: $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$



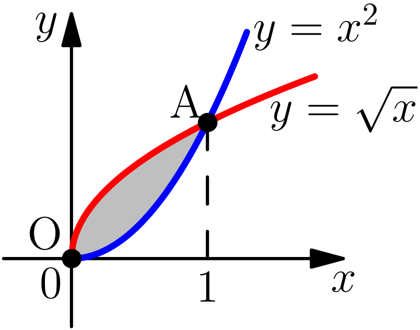
Крайней левой точкой фигуры служит точка O с абсциссой $a = 0$. Крайней правой точкой фигуры является точка A с абсциссой $b = 1$.

Пример: $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$



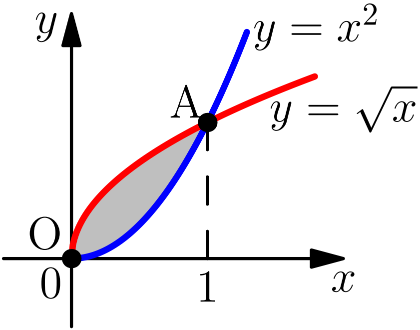
$$S = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)dx$$

Пример: $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$



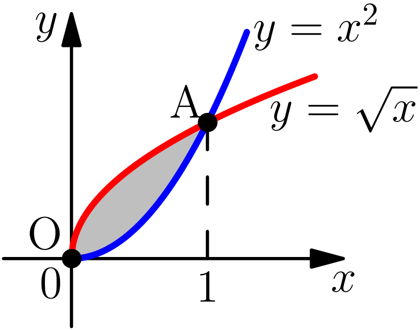
$$S = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)\,dx$$

Пример: $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$



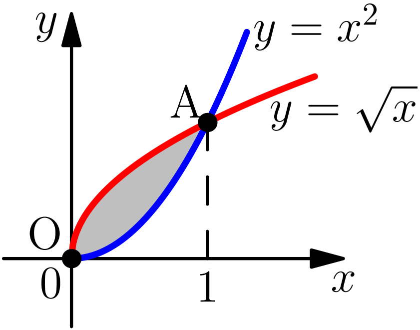
$$S = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)dx$$

Пример: $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$



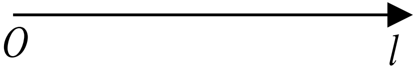
$$S = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)dx = \left(\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{1}{3}x^3\right)\Bigg|_0^1$$

Пример: $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$

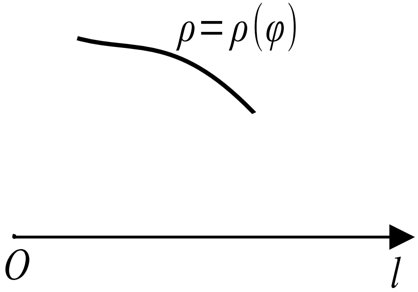


$$S = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)dx = \left(\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{1}{3}x^3\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Площадь плоской фигуры

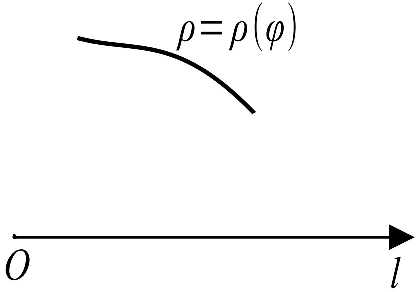


Площадь плоской фигуры



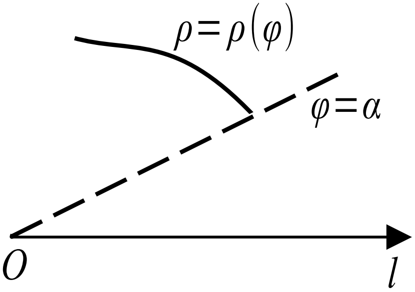
Рассмотрим непрерывную функцию $\rho = \rho(\varphi)$, заданную в полярной системе координат.

Площадь плоской фигуры



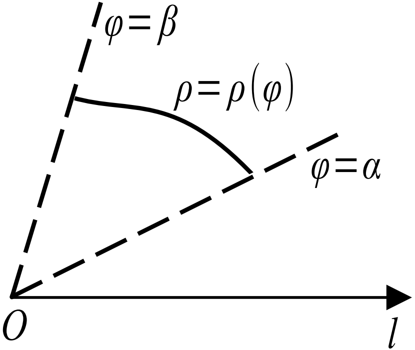
Плоская фигура, ограниченная графиком этой функции и двумя лучами $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$, называется **криволинейным сектором**.

Площадь плоской фигуры



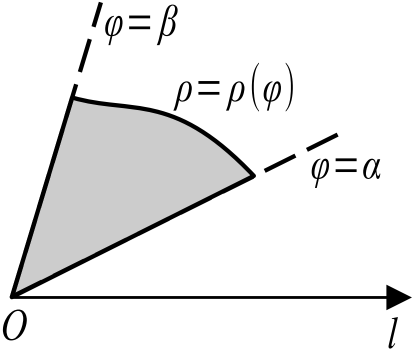
Плоская фигура, ограниченная графиком этой функции и двумя лучами $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$, называется **криволинейным сектором**.

Площадь плоской фигуры



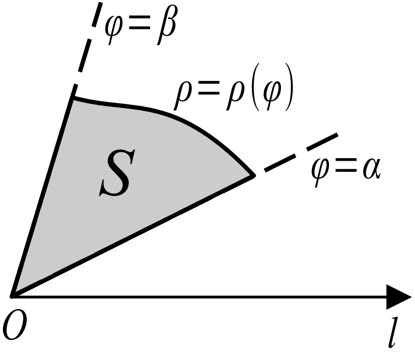
Плоская фигура, ограниченная графиком этой функции и двумя лучами $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$, называется **криволинейным сектором**.

Площадь плоской фигуры



Плоская фигура, ограниченная графиком этой функции и двумя лучами $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$, называется **криволинейным сектором**.

Площадь плоской фигуры

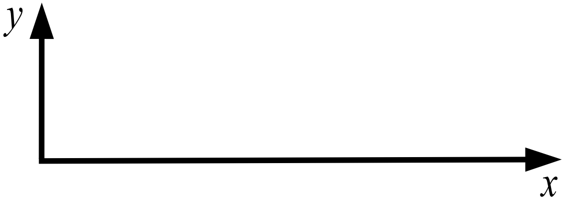


Площадь сектора вычисляется по формуле:

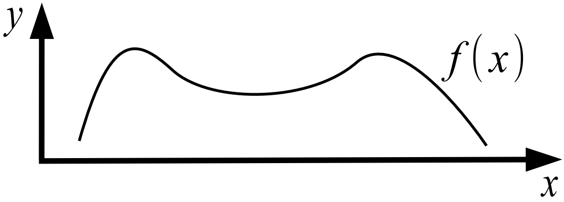
$$S = \frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi)d\varphi.$$

Длина дуги кривой

Длина дуги кривой

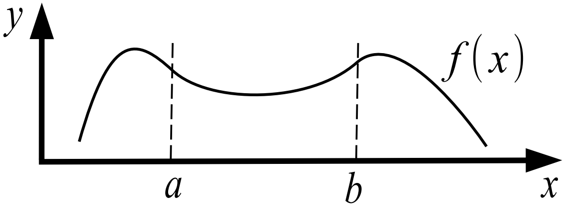


Длина дуги кривой

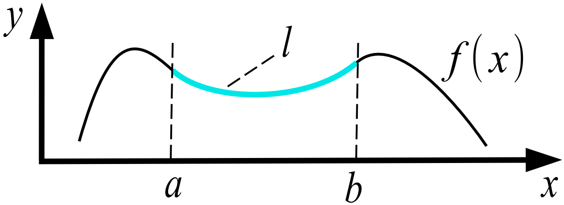


Рассмотрим **произвольную** функцию $y = f(x)$,

Длина дуги кривой

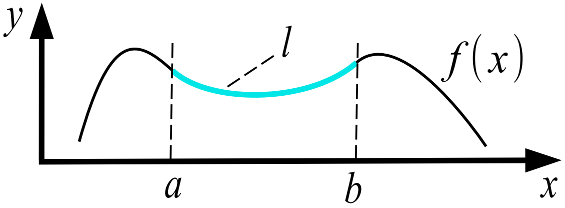


Рассмотрим **произвольную** функцию $y=f(x)$, **непрерывно-дифференцируемую** на отрезке $[a, b]$.



Длина l дуги, представляющей собой график функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$,

Длина дуги кривой



Длина l дуги, представляющей собой график функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$, вычисляется по формуле

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Если **произвольная** функция $y = f(x)$ задана параметрически с помощью системы **непрерывно-дифференцируемых** функций

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$$

Если **произвольная** функция $y = f(x)$ задана параметрически с помощью системы **непрерывно-дифференцируемых** функций

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$$

то длина дуги, являющейся графиком этой функции на отрезке $[a; b]$, определяется по формуле

$$l = \int\limits_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt,$$

Длина дуги кривой

$$l = \int\limits_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt,$$

Длина дуги кривой

$$l = \int\limits_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt,$$

Длина дуги кривой

$$l = \int\limits_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt,$$

Длина дуги кривой

$$l = \int\limits_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt,$$

Длина дуги кривой

$$l = \int\limits_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt,$$

Длина дуги кривой

$$l = \int\limits_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt,$$

Длина дуги кривой

$$l = \int\limits_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x')^2 + (y')^2}dt,$$

где t_1 и t_2 соответствуют крайним точкам дуги,

Длина дуги кривой

$$l = \int\limits_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt,$$

где t_1 и t_2 соответствуют крайним точкам дуги, t_1 всегда должен быть **меньше** t_2,

Длина дуги кривой

$$l = \int\limits_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt,$$

где t_1 и t_2 соответствуют крайним точкам дуги, t_1 всегда должен быть **меньше** t_2, при этом t_1 может соответствовать как начальной $(x = a)$, так и конечной $(x = b)$ точке дуги.

Рассмотрим **непрерывно-дифференцируемую** функцию $\rho = \rho(\varphi)$, заданную в полярной системе координат.

Длина дуги кривой

Рассмотрим **непрерывно-дифференцируемую** функцию $\rho = \rho(\varphi)$, заданную в полярной системе координат. Длина дуги кривой, являющейся графиком этой функции, вычисляется по формуле

$$l = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2} d\varphi,$$

Длина дуги кривой

Рассмотрим **непрерывно-дифференцируемую** функцию $\rho = \rho(\varphi)$, заданную в полярной системе координат. Длина дуги кривой, являющейся графиком этой функции, вычисляется по формуле

$$l = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2} d\varphi,$$

где α и β – значения полярного угла φ в крайних точках дуги, $\alpha \leq \beta$.

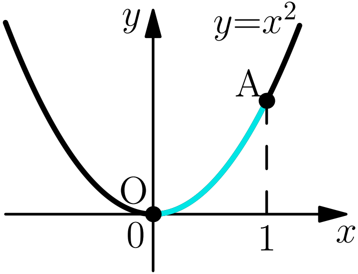
Длина дуги кривой

Пример:

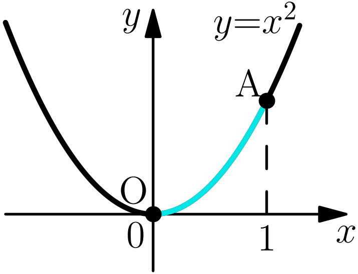
Длина дуги кривой

Пример: Найти длину дуги OA параболы $y = x^2$, $0 \le x \le 1$.

Пример: Найти длину дуги OA параболы $y = x^2$, $0 \leq x \leq 1$.



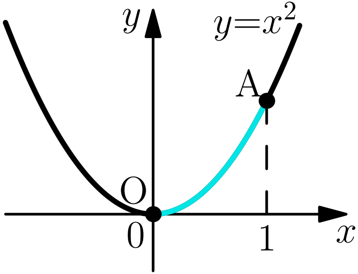
Пример: Найти длину дуги OA



параболы $y = x^2$, $0 \leq x \leq 1$.

Поскольку $f'(x) = (x^2)' = 2x$,

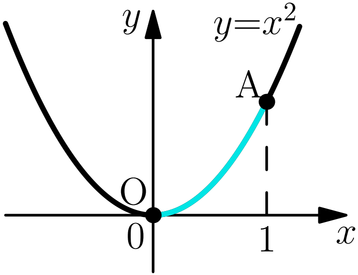
Пример: Найти длину дуги OA



параболы $y = x^2$, $0 \le x \le 1$.

Поскольку $f'(x) = (x^2)' = 2x$, то длина дуги OA вычисляется по формуле

Пример: Найти длину дуги OA

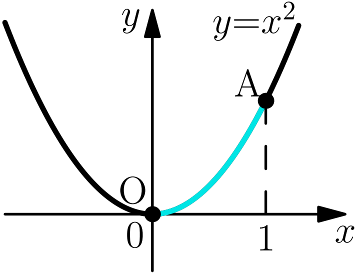


параболы $y = x^2$, $0 \leq x \leq 1$.

Поскольку $f'(x) = (x^2)' = 2x$, то длина дуги OA вычисляется по формуле

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Пример: Найти длину дуги OA

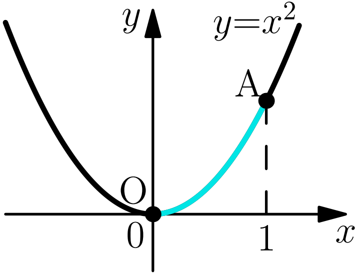


параболы $y = x^2$, $0 \leq x \leq 1$.

Поскольку $f'(x) = (x^2)' = 2x$, то длина дуги OA вычисляется по формуле

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx = \int_0^1 \sqrt{1 + (2x)^2}dx$$

Пример: Найти длину дуги OA

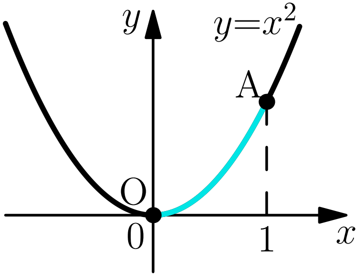


параболы $y = x^2$, $0 \leq x \leq 1$.

Поскольку $f'(x) = (x^2)' = 2x$, то длина дуги OA вычисляется по формуле

$$l = \int_0^1 \sqrt{1 + (2x)^2}dx$$

Пример: Найти длину дуги OA

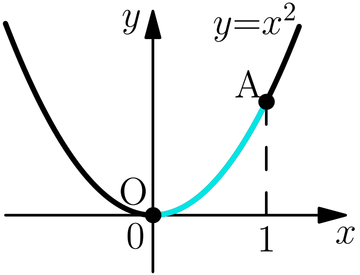


параболы $y = x^2$, $0 \le x \le 1$.

Поскольку $f'(x) = (x^2)' = 2x$, то длина дуги OA вычисляется по формуле

$$l = \int_0^1 \sqrt{1 + (2x)^2}\,dx$$

Пример: Найти длину дуги OA

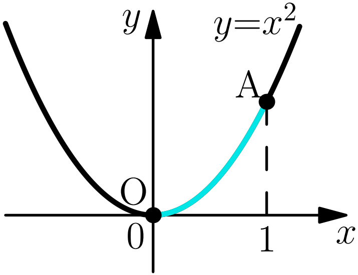


параболы $y = x^2$, $0 \le x \le 1$.

Поскольку $f'(x) = (x^2)' = 2x$, то длина дуги OA вычисляется по формуле

$$l = \int_0^1 \sqrt{1 + (2x)^2}dx$$

Пример: Найти длину дуги OA



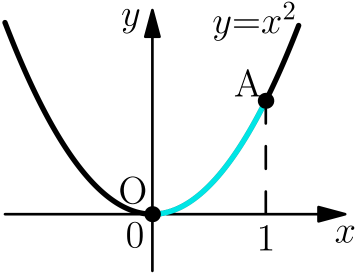
параболы $y = x^2$, $0 \le x \le 1$.

Поскольку $f'(x) = (x^2)' = 2x$, то длина дуги OA вычисляется по формуле

$$l = \int_0^1 \sqrt{1 + (2x)^2}\,dx$$

Длина дуги кривой

Пример: Найти длину дуги OA

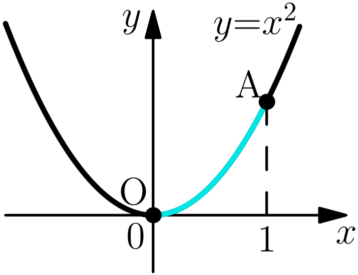


параболы $y = x^2$, $0 \leq x \leq 1$.

Поскольку $f'(x) = (x^2)' = 2x$, то длина дуги OA вычисляется по формуле

$$l = \int\limits_0^1 \sqrt{1 + (2x)^2} dx$$

Пример: Найти длину дуги OA



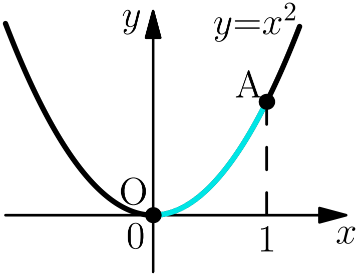
параболы $y = x^2$, $0 \leq x \leq 1$.

Поскольку $f'(x) = (x^2)' = 2x$, то длина дуги OA вычисляется по формуле

$$l = \int_0^1 \sqrt{1 + (2x)^2} dx = \int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2} dx.$$

Длина дуги кривой

Пример: Найти длину дуги OA

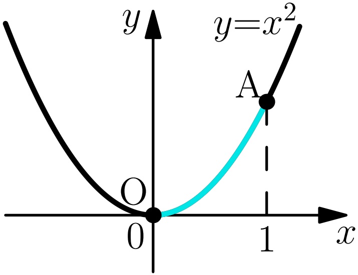


параболы $y = x^2$, $0 \leq x \leq 1$.

Поскольку $f'(x) = (x^2)' = 2x$, то длина дуги OA вычисляется по формуле

$$l = \int\limits_0^1 \sqrt{1 + 4x^2}dx.$$

Пример: Найти длину дуги OA

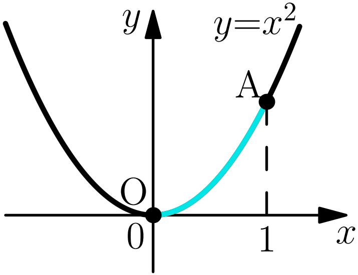


параболы $y = x^2$, $0 \leq x \leq 1$.

Поскольку $f'(x) = (x^2)' = 2x$, то длина дуги OA вычисляется по формуле

$$l = \int_0^1 \sqrt{1+4x^2}dx.$$

Пример: Найти длину дуги OA

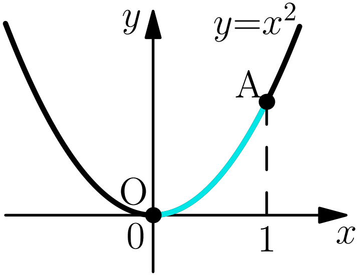


параболы $y = x^2$, $0 \leq x \leq 1$.

Поскольку $f'(x) = (x^2)' = 2x$, то длина дуги OA вычисляется по формуле

$$l = \int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2}\,dx.$$

Пример: Найти длину дуги OA

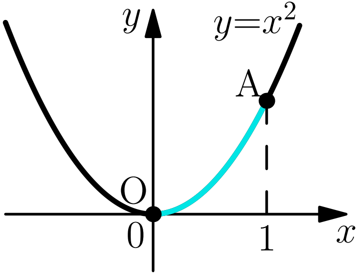


параболы $y = x^2$, $0 \leq x \leq 1$.

Поскольку $f'(x) = (x^2)' = 2x$, то длина дуги OA вычисляется по формуле

$$l = \int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2}\,dx.$$

Пример: Найти длину дуги OA

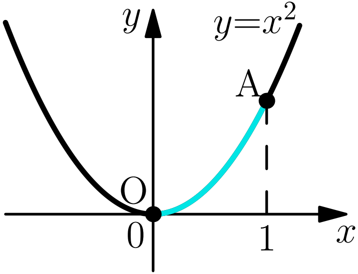


параболы $y = x^2$, $0 \le x \le 1$.

Поскольку $f'(x) = (x^2)' = 2x$, то длина дуги OA вычисляется по формуле

$$l = \int\limits_0^1 \sqrt{1 + 4x^2}dx.$$

Пример: Найти длину дуги OA



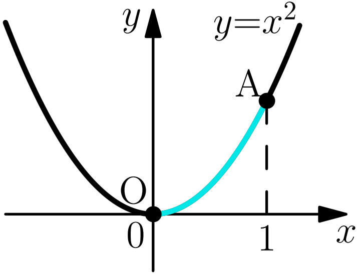
параболы $y = x^2$, $0 \leq x \leq 1$.

$$l = \int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2} dx$$

Поскольку $f'(x) = (x^2)' = 2x$, то длина дуги OA вычисляется по формуле

$$l = \int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2} dx.$$

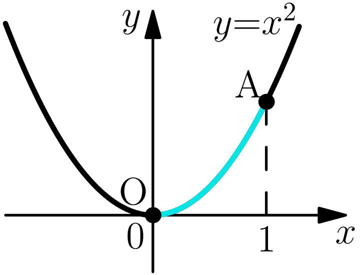
Пример: Найти длину дуги OA параболы $y = x^2$, $0 \le x \le 1$.



$$l = \int\limits_0^1 \sqrt{1+4x^2}dx$$

Длина дуги кривой

Пример: Найти длину дуги OA



параболы $y = x^2$, $0 \le x \le 1$.

$$l = \int_0^1 \sqrt{1+4x^2}dx$$

Сначала найдем неопределенный интеграл

$$\int \sqrt{1+4x^2}dx,$$

используя метод интегрирования по частям.

Длина дуги кривой

Пример: Найти длину дуги OA

параболы $y = x^2$, $0 \leq x \leq 1$.

$\int \sqrt{1 + 4x^2} dx$

Пример: Найти длину дуги OA

параболы $y = x^2$, $0 \leq x \leq 1$.

$$\int \sqrt{1+4x^2}dx =$$

$$= \left| \qquad \right|$$

Пример: Найти длину дуги OA

параболы $y = x^2$, $0 \leq x \leq 1$.

$$\int \sqrt{1+4x^2}dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} u = \sqrt{1+4x^2} \\ \\ \end{array} \right|$$

Длина дуги кривой

Пример: Найти длину дуги OA

параболы $y = x^2$, $0 \leq x \leq 1$.

$$\int \sqrt{1 + 4x^2} dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} u = \sqrt{1 + 4x^2} \\ dv = dx \end{array} \right|$$

Пример: Найти длину дуги OA параболы $y = x^2$, $0 \le x \le 1$.

$$\int \sqrt{1+4x^2}dx =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} u = \sqrt{1+4x^2} & du = 4xdx/\sqrt{1+4x^2} \\ dv = dx & \end{array} \right|$$

Пример: Найти длину дуги OA параболы $y = x^2$, $0 \leq x \leq 1$.

$$\int \sqrt{1+4x^2}dx =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} u = \sqrt{1+4x^2} & du = 4xdx/\sqrt{1+4x^2} \\ dv = dx & v = x \end{array} \right|$$

Пример: Найти длину дуги OA параболы $y = x^2$, $0 \leq x \leq 1$.

$$\int \sqrt{1+4x^2}dx =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} u = \sqrt{1+4x^2} & du = 4xdx/\sqrt{1+4x^2} \\ dv = dx & v = x \end{array} \right| =$$

$$= uv - \int vdu$$

Длина дуги кривой

Пример: Найти длину дуги OA

параболы $y = x^2$, $0 \le x \le 1$.

$$\int \sqrt{1+4x^2}dx =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} u = \sqrt{1+4x^2} & du = 4xdx/\sqrt{1+4x^2} \\ dv = dx & v = x \end{array} \right| =$$

$$= uv - \int vdu =$$

$$= x\sqrt{1+4x^2} - \int \frac{4x^2}{\sqrt{1+4x^2}}dx$$

Пример: Найти длину дуги OA

параболы $y = x^2$, $0 \le x \le 1$.

$$\int \sqrt{1+4x^2}dx =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} u = \sqrt{1+4x^2} & du = 4xdx/\sqrt{1+4x^2} \\ dv = dx & v = x \end{array} \right| =$$

$$= uv - \int vdu =$$

$$= x\sqrt{1+4x^2} - \int \frac{4x^2}{\sqrt{1+4x^2}}dx =$$

$$= x\sqrt{1+4x^2} - \int \frac{4x^2 + 1 - 1}{\sqrt{1+4x^2}}dx$$

Пример: Найти длину дуги OA

параболы $y = x^2$, $0 \leq x \leq 1$.

$$\int \sqrt{1+4x^2}dx =$$

$$= x\sqrt{1+4x^2} - \int \frac{4x^2 + 1 - 1}{\sqrt{1+4x^2}}dx$$

Пример: Найти длину дуги OA параболы $y = x^2$, $0 \le x \le 1$.

$$\int \sqrt{1+4x^2}dx =$$

$$= x\sqrt{1+4x^2} - \int \frac{4x^2 + 1 - 1}{\sqrt{1+4x^2}}dx$$

Длина дуги кривой

Пример: Найти длину дуги OA

параболы $y = x^2$, $0 \le x \le 1$.

$$\int \sqrt{1+4x^2}dx =$$

$$= x\sqrt{1+4x^2} - \int \frac{4x^2 + 1 - 1}{\sqrt{1+4x^2}}dx$$

Пример: Найти длину дуги OA параболы $y = x^2$, $0 \leq x \leq 1$.

$$\int \sqrt{1+4x^2}dx =$$

$$= x\sqrt{1+4x^2} - \int \frac{4x^2 + 1 - 1}{\sqrt{1+4x^2}}dx$$

Пример: Найти длину дуги OA

параболы $y = x^2$, $0 \leq x \leq 1$.

$$\int \sqrt{1+4x^2}dx =$$

$$= x\sqrt{1+4x^2} - \int \frac{4x^2 + 1 - 1}{\sqrt{1+4x^2}}dx$$

Пример: Найти длину дуги OA

параболы $y = x^2$, $0 \le x \le 1$.

$$\int \sqrt{1+4x^2}dx =$$

$$= x\sqrt{1+4x^2} - \int \frac{4x^2+1-1}{\sqrt{1+4x^2}}dx =$$

$$= x\sqrt{1+4x^2} - \int \left(\frac{4x^2+1}{\sqrt{1+4x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+4x^2}} \right) dx$$

Длина дуги кривой

Пример: Найти длину дуги OA

параболы $y = x^2$, $0 \le x \le 1$.

$$\int \sqrt{1+4x^2}dx =$$

$$= x\sqrt{1+4x^2} - \int \frac{4x^2+1-1}{\sqrt{1+4x^2}}dx =$$

$$= x\sqrt{1+4x^2} - \int \left(\frac{4x^2+1}{\sqrt{1+4x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+4x^2}}\right)dx =$$

$$= x\sqrt{1+4x^2} - \int \left(\sqrt{1+4x^2} - \frac{1}{\sqrt{1+4x^2}}\right)dx$$

Пример: Найти длину дуги OA

параболы $y = x^2$, $0 \leq x \leq 1$.

$\int \sqrt{1+4x^2}dx =$

$$=x\sqrt{1+4x^2} - \int \left(\sqrt{1+4x^2} - \frac{1}{\sqrt{1+4x^2}} \right) dx$$

Пример: Найти длину дуги OA

параболы $y = x^2$, $0 \le x \le 1$.

$$\int \sqrt{1+4x^2}dx =$$

$$= x\sqrt{1+4x^2} - \int \left(\sqrt{1+4x^2} - \frac{1}{\sqrt{1+4x^2}} \right) dx$$

Длина дуги кривой

Пример: Найти длину дуги OA

параболы $y = x^2$, $0 \le x \le 1$.

$$\int \sqrt{1+4x^2}dx =$$

$$= x\sqrt{1+4x^2} - \int \left(\sqrt{1+4x^2} - \frac{1}{\sqrt{1+4x^2}} \right) dx$$

Пример: Найти длину дуги OA

параболы $y = x^2$, $0 \le x \le 1$.

$$\int \sqrt{1+4x^2}dx =$$

$$= x\sqrt{1+4x^2} - \int \left(\sqrt{1+4x^2} - \frac{1}{\sqrt{1+4x^2}} \right) dx$$

Пример: Найти длину дуги OA параболы $y = x^2$, $0 \le x \le 1$.

$$\int \sqrt{1+4x^2}dx =$$

$$= x\sqrt{1+4x^2} - \int \left(\sqrt{1+4x^2} - \frac{1}{\sqrt{1+4x^2}} \right) dx$$

Длина дуги кривой

Пример: Найти длину дуги OA

параболы $y = x^2$, $0 \leq x \leq 1$.

$$\int \sqrt{1+4x^2}dx =$$

$$= x\sqrt{1+4x^2} - \int \left(\sqrt{1+4x^2} - \frac{1}{\sqrt{1+4x^2}} \right) dx =$$

$$= x\sqrt{1+4x^2} - \int \sqrt{1+4x^2}dx + \int \frac{1}{\sqrt{1+4x^2}}dx$$

Длина дуги кривой

Пример: Найти длину дуги OA

параболы $y = x^2$, $0 \leq x \leq 1$.

$$\int \sqrt{1+4x^2}dx =$$

$$= x\sqrt{1+4x^2} - \int \left(\sqrt{1+4x^2} - \frac{1}{\sqrt{1+4x^2}} \right) dx =$$

$$= x\sqrt{1+4x^2} - \int \sqrt{1+4x^2}dx + \int \frac{1}{\sqrt{1+4x^2}}dx =$$

$$= x\sqrt{1+4x^2} - \int \sqrt{1+4x^2}dx +$$

$$+ \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{1+(2x)^2}} d(2x)$$

Длина дуги кривой

Пример: Найти длину дуги OA

параболы $y = x^2$, $0 \leq x \leq 1$.

$$\int \sqrt{1+4x^2}dx =$$

$$= x\sqrt{1+4x^2} - \int \sqrt{1+4x^2}dx +$$

$$+ \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{1+(2x)^2}} d(2x)$$

Пример: Найти длину дуги OA параболы $y = x^2$, $0 \le x \le 1$.

$$\int \sqrt{1+4x^2}dx =$$

$$= x\sqrt{1+4x^2} - \int \sqrt{1+4x^2}dx + \\ + \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1+(2x)^2}}d(2x)$$

Длина дуги кривой

Пример: Найти длину дуги OA

параболы $y = x^2$, $0 \le x \le 1$.

$$\int \sqrt{1+4x^2}dx =$$

$$= x\sqrt{1+4x^2} - \int \sqrt{1+4x^2}dx +$$

$$+ \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1+(2x)^2}}d(2x)$$

Длина дуги кривой

Пример: Найти длину дуги OA

параболы $y = x^2$, $0 \le x \le 1$.

$$\int \sqrt{1+4x^2}\,dx =$$

$$= x\sqrt{1+4x^2} - \int \sqrt{1+4x^2}\,dx +$$

$$+ \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1+(2x)^2}}\,d(2x)$$

Пример: Найти длину дуги OA

параболы $y = x^2$, $0 \leq x \leq 1$.

$$\int \sqrt{1+4x^2}dx =$$

$$= x\sqrt{1+4x^2} - \int \sqrt{1+4x^2}dx +$$

$$+\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1+(2x)^2}}d(2x)$$

Пример: Найти длину дуги OA

параболы $y = x^2$, $0 \le x \le 1$.

$$\int \sqrt{1+4x^2}dx =$$

$$= x\sqrt{1+4x^2} - \int \sqrt{1+4x^2}dx + $$
$$+ \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1+(2x)^2}}d(2x) =$$

$$= x\sqrt{1+4x^2} - \int \sqrt{1+4x^2}dx + $$
$$+ \frac{1}{2}\ln\left|2x + \sqrt{1+(2x)^2}\right| + C.$$

Длина дуги кривой

Пример: Найти длину дуги OA

параболы $y = x^2$, $0 \le x \le 1$.

$\int \sqrt{1+4x^2}dx =$

$$= x\sqrt{1+4x^2} - \int \sqrt{1+4x^2}dx +$$

$$+\frac{1}{2}\ln\left|2x + \sqrt{1+(2x)^2}\right| + C.$$

Пример: Найти длину дуги OA

параболы $y = x^2$, $0 \leq x \leq 1$.

$$\int \sqrt{1+4x^2}dx =$$

$$= x\sqrt{1+4x^2} - \int \sqrt{1+4x^2}dx +$$

$$+ \frac{1}{2} \ln \left|2x + \sqrt{1+(2x)^2}\right| + C.$$

Длина дуги кривой

Пример: Найти длину дуги OA

параболы $y = x^2$, $0 \le x \le 1$.

$$\int \sqrt{1+4x^2}dx =$$

$$= x\sqrt{1+4x^2} - \int \sqrt{1+4x^2}dx +$$

$$+\frac{1}{2}\ln\left|2x + \sqrt{1+(2x)^2}\right| + C.$$

Длина дуги кривой

Пример: Найти длину дуги OA

параболы $y = x^2$, $0 \le x \le 1$.

$$\int \sqrt{1+4x^2}dx =$$

$$= x\sqrt{1+4x^2} - \int \sqrt{1+4x^2}dx +$$

$$+ \frac{1}{2}\ln\left|2x + \sqrt{1+(2x)^2}\right| + C.$$

Длина дуги кривой

Пример: Найти длину дуги OA

параболы $y = x^2$, $0 \le x \le 1$.

$$\int \sqrt{1+4x^2}dx =$$

$$= x\sqrt{1+4x^2} - \int \sqrt{1+4x^2}dx +$$

$$+\frac{1}{2}\ln|2x + \sqrt{1+(2x)^2}| + C.$$

Длина дуги кривой

Пример: Найти длину дуги OA

параболы $y = x^2$, $0 \le x \le 1$.

$$\int \sqrt{1+4x^2}dx =$$

$$= x\sqrt{1+4x^2} - \int \sqrt{1+4x^2}dx +$$

$$+\frac{1}{2}\ln|2x+\sqrt{1+(2x)^2}| + C.$$

Выражаем из этого равенства интеграл:

Пример: Найти длину дуги OA

параболы $y = x^2$, $0 \le x \le 1$.

$$\int \sqrt{1+4x^2}dx =$$

$$= x\sqrt{1+4x^2} - \int \sqrt{1+4x^2}dx +$$

$$+\frac{1}{2}\ln\left|2x+\sqrt{1+(2x)^2}\right| + C.$$

Выражаем из этого равенства интеграл:

$$\int \sqrt{1+4x^2}dx =$$

$$= \tfrac{1}{2}x\sqrt{1+4x^2} + \tfrac{1}{4}\ln\left|2x+\sqrt{1+(2x)^2}\right| + C.$$

Пример: Найти длину дуги OA

параболы $y = x^2$, $0 \leq x \leq 1$.

$$\int \sqrt{1+4x^2}dx =$$

$$= \frac{1}{2}x\sqrt{1+4x^2} + \frac{1}{4}\ln\left|2x + \sqrt{1+(2x)^2}\right| + C.$$

Пример: Найти длину дуги OA параболы $y = x^2$, $0 \leq x \leq 1$.

$$\int \sqrt{1+4x^2}dx =$$

$$= \frac{1}{2}x\sqrt{1+4x^2} + \frac{1}{4}\ln\left|2x + \sqrt{1+(2x)^2}\right| + C.$$

Пример: Найти длину дуги OA

параболы $y = x^2$, $0 \le x \le 1$.

$$\int \sqrt{1+4x^2}dx =$$

$$= \frac{1}{2}x\sqrt{1+4x^2} + \frac{1}{4}\ln\left|2x + \sqrt{1+(2x)^2}\right| + C.$$

Длина дуги кривой

Пример: Найти длину дуги OA

параболы $y = x^2$, $0 \leq x \leq 1$.

$$\int \sqrt{1+4x^2}dx =$$

$$= \frac{1}{2}x\sqrt{1+4x^2} + \frac{1}{4}\ln\left|2x + \sqrt{1+(2x)^2}\right| + C.$$

Длина дуги кривой

Пример: Найти длину дуги OA

параболы $y = x^2$, $0 \le x \le 1$.

$$\int \sqrt{1+4x^2}dx =$$

$$= \frac{1}{2}x\sqrt{1+4x^2} + \frac{1}{4}\ln\left|2x + \sqrt{1+(2x)^2}\right| + C.$$

Длина дуги кривой

Пример: Найти длину дуги OA

параболы $y = x^2$, $0 \leq x \leq 1$.

$$\int \sqrt{1+4x^2}dx =$$

$$= \frac{1}{2}x\sqrt{1+4x^2} + \frac{1}{4}\ln\left|2x + \sqrt{1+(2x)^2}\right| + C.$$

Тогда по формуле Ньютона-Лейбница вычисляем длину дуги OA.

Пример: Найти длину дуги OA

параболы $y = x^2$, $0 \le x \le 1$.

$$\int \sqrt{1+4x^2}dx =$$

$$= \frac{1}{2}x\sqrt{1+4x^2} + \frac{1}{4}\ln\left|2x + \sqrt{1+(2x)^2}\right| + C.$$

$$l = \int_0^1 \sqrt{1+4x^2}dx =$$

Пример: Найти длину дуги OA параболы $y = x^2$, $0 \le x \le 1$.

$$\int \sqrt{1+4x^2}dx =$$

$$= \frac{1}{2}x\sqrt{1+4x^2} + \frac{1}{4}\ln\left|2x + \sqrt{1+(2x)^2}\right| + C.$$

$$l = \int_0^1 \sqrt{1+4x^2}dx =$$

$$= \left(\frac{1}{2}x\sqrt{1+4x^2} + \frac{1}{4}\ln\left|2x + \sqrt{1+(2x)^2}\right|\right)\Bigg|_0^1$$

Пример: Найти длину дуги OA

параболы $y = x^2$, $0 \le x \le 1$.

$$\int \sqrt{1+4x^2}dx =$$

$$= \frac{1}{2}x\sqrt{1+4x^2} + \frac{1}{4}\ln\left|2x + \sqrt{1+(2x)^2}\right| + C.$$

$$I = \int_0^1 \sqrt{1+4x^2}dx =$$

$$= \left(\frac{1}{2}x\sqrt{1+4x^2} + \frac{1}{4}\ln\left|2x + \sqrt{1+(2x)^2}\right|\right)\Bigg|_0^1$$

Пример: Найти длину дуги OA

параболы $y = x^2$, $0 \le x \le 1$.

$$\int \sqrt{1+4x^2}dx =$$

$$= \frac{1}{2}x\sqrt{1+4x^2} + \frac{1}{4}\ln\left|2x + \sqrt{1+(2x)^2}\right| + C.$$

$$I = \int_0^1 \sqrt{1+4x^2}dx =$$

$$= \left(\frac{1}{2}x\sqrt{1+4x^2} + \frac{1}{4}\ln\left|2x + \sqrt{1+(2x)^2}\right|\right)\Bigg|_0^1$$

Пример: Найти длину дуги OA

параболы $y = x^2$, $0 \leq x \leq 1$.

$$l = \int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2}dx =$$

$$= \left(\frac{1}{2}x\sqrt{1 + 4x^2} + \frac{1}{4}\ln\left|2x + \sqrt{1 + (2x)^2}\right| \right)\Bigg|_0^1$$

Пример: Найти длину дуги OA

параболы $y = x^2$, $0 \leq x \leq 1$.

$$I = \int_0^1 \sqrt{1+4x^2}dx =$$

$$= \left(\frac{1}{2} x\sqrt{1+4x^2} + \frac{1}{4} \ln \left|2x + \sqrt{1+(2x)^2}\right| \right) \Big|_0^1$$

Длина дуги кривой

Пример: Найти длину дуги OA

параболы $y = x^2$, $0 \le x \le 1$.

$$l = \int_0^1 \sqrt{1+4x^2}\,dx =$$

$$= \left(\frac{1}{2}x\sqrt{1+4x^2} + \frac{1}{4}\ln\left|2x + \sqrt{1+(2x)^2}\right|\right)\Bigg|_0^1$$

Пример: Найти длину дуги OA параболы $y = x^2$, $0 \le x \le 1$.

$$I = \int_0^1 \sqrt{1+4x^2}dx =$$

$$= \left(\frac{1}{2}x\sqrt{1+4x^2} + \frac{1}{4}\ln\left|2x + \sqrt{1+(2x)^2}\right| \right)\Bigg|_0^1$$

Длина дуги кривой

Пример: Найти длину дуги OA

параболы $y = x^2$, $0 \le x \le 1$.

$$l = \int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2}dx =$$

$$= \left(\frac{1}{2}x\sqrt{1 + 4x^2} + \frac{1}{4}\ln\left|2x + \sqrt{1 + (2x)^2}\right|\right)\Bigg|_0^1$$

Длина дуги кривой

Пример: Найти длину дуги OA

параболы $y = x^2$, $0 \le x \le 1$.

$$l = \int_0^1 \sqrt{1+4x^2}dx =$$

$$= \left(\tfrac{1}{2}x\sqrt{1+4x^2} + \tfrac{1}{4}\ln\left|2x + \sqrt{1+(2x)^2}\right|\right)\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{4}\ln\left|2+\sqrt{5}\right|.$$