Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана
Факультет "Фундаментальные науки"
Кафедра "Высшая математика"

Интегралы и дифференциальные уравнения

Модуль 2

Определенные и несобственные интегралы

Лекция 2.2

для ГУИМЦ, 2025

к.ф.-м.н. Емгушева Г.П.

Экономические приложения

1. Объем произведенной на заводе продукции.

1. Объем произведенной на заводе продукции.

Пусть $q(t)$ – производительность труда на заводе,

Экономические приложения

1. Объем произведенной на заводе продукции.

Пусть $q(t)$ – производительность труда на заводе, т.е. количество продукции, производимой в единицу времени.

1. Объем произведенной на заводе продукции.

Пусть $q(t)$ – производительность труда на заводе, т.е. количество продукции, производимой в единицу времени.

Производительность труда обычно меняться со временем в зависимости от многих факторов:

1. Объем произведенной на заводе продукции.

Пусть $q(t)$ – производительность труда на заводе, т.е. количество продукции, производимой в единицу времени.

Производительность труда обычно меняться со временем в зависимости от многих факторов: состояние здоровья сотрудников,

Экономические приложения

1. Объем произведенной на заводе продукции.

Пусть $q(t)$ – производительность труда на заводе, т.е. количество продукции, производимой в единицу времени.

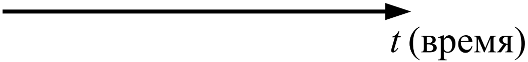
Производительность труда обычно меняться со временем в зависимости от многих факторов: состояние здоровья сотрудников, исправность оборудования

1. Объем произведенной на заводе продукции.

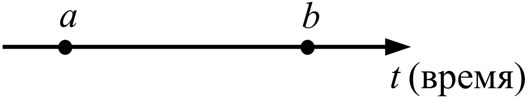
Пусть $q(t)$ – производительность труда на заводе, т.е. количество продукции, производимой в единицу времени.

Производительность труда обычно меняться со временем в зависимости от многих факторов: состояние здоровья сотрудников, исправность оборудования и т.д.

1. Объем произведенной на заводе продукции.

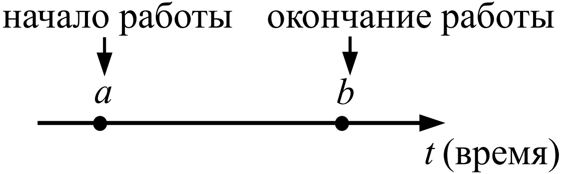


1. Объем произведенной на заводе продукции.



Пусть завод работает на отрезке времени $[a, b]$.

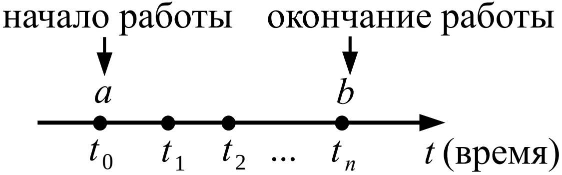
1. Объем произведенной на заводе продукции.



Пусть завод работает на отрезке времени $[a, b]$.

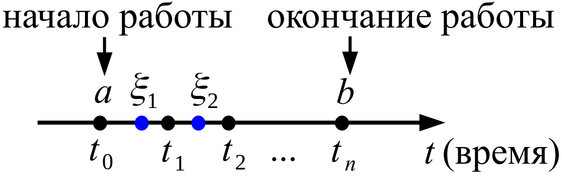
Экономические приложения

1. Объем произведенной на заводе продукции.



Пусть завод работает на отрезке времени $[a, b]$.
Введем на этом отрезке произвольное
разбиение $\tau_n = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$.

1. Объем произведенной на заводе продукции.



Пусть завод работает на отрезке времени $[a, b]$.
Введем на этом отрезке произвольное разбиение $\tau_n = \{t_0, t_1, ..., t_n\}$.
Далее, на каждом образовавшемся отрезке $[t_{i-1}, t_i]$ выбираем произвольный момент времени ξ_i.

1. Объем произведенной на заводе продукции.

Тогда **среднее** количество продукции, произведенной на заводе на отрезке времени $[t_{i-1}, t_i]$, есть

$$q(\xi_i)\Delta t_i,$$

где $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ - продолжительность работы.

1. Объем произведенной на заводе продукции.

Тогда **среднее** количество продукции, произведенной на заводе на отрезке времени $[t_{i-1}, t_i]$, есть

$$q(\xi_i)\Delta t_i,$$

где $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ - продолжительность работы.

Приведенная формула дает лишь среднее, а не точное значение, т.к. производительность $q(t)$ не является постоянной величиной.

1. Объем произведенной на заводе продукции.

Примерный объем продукции, произведенной на заводе за все время работы на $[a, b]$, есть

$$\sum_{i=1}^{n} q(\xi_i)\Delta t_i.$$

Экономические приложения

1. Объем произведенной на заводе продукции.

Примерный объем продукции, произведенной на заводе за все время работы на $[a, b]$, есть

$$\sum_{i=1}^{n} q(\xi_i)\Delta t_i.$$

Чем больше количество точек в разбиении τ_n, тем ближе примерное значение, определяемое данной суммой, к точному.

1. Объем произведенной на заводе продукции.

Поэтому, перейдя к пределу в этой сумме, получаем точное значение:

1. Объем произведенной на заводе продукции.

Поэтому, перейдя к пределу в этой сумме, получаем точное значение:

$$Q$$

1. Объем произведенной на заводе продукции.

Поэтому, перейдя к пределу в этой сумме, получаем точное значение:

$$Q = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} q(\xi_i)\Delta t_i$$

1. Объем произведенной на заводе продукции.

Поэтому, перейдя к пределу в этой сумме, получаем точное значение:

$$Q = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} q(\xi_i)\Delta t_i = \int_a^b q(t)dt.$$

1. Объем произведенной на заводе продукции.

Поэтому, перейдя к пределу в этой сумме, получаем точное значение:

$$Q = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} q(\xi_i)\Delta t_i = \int_a^b q(t)dt.$$

Таким образом, объем произведенной на заводе продукции Q – это интеграл от производительности труда $q(t)$ на этом же заводе.

2. Валовая прибыль предприятия.

2. Валовая прибыль предприятия.

Пусть $u(t)$ – денежный поток предприятия,

2. Валовая прибыль предприятия.

Пусть $u(t)$ – денежный поток предприятия, т.е. разница между доходами от продажи товаров и расходами на их производство в единицу времени.

2. Валовая прибыль предприятия.

Пусть $u(t)$ – денежный поток предприятия, т.е. разница между доходами от продажи товаров и расходами на их производство в единицу времени. Рассмотрим движение денежных средств на предприятии на отрезке времени $[a, b]$.

2. Валовая прибыль предприятия.

Пусть $u(t)$ – денежный поток предприятия, т.е. разница между доходами от продажи товаров и расходами на их производство в единицу времени. Рассмотрим движение денежных средств на предприятии на отрезке времени $[a, b]$. Введем на этом отрезке произвольное разбиение $\tau_n = \{t_0, t_1, ..., t_n\}$.

2. Валовая прибыль предприятия.

Прибыль предприятия на каждом образовавшемся в результате разбиения отрезке $[t_{i-1}, t_i]$, **приближенно** можно вычислить по формуле

$$u(\xi_i)\Delta t_i,$$

2. Валовая прибыль предприятия.

Прибыль предприятия на каждом образовавшемся в результате разбиения отрезке $[t_{i-1}, t_i]$, **приближенно** можно вычислить по формуле

$$u(\xi_i)\Delta t_i,$$

где $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ - продолжительность работы,

2. Валовая прибыль предприятия.

Прибыль предприятия на каждом образовавшемся в результате разбиения отрезке $[t_{i-1}, t_i]$, **приближенно** можно вычислить по формуле

$$u(\xi_i)\Delta t_i,$$

где $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ - продолжительность работы, ξ_i - произвольно выбранный момент времени на этом отрезке.

2. Валовая прибыль предприятия.

Тогда валовая прибыль за весь период $[a, b]$ приближенно есть

$$\sum_{i=1}^{n} u(\xi_i)\Delta t_i.$$

2. Валовая прибыль предприятия.

Устремив количество точек в разбиении τ_n в бесконечность, получим точную формулу

2. Валовая прибыль предприятия.

Устремив количество точек в разбиении τ_n в бесконечность, получим точную формулу

$$U$$

2. Валовая прибыль предприятия.

Устремив количество точек в разбиении τ_n в бесконечность, получим точную формулу

$$U = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} u(\xi_i)\Delta t_i$$

2. Валовая прибыль предприятия.

Устремив количество точек в разбиении τ_n в бесконечность, получим точную формулу

$$U = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} u(\xi_i)\Delta t_i = \int\limits_a^b u(t)dt.$$

2. Валовая прибыль предприятия.

Устремив количество точек в разбиении τ_n в бесконечность, получим точную формулу

$$U = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} u(\xi_i)\Delta t_i = \int_a^b u(t)dt.$$

Валовая прибыль предприятия U есть интеграл от денежного потока $u(t)$ этого предприятия.

Формула Ньютона-Лейбница

Формула Ньютона-Лейбница

Рассмотрим определенный интеграл

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Формула Ньютона-Лейбница

Рассмотрим определенный интеграл

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Если в этом интеграле в качестве верхнего предела вместо числа b взять некоторую переменную t, то мы получим **интеграл с переменным верхним пределом**:

$$\int_a^t f(x)dx.$$

Формула Ньютона-Лейбница

Рассмотрим определенный интеграл

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Если в этом интеграле в качестве верхнего предела вместо числа b взять некоторую переменную t, то мы получим **интеграл с переменным верхним пределом**:

$$\Phi(t) = \int_a^t f(x)dx.$$

Формула Ньютона-Лейбница

Теорема (о производной интеграла с переменным верхним пределом)

Формула Ньютона-Лейбница

Теорема (о производной интеграла с переменным верхним пределом)

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то функция $\Phi(t)$ дифференцируема на этом отрезке и $\Phi'(t) = f(t)$.

Из данной теоремы следует, что $\Phi(t)$ является первообразной функции $f(t)$ на отрезке $[a, b]$.

Из данной теоремы следует, что $\Phi(t)$ является первообразной функции $f(t)$ на отрезке $[a, b]$. Поскольку любые две первообразные одной и той же функции отличаются лишь на некоторую постоянную,

Формула Ньютона-Лейбница

Из данной теоремы следует, что $\Phi(t)$ является первообразной функции $f(t)$ на отрезке $[a, b]$. Поскольку любые две первообразные одной и той же функции отличаются лишь на некоторую постоянную, то

$$\Phi(t) = F(t) + C,$$

Формула Ньютона-Лейбница

Из данной теоремы следует, что $\Phi(t)$ является первообразной функции $f(t)$ на отрезке $[a, b]$. Поскольку любые две первообразные одной и той же функции отличаются лишь на некоторую постоянную, то

$$\Phi(t) = F(t) + C,$$

где $F(t)$ - произвольная первообразная функции $f(t)$,

Формула Ньютона-Лейбница

Из данной теоремы следует, что $\Phi(t)$ является первообразной функции $f(t)$ на отрезке $[a, b]$. Поскольку любые две первообразные одной и той же функции отличаются лишь на некоторую постоянную, то

$$\Phi(t) = F(t) + C,$$

где $F(t)$ - произвольная первообразная функции $f(t)$, а C - некоторая постоянная, значение которой зависит от выбора конкретной первообразной $F(t)$.

Формула Ньютона-Лейбница

$$\Phi(t) = F(t) + C$$

Формула Ньютона-Лейбница

$$\Phi(t) = F(t) + C$$

$$\Phi(t) = F(t) + C$$

Формула Ньютона-Лейбница

$$\Phi(t) = F(t) + C$$

Формула Ньютона-Лейбница

$$\Phi(t) = F(t) + C$$

Формула Ньютона-Лейбница

$$\Phi(t) = F(t) + C$$

Вспоминая, что

$$\Phi(t) = \int_a^t f(x)dx,$$

Формула Ньютона-Лейбница

$$\Phi(t) = F(t) + C$$

Вспоминая, что

$$\Phi(t) = \int\limits_a^t f(x)dx,$$

из последнего равенства получаем

$$\int\limits_a^t f(x)dx = F(t) + C.$$

Формула Ньютона-Лейбница

$$\Phi(t) = F(t) + C$$

Вспоминая, что

$$\Phi(t) = \int\limits_a^t f(x)dx,$$

из последнего равенства получаем

$$\int\limits_a^t f(x)dx = F(t) + C.$$

Формула Ньютона-Лейбница

$$\int\limits_a^t f(x)dx = F(t) + C$$

Формула Ньютона-Лейбница

$$\int_a^t f(x)dx = F(t) + C$$

Формула Ньютона-Лейбница

$$\int\limits_a^t f(x)dx = F(t) + C$$

Формула Ньютона-Лейбница

$$\int_a^t f(x)dx = F(t) + C$$

Формула Ньютона-Лейбница

$$\int_a^t f(x)dx = F(t) + C$$

Формула Ньютона-Лейбница

$$\int_a^{t} f(x)dx = F(t) + C$$

Пусть $t = a$.

Формула Ньютона-Лейбница

$$\int_a^{t} f(x)dx = F(t) + C$$

Пусть $t = a$. Тогда

$$\int_a^{a} f(x)dx = F(a) + C.$$

Формула Ньютона-Лейбница

$$\int_a^t f(x)dx = F(t) + C$$

Пусть $t = a$. Тогда

$$\int_a^a f(x)dx = F(a) + C.$$

Формула Ньютона-Лейбница

$$\int_a^t f(x)dx = F(t) + C$$

Пусть $t = a$. Тогда

$$\int_a^a f(x)dx = F(a) + C.$$

Учитывая, что

$$\int_a^a f(x)dx = 0,$$

Формула Ньютона-Лейбница

$$\int_a^t f(x)dx = F(t) + C$$

Пусть $t = a$. Тогда

$$\int_a^a f(x)dx = F(a) + C.$$

Учитывая, что

$$\int_a^a f(x)dx = 0,$$

имеем

$$F(a) + C = 0$$

Формула Ньютона-Лейбница

$$\int_a^t f(x)dx = F(t) + C$$

Пусть $t = a$. Тогда

$$\int_a^a f(x)dx = F(a) + C.$$

Учитывая, что

$$\int_a^a f(x)dx = 0,$$

имеем

$$F(a) + C = 0 \text{ или } C = -F(a).$$

Формула Ньютона-Лейбница

$$\int\limits_a^t f(x)dx = F(t) + C$$

Пусть $t = a$. Тогда

$$\int\limits_a^a f(x)dx = F(a) + C.$$

Учитывая, что

$$\int\limits_a^a f(x)dx = 0,$$

имеем

$$F(a) + C = 0 \text{ или } C = -F(a).$$

Формула Ньютона-Лейбница

$$\int_a^t f(x)dx = F(t) + C$$

$$C = -F(a)$$

Формула Ньютона-Лейбница

$$\int_a^t f(x)dx = F(t) + C$$

$$C = -F(a)$$

Формула Ньютона-Лейбница

$$\int_a^t f(x)dx = F(t) + C$$

$$C = -F(a)$$

Формула Ньютона-Лейбница

$$\int_a^t f(x)dx = F(t) + C$$

$$C = -F(a)$$

Формула Ньютона-Лейбница

$$\int_a^t f(x)dx = F(t) + C$$

$$C = -F(a)$$

Формула Ньютона-Лейбница

$$\int_a^t f(x)dx = F(t) + C$$

$$C = -F(a)$$

Формула Ньютона-Лейбница

$$\int_{a}^{t} f(x)dx = F(t) + C$$

$$C = -F(a)$$

Формула Ньютона-Лейбница

$$\int_a^t f(x)dx = F(t) + C$$

$$C = -F(a)$$

Тогда

$$\int_a^t f(x)dx = F(t) - F(a).$$

Формула Ньютона-Лейбница

$$\int_a^t f(x)dx = F(t) + C$$

$$C = -F(a)$$

Тогда

$$\int_a^t f(x)dx = F(t) - F(a).$$

Формула Ньютона-Лейбница

$$\int_a^t f(x)dx = F(t) - F(a)$$

Формула Ньютона-Лейбница

$$\int_a^t f(x)dx = F(t) - F(a)$$

Формула Ньютона-Лейбница

$$\int_a^t f(x)dx = F(t) - F(a)$$

Формула Ньютона-Лейбница

$$\int_a^t f(x)dx = F(t) - F(a)$$

Формула Ньютона-Лейбница

$$\int_a^t f(x)dx = F(t) - F(a)$$

Формула Ньютона-Лейбница

$$\int_a^t f(x)dx = F(t) - F(a)$$

Полагая $t = b$,

$$\int_a^t f(x)dx = F(t) - F(a)$$

Полагая $t = b$, приходим к

формуле Ньютона-Лейбница

для определенного интеграла:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Формула Ньютона-Лейбница

$$\int_a^t f(x)dx = F(t) - F(a)$$

Полагая $t = b$, приходим к

формуле Ньютона-Лейбница

для определенного интеграла:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Формула Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Формула Ньютона-Лейбница

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Формула Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Формула Ньютона-Лейбница

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Формула Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Формула Ньютона-Лейбница

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Для краткости записи часто используют следующее обозначение:

$$F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Формула Ньютона-Лейбница

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Для краткости записи часто используют следующее обозначение:

$$F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Тогда

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b.$$

Методы вычисления определенного интеграла

Для вычисления определенных интегралов используются те же четыре основных метода интегрирования, что и для неопределенных интегралов, но дополненные формулой Ньютона-Лейбница.

Метод непосредственного интегрирования состоит в приведении данного интеграла к одному или нескольким табличным интегралам с помощью свойства линейности определенного интеграла и вычислении получившихся табличных интегралов по формуле Ньютона-Лейбница.

Пример:

Методы вычисления определенного интеграла

Пример:

$$\int\limits_0^{\pi} (2\cos x + 9x^2)dx$$

Пример:

$$\int_0^{\pi} (2\cos x + 9x^2)dx =$$

$$= \left| \begin{array}{c} \text{используем свойство линейности:} \\ \int_a^b (\alpha f + \beta g)dx = \alpha \int_a^b f dx + \beta \int_a^b g dx \end{array} \right|$$

Пример:

$$\int_0^{\pi}(2\cos x + 9x^2)dx =$$

$$= \left| \begin{array}{c} \text{используем свойство линейности:} \\ \int_a^b(\alpha f + \beta g)dx = \alpha\int_a^b f\,dx + \beta\int_a^b g\,dx \end{array} \right|$$

Методы вычисления определенного интеграла

Пример:

$$\int_0^{\pi}(2\cos x + 9x^2)dx =$$

$$= \left|\begin{array}{c}\text{используем свойство линейности:}\\ \int_a^b(\alpha f + \beta g)dx = \alpha\int_a^b f\,dx + \beta\int_a^b g\,dx\end{array}\right|$$

Пример:

$$\int_0^{\pi}(2\cos x + 9x^2)dx =$$

$$= \left| \begin{array}{c} \text{используем свойство линейности:} \\ \int_a^b (\alpha f + \beta g)dx = \alpha \int_a^b f\,dx + \beta \int_a^b g\,dx \end{array} \right| =$$

$$= 2\int_0^{\pi} \cos x\,dx + 9\int_0^{\pi} x^2 dx$$

Пример:

$$\int_0^{\pi}(2\cos x + 9x^2)dx =$$

$$= 2\int_0^{\pi}\cos x\,dx + 9\int_0^{\pi}x^2dx$$

Пример:

$$\int\limits_0^{\pi} (2\cos x + 9x^2)dx =$$

$$= 2\int\limits_0^{\pi} \cos x dx + 9\int\limits_0^{\pi} x^2 dx$$

Методы вычисления определенного интеграла

Пример:

$$\int_0^{\pi} (2\cos x + 9x^2)dx =$$

$$= 2\int_0^{\pi} \cos x\, dx + 9\int_0^{\pi} x^2 dx$$

Пример:

$$\int_0^{\pi}(2\cos x + 9x^2)dx =$$

$$= 2\int_0^{\pi}\cos x\,dx + 9\int_0^{\pi}x^2dx$$

Методы вычисления определенного интеграла

Пример:

$$\int\limits_0^{\pi}(2\cos x + 9x^2)dx =$$

$$= 2\int\limits_0^{\pi}\cos x\,dx + 9\int\limits_0^{\pi}x^2dx =$$

$$= \left| \qquad \qquad \qquad \qquad \right|$$

Пример:

$$\int_0^{\pi}(2\cos x + 9x^2)dx =$$

$$= 2\int_0^{\pi}\cos x\,dx + 9\int_0^{\pi}x^2dx =$$

$$= \Big| \qquad \Big|$$

Методы вычисления определенного интеграла

Пример:

$$\int_0^{\pi}(2\cos x + 9x^2)dx =$$

$$= 2\int_0^{\pi}\cos x\,dx + 9\int_0^{\pi}x^2dx =$$

$$= \left| \int \cos x dx = \sin x + C_1 \right|$$

Пример:

$$\int_0^\pi (2\cos x + 9x^2)dx =$$

$$= 2\int_0^\pi \cos x dx + 9\int_0^\pi x^2 dx =$$

$$= \left| \int \cos x dx = \sin x + C_1 \Rightarrow \int_0^\pi \cos x dx = \sin x\Big|_0^\pi \right|$$

Пример:

$$\int\limits_0^{\pi}(2\cos x + 9x^2)dx =$$

$$= 2\int\limits_0^{\pi}\cos x dx + 9\int\limits_0^{\pi} x^2 dx =$$

$$= \left| \int \cos x dx = \sin x + C_1 \quad \Rightarrow \int\limits_0^{\pi} \cos x dx = \sin x\Big|_0^{\pi} \right|$$

Пример:

$$\int_0^{\pi}(2\cos x + 9x^2)dx =$$

$$= 2\int_0^{\pi}\cos x dx + 9\int_0^{\pi} x^2 dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \int \cos x dx = \sin x + C_1 \quad \Rightarrow \int_0^{\pi} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{\pi} \\ \\ \int x^2 dx = x^3/3 + C_2 \end{array} \right|$$

Пример:

$$\int_0^{\pi}(2\cos x+9x^2)dx=$$

$$=2\int_0^{\pi}\cos x dx+9\int_0^{\pi}x^2dx=$$

$$=\left|\begin{array}{ll}\int\cos x dx=\sin x+C_1 & \Rightarrow\int_0^{\pi}\cos x dx=\sin x\Big|_0^{\pi}\\ \int x^2dx=x^3/3+C_2 & \Rightarrow\int_0^{\pi}x^2dx=x^3/3\Big|_0^{\pi}\end{array}\right|$$

Пример:

$$\int_0^{\pi}(2\cos x + 9x^2)dx =$$

$$= 2\int_0^{\pi} \cos x dx + 9\int_0^{\pi} x^2 dx =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} \int \cos x dx = \sin x + C_1 & \Rightarrow \int_0^{\pi} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{\pi} \\ \int x^2 dx = x^3/3 + C_2 & \Rightarrow \int_0^{\pi} x^2 dx = x^3/3 \Big|_0^{\pi} \end{array} \right| =$$

$$= 2\sin x\Big|_0^{\pi} + 9x^3/3\Big|_0^{\pi}$$

Пример:

$$\int_0^{\pi}(2\cos x + 9x^2)dx =$$

$$= 2\int_0^{\pi}\cos x\,dx + 9\int_0^{\pi}x^2dx =$$

$$= 2\sin x\Big|_0^{\pi} + 9x^3/3\Big|_0^{\pi}$$

Пример:

$$\int\limits_0^{\pi}(2\cos x + 9x^2)dx =$$

$$= 2\int\limits_0^{\pi}\cos x\,dx + 9\int\limits_0^{\pi}x^2dx =$$

$$= 2\sin x\Big|_0^{\pi} + 9x^3/3\Big|_0^{\pi}$$

Пример:

$$\int_0^{\pi}(2\cos x + 9x^2)dx =$$

$$= 2\int_0^{\pi}\cos x\,dx + 9\int_0^{\pi}x^2 dx =$$

$$= 2\sin x\Big|_0^{\pi} + 9x^3/3\Big|_0^{\pi}$$

Методы вычисления определенного интеграла

Пример:

$$\int_0^{\pi}(2\cos x + 9x^2)dx =$$

$$= 2\int_0^{\pi}\cos x\,dx + 9\int_0^{\pi}x^2 dx =$$

$$= 2\sin x\Big|_0^{\pi} + 9x^3/3\Big|_0^{\pi}$$

Пример:

$$\int_0^{\pi}(2\cos x + 9x^2)dx =$$

$$= 2\int_0^{\pi}\cos x\,dx + 9\int_0^{\pi}x^2dx =$$

$$= 2\sin x\Big|_0^{\pi} + 9x^3/3\Big|_0^{\pi} =$$

$$= \left|F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)\right|$$

Пример:

$$\int_0^{\pi}(2\cos x + 9x^2)dx =$$

$$= 2\int_0^{\pi}\cos x\,dx + 9\int_0^{\pi}x^2dx =$$

$$= 2\sin x\Big|_0^{\pi} + 9x^3/3\Big|_0^{\pi} =$$

$$= \left| F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a) \right| =$$

$$= 2(\qquad\qquad\qquad) + 9(\qquad\qquad\qquad)$$

Пример:

$$\int_0^{\pi}(2\cos x + 9x^2)dx =$$

$$= 2\int_0^{\pi}\cos x\,dx + 9\int_0^{\pi}x^2 dx =$$

$$= 2\sin x\Big|_0^{\pi} + 9x^3/3\Big|_0^{\pi} =$$

$$= \left|F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)\right| =$$

$$= 2(\sin\pi - \sin 0) + 9(\qquad\qquad)$$

Пример:

$$\int_0^{\pi}(2\cos x + 9x^2)dx =$$

$$= 2\int_0^{\pi}\cos x\,dx + 9\int_0^{\pi}x^2dx =$$

$$= 2\sin x\Big|_0^{\pi} + 9x^3/3\Big|_0^{\pi} =$$

$$= \left| F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a) \right| =$$

$$= 2(\sin\pi - \sin 0) + 9(\pi^3/3 - 0^3/3)$$

Пример:

$$\int_0^{\pi}(2\cos x + 9x^2)dx =$$

$$= 2\int_0^{\pi}\cos x\,dx + 9\int_0^{\pi}x^2dx =$$

$$= 2\sin x\Big|_0^{\pi} + 9x^3/3\Big|_0^{\pi} =$$

$$= 2(\sin\pi - \sin 0) + 9(\pi^3/3 - 0^3/3)$$

Пример:

$$\int\limits_0^{\pi}(2\cos x + 9x^2)dx =$$

$$= 2\int\limits_0^{\pi}\cos x\,dx + 9\int\limits_0^{\pi}x^2dx =$$

$$= 2\sin x\Big|_0^{\pi} + 9x^3/3\Big|_0^{\pi} =$$

$$= 2(\sin\pi - \sin 0) + 9(\pi^3/3 - 0^3/3)$$

Методы вычисления определенного интеграла

Пример:

$$\int\limits_0^\pi (2\cos x + 9x^2)dx =$$

$$= 2\int\limits_0^\pi \cos x\, dx + 9\int\limits_0^\pi x^2 dx =$$

$$= 2\sin x\Big|_0^\pi + 9x^3/3\Big|_0^\pi =$$

$$= 2(\sin\pi - \sin 0) + 9(\pi^3/3 - 0^3/3)$$

Пример:

$$\int_0^\pi (2\cos x + 9x^2)dx =$$

$$= 2\int_0^\pi \cos x\,dx + 9\int_0^\pi x^2 dx =$$

$$= 2\sin x\Big|_0^\pi + 9x^3/3\Big|_0^\pi =$$

$$= 2(\sin\pi - \sin 0) + 9(\pi^3/3 - 0^3/3) =$$

$$= 0 + 3\pi^3$$

Пример:

$$\int_0^{\pi}(2\cos x + 9x^2)dx =$$

$$= 2\int_0^{\pi}\cos x\,dx + 9\int_0^{\pi}x^2dx =$$

$$= 2\sin x\Big|_0^{\pi} + 9x^3/3\Big|_0^{\pi} =$$

$$= 2(\sin\pi - \sin 0) + 9(\pi^3/3 - 0^3/3) =$$

$$= 0 + 3\pi^3 = 3\pi^3.$$

Метод подведения под знак дифференциала и **метод замены переменной** опираются на теорему о замене переменной.

Метод подведения под знак дифференциала и **метод замены переменной** опираются на теорему о замене переменной.
Метод интегрирования по частям основан на теореме об интегрировании по частям.

Теорема (о замене переменной)

Теорема (о замене переменной)
Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, а функция $\varphi(t)$ и ее производная $\varphi'(t)$ непрерывны на отрезке $[t_1, t_2]$, причем

$$a = \varphi(t_1) \text{ и } b = \varphi(t_2).$$

Теорема (о замене переменной)
Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, а функция $\varphi(t)$ и ее производная $\varphi'(t)$ непрерывны на отрезке $[t_1, t_2]$, причем

$$a = \varphi(t_1) \text{ и } b = \varphi(t_2).$$

Тогда

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_{t_1}^{t_2} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Теорема (интегрирование по частям)

Теорема (интегрирование по частям)

Если функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют на отрезке $[a, b]$ непрерывные производные, то

$$\int\limits_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b v\,du.$$

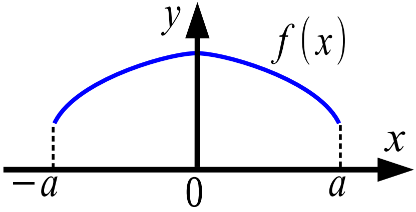
Интегрирование четных, нечетных и периодических функций

Интегрирование четных, нечетных и периодических функций

1. Четные функции.

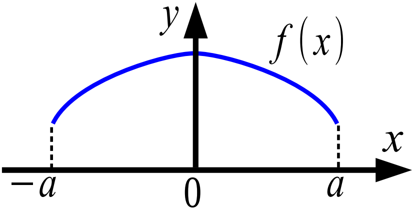
Интегрирование четных, нечетных и периодических функций

1. Четные функции.



Интегрирование четных, нечетных и периодических функций

1. Четные функции.

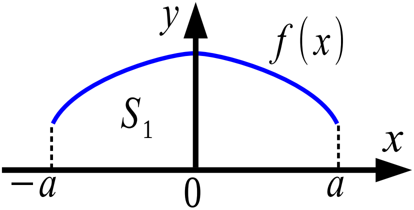


Поскольку график четной функции $f(x)$ симметричен относительно оси Oy, т.е.

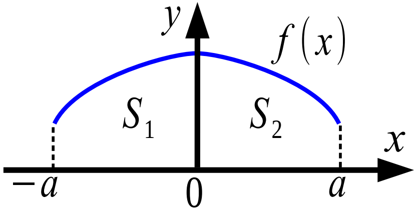
$$f(-x) = f(x),$$

Интегрирование четных, нечетных и периодических функций

1. Четные функции.



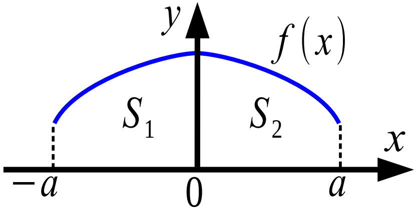
то площадь S_1 фигуры, ограниченной этим графиком на отрезке $[-a; 0]$, *1. Четные функции.*



то площадь S_1 фигуры, ограниченной этим графиком на отрезке $[-a; 0]$, равна площади S_2 фигуры, ограниченной этим же графиком на отрезке $[0; a]$

Интегрирование четных, нечетных и периодических функций

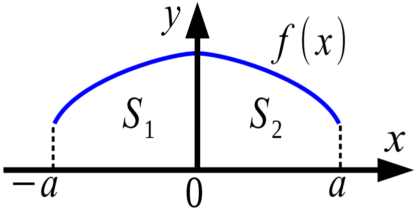
1. Четные функции.



то площадь S_1 фигуры, ограниченной этим графиком на отрезке $[-a; 0]$, равна площади S_2 фигуры, ограниченной этим же графиком на отрезке $[0; a]$: $S_1 = S_2$.

Интегрирование четных, нечетных и периодических функций

1. Четные функции.

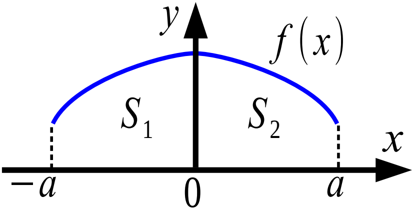


Откуда, вспоминая геометрический смысл определенного интеграла, получаем:

$$\underbrace{\int\limits_{-a}^{0} f(x)dx}_{S_1} = \underbrace{\int\limits_{0}^{a} f(x)dx}_{S_2}.$$

Интегрирование четных, нечетных и периодических функций

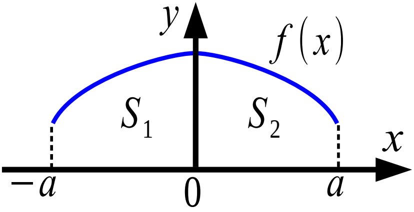
1. Четные функции.



Тогда

Интегрирование четных, нечетных и периодических функций

1. Четные функции.

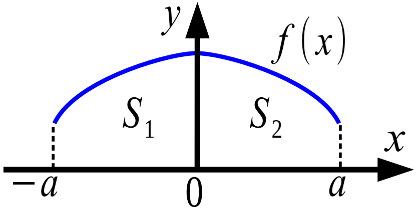


Тогда

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx$$

Интегрирование четных, нечетных и периодических функций

1. Четные функции.

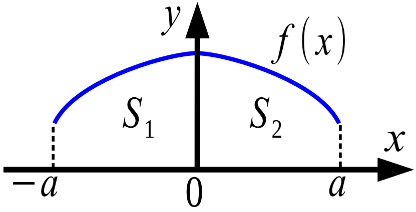


Тогда

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx$$

Интегрирование четных, нечетных и периодических функций

1. Четные функции.



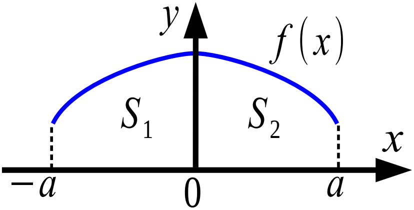
Тогда

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx =$$

$$= \int_{0}^{a} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx$$

Интегрирование четных, нечетных и периодических функций

1. Четные функции.



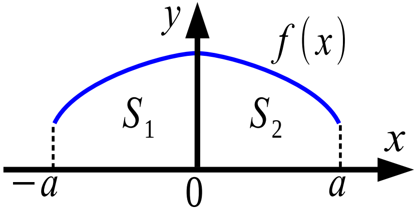
Тогда

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx =$$

$$= \int_{0}^{a} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx$$

Интегрирование четных, нечетных и периодических функций

1. Четные функции.



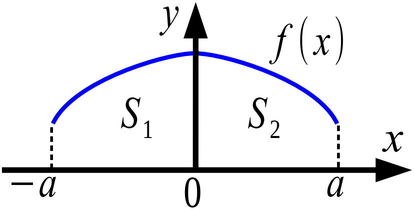
Тогда

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx =$$

$$= \int_{0}^{a} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx$$

Интегрирование четных, нечетных и периодических функций

1. Четные функции.



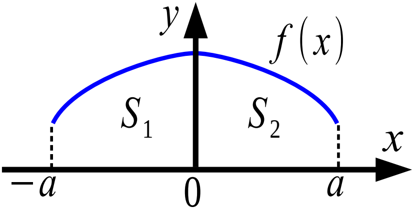
Тогда

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx =$$

$$= \int_{0}^{a} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$$

Интегрирование четных, нечетных и периодических функций

1. Четные функции.



или, если коротко,

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx, \text{ где } f(x) - \text{четная.}$$

2. Нечетные функции.

2. Нечетные функции.

Поскольку график нечетной функции $f(x)$ симметричен относительно начала координат:

$$f(-x) = -f(x),$$

Интегрирование четных, нечетных и периодических функций

2. Нечетные функции.

Поскольку график нечетной функции $f(x)$ симметричен относительно начала координат:

$$f(-x) = -f(x),$$

то

$$\int\limits_{-a}^{0} f(x)dx = -\int\limits_{0}^{a} f(x)dx.$$

2. Нечетные функции.

Тогда

Интегрирование четных, нечетных и периодических функций

2. Нечетные функции.

Тогда

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx$$

2. Нечетные функции.

Тогда

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx =$$

Интегрирование четных, нечетных и периодических функций

2. Нечетные функции.

Тогда

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx =$$

$$= -\int_{0}^{a} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx$$

2. Нечетные функции.

Тогда

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = \int\limits_{-a}^{0} f(x)dx + \int\limits_{0}^{a} f(x)dx =$$

$$= -\int\limits_{0}^{a} f(x)dx + \int\limits_{0}^{a} f(x)dx$$

Интегрирование четных, нечетных и периодических функций

2. Нечетные функции.

Тогда

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = \int\limits_{-a}^{0} f(x)dx + \int\limits_{0}^{a} f(x)dx =$$

$$= -\int\limits_{0}^{a} f(x)dx + \int\limits_{0}^{a} f(x)dx$$

Интегрирование четных, нечетных и периодических функций

2. Нечетные функции.

Тогда

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx =$$

$$= -\int_{0}^{a} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx = 0$$

Интегрирование четных, нечетных и периодических функций

2. Нечетные функции.

Тогда

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = \int\limits_{-a}^{0} f(x)dx + \int\limits_{0}^{a} f(x)dx =$$

$$= -\int\limits_{0}^{a} f(x)dx + \int\limits_{0}^{a} f(x)dx = 0$$

или, если коротко,

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 0, \text{ где } f(x) \text{ – нечетная.}$$

Интегрирование четных, нечетных и периодических функций

3. Периодические функции.

Интегрирование четных, нечетных и периодических функций

3. Периодические функции.

Для периодической функции $f(x)$ с периодом T

$$f(x+T)=f(x)$$

Интегрирование четных, нечетных и периодических функций

3. Периодические функции.

Для периодической функции $f(x)$ с периодом T

$$f(x+T) = f(x)$$

и для произвольного числа a

Интегрирование четных, нечетных и периодических функций

3. Периодические функции.

Для периодической функции $f(x)$ с периодом T

$$f(x+T)=f(x)$$

и для произвольного числа a имеем

$$\int\limits_a^{a+T} f(x)dx=\int\limits_0^T f(x)dx,$$

где $f(x)$ – периодическая.