Интегралы и дифференциальные уравнения
Модуль 2
Определенные и несобственные интегралы
Лекция 2.5
(для ГУИМЦ, 2025)

Аннотация

Несобственный интеграл первого рода, его геометрический и экономический смыслы. Формула Ньютона-Лейбница. Сходимость, абсолютная сходимость. Признаки сравнения несобственных интегралов первого рода с неотрицательной подынтегральной функцией.

1 Несобственный интеграл первого рода

В определенном интеграле

$$\int\limits_a^b f(x)dx$$

пределы интегрирования a и b являются конечными числами. Если хотя бы один из этих пределов заменить на бесконечность, то получится несобственный интеграл первого рода.

Определение

Несобственным интегралом первого рода функции $f(x)$ на промежутке $[a; +\infty)$ называется предел

$$\lim_{\xi\to+\infty} \int\limits_a^\xi f(x)dx.$$

Обозначение: $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$.

Аналогично определяются:

1. $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim\limits_{\eta\to-\infty} \int\limits_{\eta}^{b} f(x)dx.$

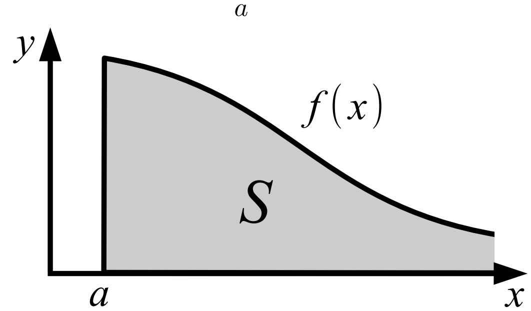
2. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int\limits_{c}^{+\infty} f(x)dx =$

$$= \lim_{\eta\to-\infty} \int\limits_{\eta}^{c} f(x)dx + \lim_{\xi\to+\infty} \int\limits_{c}^{\xi} f(x)dx.$$

Геометрический смысл:

Рассмотрим криволинейную трапецию, ограниченную сверху графиком функции $f(x)$ и снизу осью Ox на промежутке $[a, +\infty)$. Трапеция ограничена слева прямой $x = a$ и неограничена справа. Площадь S этой трапеции численно равна несобственному интегралу первого рода функции $f(x)$ на промежутке $[a, +\infty)$:

$$S = \int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx.$$



Экономический смысл:

Пусть у нас в собственности имеется земельный участок, который генерирует денежный поток $R(t)$ (руб/год) за счет, например, сдачи его в аренду. Инфляция в год составляет $r\%$. Поэтому деньги, которые нам приносит земельный участок, с каждым годом стоят все меньше и меньше. Тогда общая сумма денег, которую мы получим с этого участка за неограниченное время его эксплуатации $[0, +\infty)$, будет стоить по покупательной способности столько же, сколько прямо сейчас стоит сумма денег

$$P = \int\limits_0^{+\infty} R(t)e^{-rt/100}dt.$$

Здесь второй множитель $e^{-rt/100} \to 0$ при $t \to +\infty$. Он отражает тот факт, что из-за инфляции мы за 1 рубль в каждый последующий год можем купить меньше товаров, чем в предыдущий.

Формула Ньютона-Лейбница:

Если $F(x)$ - произвольная первообразная функции $f(x)$, то

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = F(x)\Big|_a^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty} F(x) - F(a).$$

Пример:

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x\Big|_0^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}.$$

Замечание

Теоремы о замене переменной и интегрирования по частям для определенного интеграла справедливы и для несобственного интеграла первого рода с единственной поправкой - вместо конечного числа b ставится $+\infty$.

2 Сходимость

Определение

Если интеграл

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$$

существует и равен конечному числу, то он называется **сходящимся**. В противном случае он называется **расходящимся**.

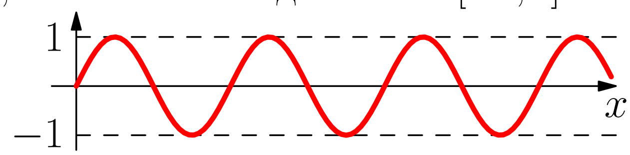
Пример:

$$\int\limits_0^{+\infty} \cos x dx = \sin x\Big|_0^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty} \sin x - \sin 0 = \lim_{x\to+\infty} \sin x.$$

Предел

$$\lim_{x\to+\infty} \sin x$$

не существует, т.к. функция $\sin x$ не стремится к конкретному числу, когда $x \to +\infty$, а колеблется в диапазоне $[-1, 1]$.



Значит, интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \cos x dx$ расходится.

Свойства сходящихся интегралов:

1. Если $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится и $b > a$, то $\int\limits_b^{+\infty} f(x)dx$ тоже сходится.

2. Если $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ и $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ сходятся, то $\int\limits_a^{+\infty} (f(x) + g(x))dx$ тоже сходится, причем

$$\int\limits_a^{+\infty} (f(x) + g(x))dx = \int\limits_a^{+\infty} f(x)dx + \int\limits_a^{+\infty} g(x)dx.$$

3. Если $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится, c - некоторое число, то $\int\limits_a^{+\infty} (c \cdot f(x))dx$ тоже сходится, причем

$$\int\limits_a^{+\infty} (c \cdot f(x))dx = c \cdot \int\limits_a^{+\infty} f(x)dx.$$

4. Если $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ и $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ сходятся, причем $\forall x \in [a, +\infty)$ $f(x) \le g(x)$, то

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx \le \int\limits_a^{+\infty} g(x)dx.$$

Рассмотрим признаки сравнения несобственных интегралов первого рода с **неотрицательной** подынтегральной функцией, позволяющие устанавливать сходимость интегралов, не вычисляя их.

1. Признак сходимости

Если $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ сходится и $\forall x \in [a, +\infty)$ $0 \le f(x) \le g(x)$, то $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ также сходится.

2. Признак расходимости

Если $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ расходится и $\forall x \in [a, +\infty)$ $f(x) \ge g(x) \ge 0$, то $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ также расходится.

3. Предельный признак сравнения

Если $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = K$, $0 < K < +\infty$ и $\forall x \in [a, +\infty)$ $f(x) \ge 0$, $g(x) > 0$, то интегралы $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ и $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно.

Замечание:

В приведенных признаках сравнения предполагается, что функции $f(x)$ и $g(x)$ **неотрицательны** на промежутке $[a, +\infty)$.

Для применения признаков сравнения необходимо знать **эталонные интегралы**:

$$1.\ \int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\beta} = \begin{cases} \text{сходится, если } \beta > 1, a > 0, \\ \text{расходится, если } 0 < \beta \le 1, a > 0. \end{cases}$$

2. $\int\limits_{a}^{+\infty} e^{px}dx = \begin{cases} \text{сходится, если } p < 0, a - \text{любое}, \\ \text{расходится, если } p > 0, a - \text{любое}. \end{cases}$

Пример:

1. Исследовать на сходимость интеграл

$$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2} dx.$$

Выпишем подынтегральную функцию: $f(x) = \operatorname{arctg} x / x^2$. Эта функция неотрицательна на промежутке $[1, +\infty)$. Значит, мы можем использовать признаки сравнения. Воспользуемся признаком сходимости и найдем выражение, ограничивающее нашу функцию сверху. Поскольку $\operatorname{arctg} x \leq \pi/2$, то

$$f(x) = \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2} \leq \frac{\pi/2}{x^2} = g(x).$$

Теперь

$$\int\limits_{1}^{+\infty} g(x)dx = \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\pi/2}{x^2} dx = \frac{\pi}{2} \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2}.$$

Последний интеграл

$$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$$

является эталонным интегралом №1 при $\beta = 2$. Поскольку $\beta > 1$, то он сходится, а значит, сходится интеграл

$$\int\limits_{1}^{+\infty} g(x)dx.$$

Тогда по признаку сходимости исходный интеграл

$$\int\limits_{1}^{+\infty} f(x)dx$$

также сходится. ■

2. Исследовать на сходимость интеграл

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x^3}}{1+x^2}dx.$$

Выпишем подынтегральную функцию: $f(x) = \sqrt{x^3}/(1+x^2)$. Эта функция неотрицательна на промежутке $[1, +\infty)$. Значит, мы можем использовать признаки сравнения. Сейчас воспользуемся предельным признаком сравнения. Пусть $g(x) = 1/\sqrt{x}$. Тогда

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^3}}{1+x^2} : \frac{1}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^3}\cdot\sqrt{x}}{1+x^2} =$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2(1/x^2+1)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1/x^2+1} =$$
$$= \frac{1}{0+1} = 1.$$

Получили положительное число. Следовательно, интегралы

$$\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx \text{ и } \int\limits_1^{+\infty} g(x)dx$$

сходятся или расходятся одновременно. Интеграл

$$\int\limits_1^{+\infty} g(x)dx = \int\limits_1^{+\infty} (1/\sqrt{x})dx = \int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^{1/2}}dx$$

является эталонным интегралом №1 при $\beta = 1/2$. Он расходится. Значит, исходный интеграл $\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx$ также расходится. ■

Определение

Интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ называется **абсолютно сходящимся**, если сходится интеграл $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$.

Теорема (об абсолютной сходимости)

Если $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$ сходится, то $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ также сходится.

Определение

Интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ называется **условно сходящимся**, если он сам сходится, а интеграл $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$ расходится.