Интегралы и дифференциальные уравнения Модуль 2

Определенные и несобственные интегралы

Лекция 2.6

(для ГУИМЦ, 2025)

Аннотация

Несобственный интеграл второго рода, его геометрический смысл. Формула Ньютона-Лейбница. Сходимость, абсолютная сходимость. Признаки сравнения несобственных интегралов второго рода с неотрицательной подынтегральной функцией. Главное значение несобственных интегралов первого и второго родов.

1 Несобственный интеграл второго рода

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на полуинтервале $[a, b)$ и неограниченна слева от точки b:

$$\lim_{x \to b-0} f(x) = \infty.$$

Такая точка b называется **особой точкой** функции $f(x)$.

Определение

Несобственным интегралом второго рода на полуинтервале $[a, b)$ от функции $f(x)$, неограниченной слева от точки b, называется предел

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx.$$

Обозначение: $\int\limits_a^b f(x)dx$.

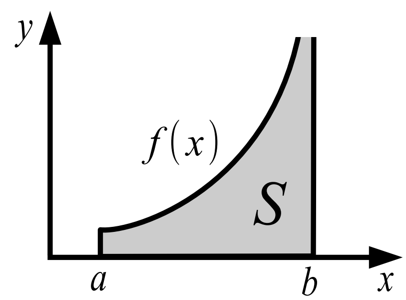
Замечание

Несобственный интеграл второго рода часто называют **интегралом от неограниченной функции**.

Геометрический смысл:

Рассмотрим бесконечно высокую справа криволинейную трапецию, ограниченную на полуинтервале $[a, b)$ сверху графиком функции $f(x)$ и снизу осью Ox. Трапеция ограничена слева прямой $x = a$, справа – прямой $x = b$, которая также служит вертикальной асимптотой графика функции $f(x)$. Площадь S этой трапеции численно равна несобственному интегралу второго рода от функции $f(x)$ на полуинтервале $[a, b)$:

$$S = \int_a^b f(x)dx.$$



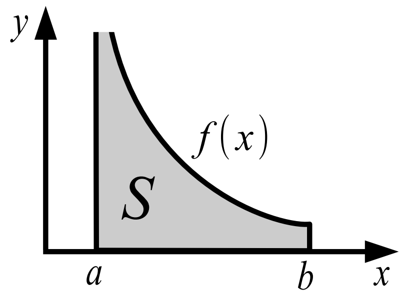
Аналогично, для функции $f(x)$, непрерывной на полуинтервале $(a, b]$ и неограниченной справа от точки a:

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = \infty,$$

несобственный интеграл второго рода определяется согласно равенству:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx.$$

Геометрически этот интеграл для функции $f(x) > 0$ представляет собой площадь бесконечно высокой слева криволинейной трапеции, а точка a является особой точкой функции $f(x)$.



Если функция $f(x)$ непрерывна во всех точках отрезка $[a, b]$ за исключением внутренней точки $c \in (a, b)$, в окрестности которой она не ограничена:

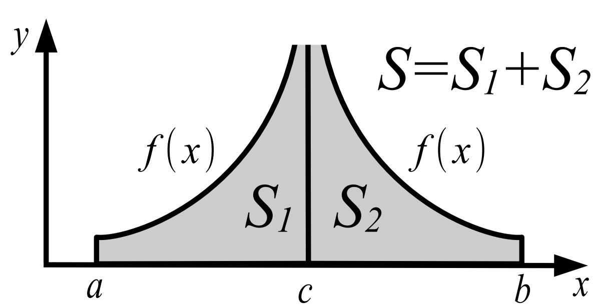
$$\lim_{x\to c+0} f(x) = \infty \text{ и } \lim_{x\to c-0} f(x) = \infty,$$

то несобственный интеграл второго рода по отрезку $[a, b]$ определяется как сумма двух несобственных интегралов по полуинтервалам $[a, c)$ и $(c, b]$:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon_1\to 0+} \int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx + \lim_{\varepsilon_2\to 0+} \int_{c+\varepsilon_2}^b f(x)dx.$$

Геометрически такой интеграл для функции $f(x) > 0$ представляет собой сумму площадей двух примыкающих друг к другу бесконечно высоких криволинейных трапеций, а точка c является особой точкой функции $f(x)$.



Пример:

Рассмотрим интеграл

$$\int\limits_a^b \frac{dx}{(x-a)^2}.$$

Точка a является особой для подынтегральной функции

$$f(x) = \frac{1}{(x-a)^2},$$

так как

$$\lim_{\varepsilon\to a+0} \frac{1}{(x-a)^2} = +\infty,$$

а значит, исходный интеграл является несобственным.

Вычислим несобственный интеграл по определению:

$$\int\limits_a^b \frac{dx}{(x-a)^2} = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int\limits_{a+\varepsilon}^b \frac{dx}{(x-a)^2} = \lim_{\varepsilon\to 0+} \left(-\frac{1}{x-a}\right)\Bigg|_{a+\varepsilon}^b =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0+} \left(-\frac{1}{b-a} + \frac{1}{\varepsilon}\right) = +\infty.$$

Формула Ньютона-Лейбница:

1. Если $F(x)$ – произвольная первообразная функции $f(x)$ на полуинтервале $[a, b)$ и b – особая точка функции $f(x)$, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\big|_a^{b-0} = \lim_{x\to b-0} F(x) - F(a).$$

2. Если $F(x)$ – произвольная первообразная функции $f(x)$ на полуинтервале $(a, b]$ и a – особая точка функции $f(x)$, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\big|_{a+0}^{b} = F(b) - \lim_{x\to a+0} F(x).$$

2 Сходимость

Определение

Если несобственный интеграл второго рода существует и равен конечному числу, то он называется **сходящимся**. В противном случае он называется **расходящимся**.

Рассмотрим признаки сравнения несобственных интегралов второго рода с **неотрицательной** подынтегральной функцией, позволяющие устанавливать сходимость интегралов, не вычисляя их.

1. Признак сходимости

Если $\forall x \in [a, b)$ $0 \le f(x) \le g(x)$, точка b – особая точка функций $f(x)$ и $g(x)$, при этом $\int\limits_a^b g(x)dx$ сходится, то $\int\limits_a^b f(x)dx$ также сходится.

2. Признак расходимости

Если $\forall x \in [a, b)$ $f(x) \ge g(x) \ge 0$, точка b – особая точка функций $f(x)$ и $g(x)$, при этом $\int\limits_a^b g(x)dx$ расходится, то $\int\limits_a^b f(x)dx$ также расходится.

3. Предельный признак сравнения

Если $\lim\limits_{x \to b-0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = K$, $0 < K < +\infty$, $\forall x \in [a, b)$ $f(x) \ge 0$, $g(x) > 0$ и точка b – особая точка функций $f(x)$ и $g(x)$, то интегралы $\int\limits_a^b f(x)dx$ и $\int\limits_a^b g(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно.

Замечание

Данные признаки сравнения справедливы и для случая, когда особой точкой является точка a.

В качестве **эталонных** несобственных интегралов второго рода, с которыми производится сравнение, используются интегралы вида

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^p}, \int_a^b \frac{dx}{(b-x)^p}, \ p>0,$$

которые сходятся при $p<1$ и расходятся при $p \geq 1$.

В рассматриваемых далее несобственных интегралах особой точкой может быть как точка a, так и точка b.

Определение

Несобственный интеграл второго рода

$$\int_a^b f(x)dx$$

называется **абсолютно сходящимся**, если сходится интеграл

$$\int_a^b |f(x)|dx.$$

Теорема (об абсолютной сходимости)

Если несобственный интеграл второго рода $\int_a^b |f(x)|dx$ сходится, то $\int_a^b f(x)dx$ также сходится.

Определение

Несобственный интеграл второго рода

$$\int_a^b f(x)dx$$

называется **условно сходящимся**, если он сам сходится, а интеграл

$$\int_a^b |f(x)|dx$$

расходится.

3 Главное значение несобственного интеграла

Рассмотрим несобственный интеграл первого рода по бесконечному промежутку

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int\limits_{c}^{+\infty} f(x)dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon_1\to+\infty} \int\limits_{-\varepsilon_1}^{c} f(x)dx + \lim_{\varepsilon_2\to+\infty} \int\limits_{c}^{\varepsilon_2} f(x)dx$$

и несобственный интеграл второго рода с особой точкой c внутри отрезка $[a, b]$

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = \int\limits_{a}^{c} f(x)dx + \int\limits_{c}^{b} f(x)dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon_1\to0+} \int\limits_{a}^{c-\varepsilon_1} f(x)dx + \lim_{\varepsilon_2\to0+} \int\limits_{c+\varepsilon_2}^{b} f(x)dx.$$

В обоих интегралах пределы по переменным ε_1 и ε_2 вычисляются независимо друг от друга. Положим $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$. Это позволяет в каждом интеграле формально переписать сумму двух пределов как предел суммы:

$$\lim_{\varepsilon_1\to(\cdot)} \ldots + \lim_{\varepsilon_2\to(\cdot)} \ldots \to \lim_{\varepsilon\to(\cdot)} \ldots + \lim_{\varepsilon\to(\cdot)} \ldots \to \lim_{\varepsilon\to(\cdot)} (\ldots + \ldots).$$

Значение получающегося предела называется **главным значением несобственного интеграла** и обозначается $V.p.$:

1. Главное значение несобственного интеграла первого рода

$$V.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to+\infty} \left(\int\limits_{-\varepsilon}^{c} f(x)dx + \int\limits_{c}^{\varepsilon} f(x)dx \right) = \lim_{\varepsilon\to+\infty} \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x)dx.$$

2. Главное значение несобственного интеграла второго рода

$$V.p. \int\limits_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to0+} \left(\int\limits_{a}^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int\limits_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx \right).$$