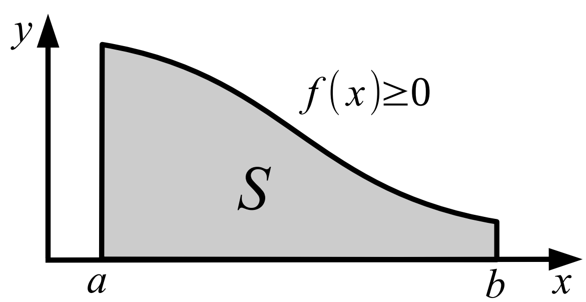
Интегралы и дифференциальные уравнения
Модуль 2
Определенные и несобственные интегралы
Лекция 2.3
(для ГУИМЦ, 2025)

Аннотация

Вычисление площадей плоских фигур, ограниченных кривыми, заданными в декартовых координатах, параметрически и в полярных координатах. Вычисление длины дуги кривой, заданной в декартовых координатах, параметрически и в полярных координатах.

1 Площадь плоской фигуры

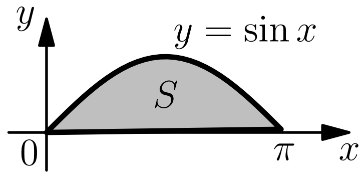
1. Рассмотрим плоскую фигуру, ограниченную графиком непрерывной **неотрицательной** функции $y = f(x)$, двумя вертикальными прямыми $x = a$, $x = b$ и осью Ox.



Площадь S этой фигуры вычисляется согласно геометрическому смыслу определенного интеграла по формуле

$$S = \int_a^b f(x)dx.$$

Пример: Найти площадь фигуры, ограниченной осью Ox и первой аркой синусоиды.



$$S = \int_0^{\pi} \sin x dx = -\cos x|_0^{\pi} = -(\cos\pi - \cos 0) = -(-1-1) = 2.$$

2. Часто **неотрицательную** функцию $y = f(x)$ бывает удобнее задавать в параметрическом виде с помощью системы функций

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$$

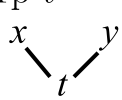
где t – параметр, определяющий значения переменных x и y, а сами функции $x(t)$ и $y(t)$ подбираются из условия

$$y(t) = f(x(t)).$$

Если при обычном способе задания функции переменные x и y связаны прямо

$$x — y$$

то в параметрическом виде переменные x и y связаны опосредовано через промежуточный параметр t

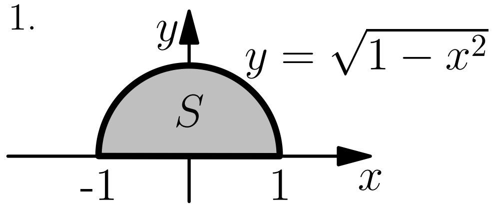


В этом случае согласно теореме о замене переменной в определенном интеграле площадь плоской фигуры вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b f(x)dx = \left| \begin{array}{l} x = x(t), f(x) = f(x(t)) = y(t), \\ dx = x'(t)dt, x(t_1) = a, x(t_2) = b \end{array} \right| = \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt.$$

Пределы интегрирования t_1 и t_2 находятся из условий $x(t_1) = a$ и $x(t_2) = b$, причем t_1 может быть как меньше, так и больше t_2. Также важно помнить, что $y(t) \geq 0$, когда t находится между t_1 и t_2.

Пример: Найти площадь верхней половины круга, задаваемого неравенством $x^2 + y^2 \le 1$.



Полукруг сверху ограничен графиком функции $y = \sqrt{1-x^2}$, вычисление интеграла от которой является достаточно трудоемким делом. Поэтому данную функцию лучше задать параметрически:

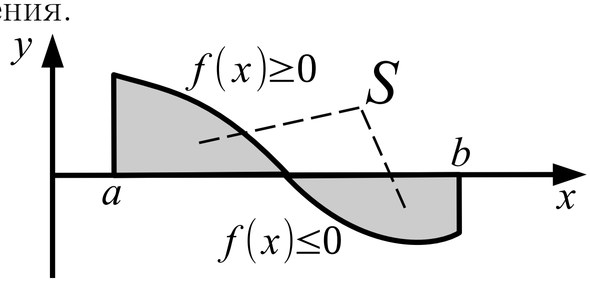
$$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \end{cases} \quad t \in [0; \pi].$$

Поскольку значения переменной x лежат на отрезке $[-1, 1]$, то из условий $x(t_1) = -1$ и $x(t_2) = 1$ находим крайние значения параметра t: $t_1 = \pi$, $t_2 = 0$. Тогда

$$S = \int\limits_{\pi}^{0} y(t)x'(t)dt = \int\limits_{\pi}^{0} \sin t(\cos t)'dt = \int\limits_{\pi}^{0} \sin t(-\sin t)dt =$$

$$= -\int\limits_{\pi}^{0} \sin^2 t dt = -\int\limits_{\pi}^{0} \frac{1-\cos 2t}{2}dt = -\frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_{\pi}^{0} = \frac{\pi}{2}.$$

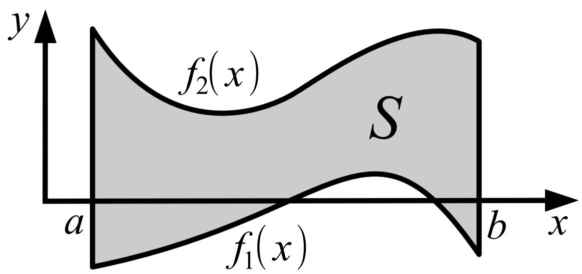
3. Рассмотрим непрерывную **произвольную** функцию $y = f(x)$, которая на отрезке $[a; b]$ принимает как положительные, так и отрицательные значения.



Тогда площадь фигуры, ограниченной графиком этой функции и осью Ox на отрезке $[a; b]$, вычисляется по формуле:

$$S = \int\limits_{a}^{b} |f(x)|dx.$$

4. Пусть плоская фигура ограничена снизу и сверху графиками непрерывных **произвольных** функций $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$, а слева и справа – прямыми $x = a$ и $x = b$.

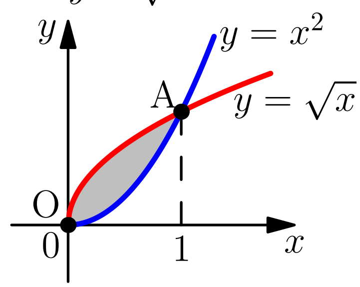


Площадь S этой фигуры вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx.$$

Функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ могут принимать отрицательные значения, но должно выполняться условие: $\forall x \in [a, b]\ f_2(x) \geq f_1(x)$.

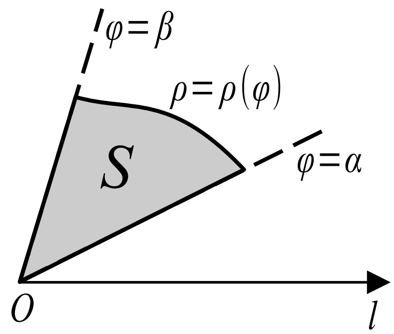
Пример: Найти площадь плоской фигуры, заключенной между графиками функций $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$.



Фигура ограничена сверху графиком функции $y = \sqrt{x}$, снизу - графиком функции $y = x^2$. Крайней левой точкой фигуры служит точка O с абсциссой $a = 0$. Крайней правой точкой фигуры является точка A с абсциссой $b = 1$. Тогда

$$S = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)dx = \left(\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{1}{3}x^3\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

5. Рассмотрим непрерывную функцию $\rho = \rho(\varphi)$, заданную в полярной системе координат. Плоская фигура, ограниченная графиком этой функции и двумя лучами $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$, называется **криволинейным сектором**.

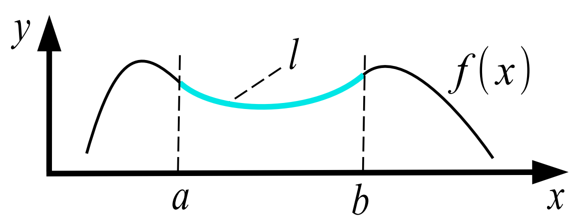


Площадь данного криволинейного сектора вычисляется по формуле:

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi)d\varphi.$$

2 Длина дуги кривой

1. Рассмотрим **произвольную** функцию $y = f(x)$, **непрерывно-дифференцируемую** на отрезке $[a, b]$.



Длина l дуги, представляющей собой график функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$, вычисляется по формуле

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx.$$

2. Если **произвольная** функция $y = f(x)$ задана параметрически с помощью системы **непрерывно-дифференцируемых** функций

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$$

то длина дуги, являющейся графиком этой функции на отрезке $[a; b]$, определяется по формуле

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x')^2 + (y')^2}dt,$$

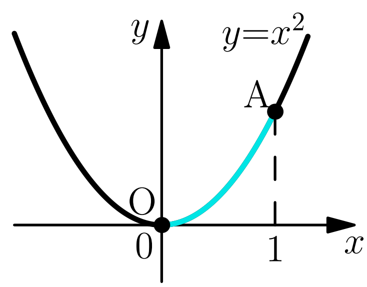
где t_1 и t_2 соответствуют крайним точкам дуги, t_1 всегда должен быть **меньше** t_2, при этом t_1 может соответствовать как начальной $(x = a)$, так и конечной $(x = b)$ точке дуги.

3. Рассмотрим **непрерывно-дифференцируемую** функцию $\rho = \rho(\varphi)$, заданную в полярной системе координат. Длина дуги кривой, являющейся графиком этой функции, вычисляется по формуле

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}d\varphi,$$

где α и β – значения полярного угла φ в крайних точках дуги, $\alpha \leq \beta$.

Пример: Найти длину дуги OA параболы $y = x^2$, $0 \leq x \leq 1$.



Поскольку $f'(x) = (x^2)' = 2x$, то длина дуги OA вычисляется по формуле

$$l = \int_{a}^{b} \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx = \int_{0}^{1} \sqrt{1 + (2x)^2}dx = \int_{0}^{1} \sqrt{1 + 4x^2}dx.$$

Сначала найдем неопределенный интеграл $\int \sqrt{1+4x^2}dx$, используя метод интегрирования по частям.

$$\int \sqrt{1+4x^2}dx = \left| \begin{array}{ll} u=\sqrt{1+4x^2} & du = 4xdx/\sqrt{1+4x^2} \\ dv = dx & v = x \end{array} \right| =$$

$$= uv - \int vdu =$$

$$= x\sqrt{1+4x^2} - \int \frac{4x^2}{\sqrt{1+4x^2}}dx =$$

$$= x\sqrt{1+4x^2} - \int \frac{4x^2+1-1}{\sqrt{1+4x^2}}dx =$$

$$= x\sqrt{1+4x^2} - \int \left(\frac{4x^2+1}{\sqrt{1+4x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+4x^2}}\right)dx =$$

$$= x\sqrt{1+4x^2} - \int \left(\sqrt{1+4x^2} - \frac{1}{\sqrt{1+4x^2}}\right)dx =$$

$$= x\sqrt{1+4x^2} - \int \sqrt{1+4x^2}dx + \int \frac{1}{\sqrt{1+4x^2}}dx =$$

$$= x\sqrt{1+4x^2} - \int \sqrt{1+4x^2}dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1+(2x)^2}}d(2x) =$$

$$= x\sqrt{1+4x^2} - \int \sqrt{1+4x^2}dx + \frac{1}{2}\ln|2x+\sqrt{1+(2x)^2}| + C.$$

Отбросив промежуточные выкладки и оставив только исходный интеграл (первая строка) и результат (последняя строка), получаем

$$\int \sqrt{1+4x^2}dx = \\ = x\sqrt{1+4x^2} - \int \sqrt{1+4x^2}dx + \frac{1}{2}\ln|2x+\sqrt{1+(2x)^2}| + C.$$

Выражаем из этого равенства исходный интеграл:

$$\int \sqrt{1+4x^2}dx = \frac{1}{2}x\sqrt{1+4x^2} + \frac{1}{4}\ln|2x+\sqrt{1+(2x)^2}| + C.$$

Тогда по формуле Ньютона-Лейбница вычисляем длину дуги OA:

$$l=\int\limits_0^1\sqrt{1+4x^2}dx=\left(\frac{1}{2}x\sqrt{1+4x^2}+\frac{1}{4}\ln|2x+\sqrt{1+(2x)^2}|\right)\Bigg|_0^1=$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{1}{4}\ln|2+\sqrt{5}|.$$