Интегралы и дифференциальные уравнения Модуль 2

Определенные и несобственные интегралы

Лекция 2.4

(для ГУИМЦ, 2025)

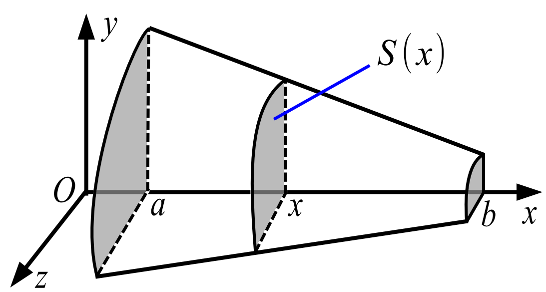
Аннотация

Вычисление объемов тел по площадям поперечных сечений и объемов тел вращения. Вычисление площади поверхности вращения.

1 Объем тела

1. Объем тела с известной площадью поперечного сечения.

Пусть тело располагается вдоль оси Ox между двумя плоскостями $x = a$ и $x = b$, проходящими перпендикулярно оси Ox. Для каждого $x \in [a, b]$ известна площадь $S(x)$ поперечного сечения тела.

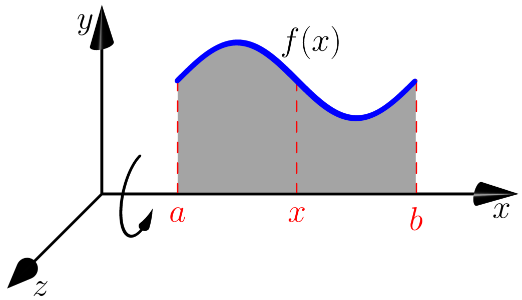


Тогда объем этого тела вычисляется по формуле

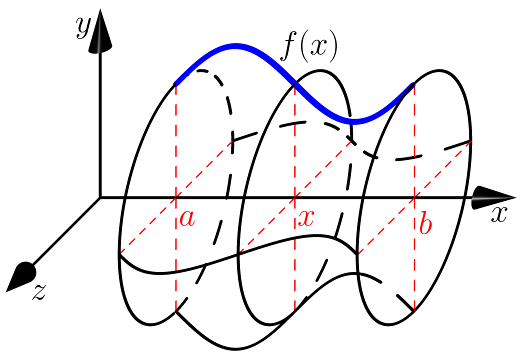
$$V = \int_a^b S(x)dx.$$

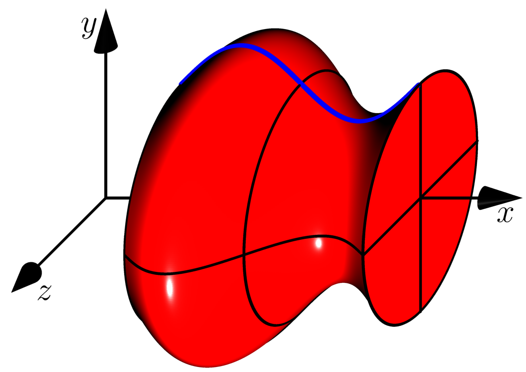
2. Объем тела вращения вокруг оси Ox.

Данное тело получается путем вращения вокруг оси Ox плоской фигуры, расположенной в плоскости Oxy и ограниченной осью Ox, вертикальными прямыми $x = a$, $x = b$ и графиком непрерывной **произвольной** функции $f(x)$.



В этом случае поперечные сечения тела представляют собой круги радиуса $|f(x)|$ и площади $S(x) = \pi f^2(x)$.

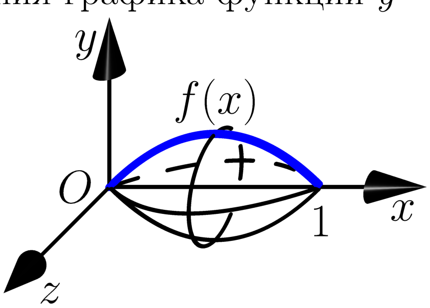


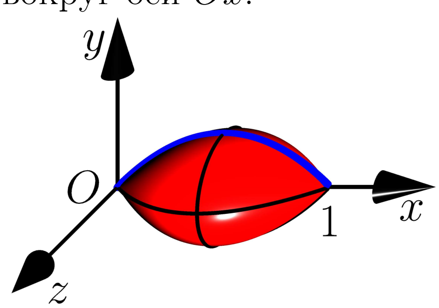


Используя формулу объема тела с известной площадью поперечного сечения, получаем формулу для вычисления объема тела вращения вокруг оси Ox:

$$V_x = \pi \int\limits_a^b f^2(x)dx.$$

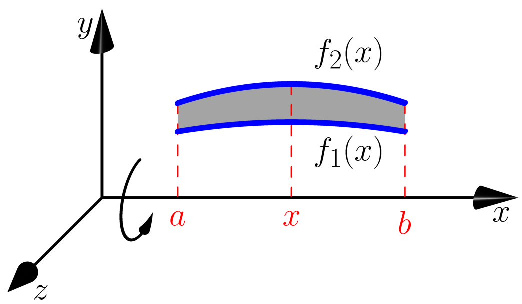
Пример: Вычислить объем тела, получающегося в результате вращения графика функции $y = x(1-x)$ вокруг оси Ox.



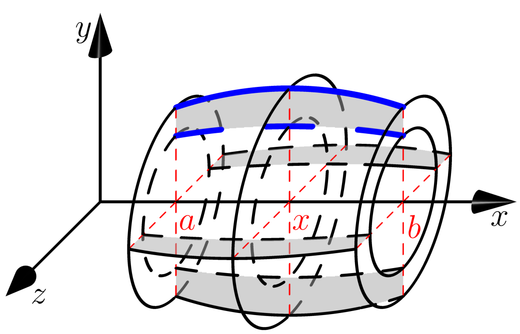


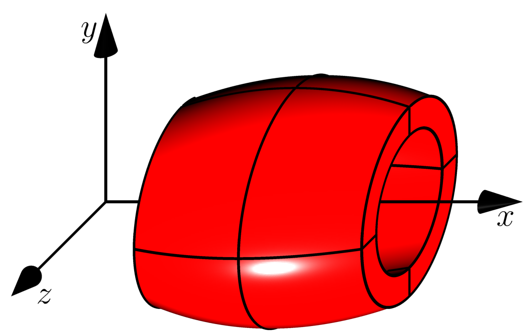
$$V_x = \pi \int_0^1 f^2(x)dx = \pi \int_0^1 x^2(1-x)^2dx = \pi \int_0^1 x^2(1-2x+x^2)dx =$$
$$= \pi \int_0^1 (x^2 - 2x^3 + x^4)dx = \pi \left(\frac{x^3}{3} - 2\frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} \right)\Bigg|_0^1 = \frac{\pi}{30}.$$

Пусть тело получается путем вращения вокруг оси Ox плоской фигуры, расположенной в плоскости Oxy, ограниченной вертикальными прямыми $x = a$, $x = b$ и графиками непрерывных **неотрицательных** функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$, причем $\forall x \in [a, b]$ $0 \le f_1(x) \le f_2(x)$.



Данное тело имеет в центре сквозное отверстие, а его поперечные сечения представляют собой кольца с площадью
$$S(x) = \pi f_2^2(x) - \pi f_1^2(x).$$

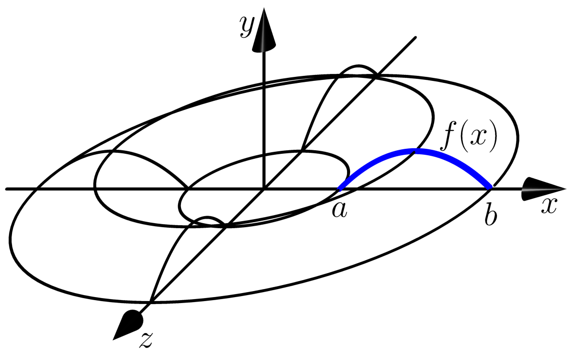


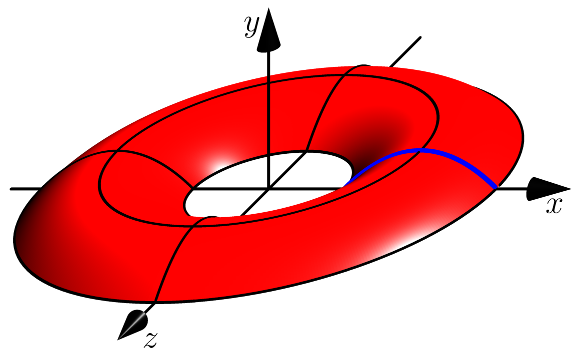


Зная площади поперечных сечений, получаем формулу для вычисления объема этого тела:
$$V_x = \pi \int_a^b (f_2^2(x) - f_1^2(x))dx.$$

3. Объем тела вращения вокруг оси Oy.

Данное тело получается путем вращения вокруг оси Oy плоской фигуры, расположенной в плоскости Oxy и ограниченной осью Ox, вертикальными прямыми $x = a$, $x = b$ и графиком непрерывной **произвольной** функции $f(x)$, причем $a \geq 0$ – плоская фигура должна целиком располагаться правее начала координат.

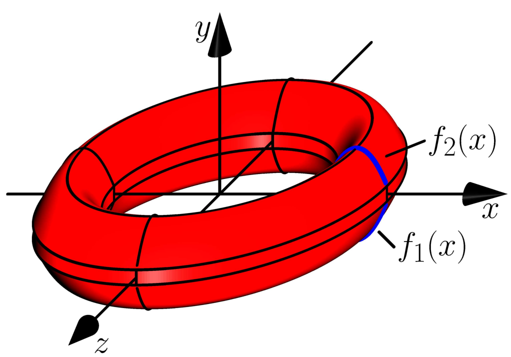




Объем такого тела вычисляется как

$$V_y = 2\pi \int_a^b x|f(x)|dx, a \geq 0.$$

Пусть тело получается путем вращения вокруг оси Oy плоской фигуры, расположенной в плоскости Oxy, ограниченной вертикальными прямыми $x = a$, $x = b$ и графиками непрерывных **произвольных** функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$, причем $\forall x \in [a, b]$ $f_1(x) \leq f_2(x)$ и $a \geq 0$.

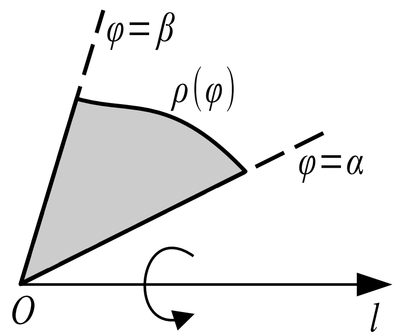


Объем такого тела вычисляется по формуле

$$V_y = 2\pi \int_a^b x(f_2(x) - f_1(x))dx, a \geq 0.$$

4. Объем тела вращения вокруг полярной оси l.

Данное тело получается путем вращения вокруг полярной оси l плоского сектора, ограниченного полярными радиусами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ и графиком непрерывной функции $\rho(\varphi)$, заданной в полярной системе координат, причем $0 \le \alpha \le \beta \le \pi$ – плоский сектор должен располагаться **над** полярной осью.



Объем такого тела вычисляется по формуле

$$V_l = \frac{2}{3}\pi \int\limits_{\alpha}^{\beta} \rho^3 \sin\varphi d\varphi.$$

2 Площадь поверхности вращения

1. Площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox графика **произвольной непрерывно-дифференцируемой** функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, вычисляется по формуле:

$$S_x = 2\pi \int\limits_a^b |f(x)|\sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

2. Если **произвольная** функция $f(x)$ задана параметрически с помощью системы **непрерывно-дифференцируемых** функций

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$$

то площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox

графика этой функции на отрезке $[a, b]$, определяется по формуле

$$S_x = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} |y(t)| \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt,$$

где t_1 и t_2 соответствуют крайним точкам графика функции $f(x)$, t_1 всегда должен быть **меньше** t_2, при этом t_1 может соответствовать как начальной $(x = a)$, так и конечной $(x = b)$ точке.

3. Рассмотрим **непрерывно-дифференцируемую** функцию $\rho(\varphi)$, заданную в полярной системе координат. Площадь поверхности, образованной вращением вокруг полярной оси l графика этой функции, расположенного **над** осью l и ограниченного полярными радиусами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$, вычисляется по формуле

$$S_l = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} \rho \sin\varphi \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2} d\varphi,$$

где $0 \leq \alpha \leq \beta \leq \pi$.