Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана
Факультет “Фундаментальные науки”
Кафедра “Высшая математика”

# Интегралы и дифференциальные уравнения

## Модуль 2
## Определенные и несобственные интегралы

## **Лекция 2.1**

для ГУИМЦ, 2025

к.ф.-м.н. Емгушева Г.П.

# Определенный интеграл

# Определенный интеграл

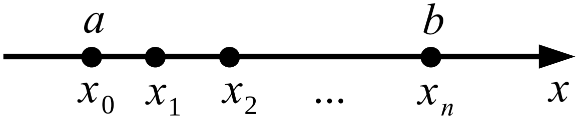
Пусть на отрезке $[a, b]$ выбрана конечная последовательность точек

$$x_0 = a,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n = b.$$

# Определенный интеграл

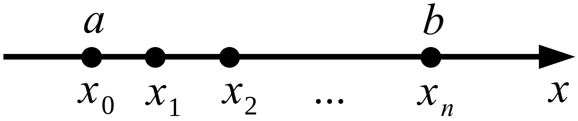
Пусть на отрезке $[a, b]$ выбрана конечная последовательность точек

$$x_0 = a,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n = b.$$



Пусть на отрезке $[a, b]$ выбрана конечная последовательность точек

$$x_0 = a,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n = b.$$

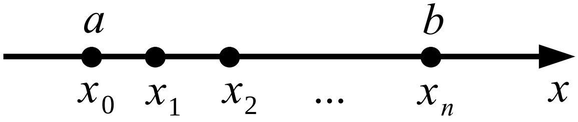



*Определение*

Совокупность точек $x_0 = a,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n = b$ называется **разбиением отрезка** $[a, b]$.

Пусть на отрезке $[a, b]$ выбрана конечная последовательность точек

$$x_0 = a,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n = b.$$




*Определение*

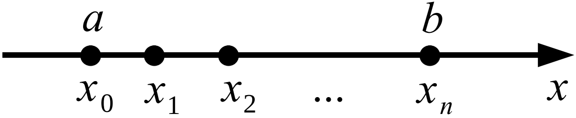
Совокупность точек $x_0 = a,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n = b$ называется **разбиением отрезка** $[a, b]$.

Обозначение: $\tau_n$

# Определенный интеграл

Пусть на отрезке $[a, b]$ выбрана конечная последовательность точек

$$x_0 = a,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n = b.$$




*Определение*

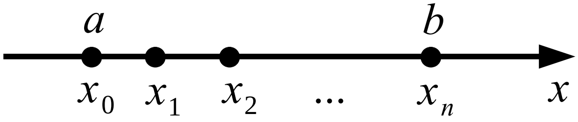
Совокупность точек $x_0 = a,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n = b$ называется **разбиением отрезка** $[a, b]$.

Обозначение: $\tau_n = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$

# Определенный интеграл

Пусть на отрезке $[a, b]$ выбрана конечная последовательность точек

$$x_0 = a,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n = b.$$




*Определение*

Совокупность точек $x_0 = a,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n = b$ называется **разбиением отрезка** $[a, b]$.

Обозначение: $\tau_n = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$

или $\tau_n = \{x_i\}_{i=0}^{i=n}$.

Длина каждого получившегося в результате разбиения отрезка $[x_{i-1}, x_i]$ определяется как

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}.$$

Длина каждого получившегося в результате разбиения отрезка $[x_{i-1}, x_i]$ определяется как

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}.$$

*Определение*

Длина наибольшего из отрезков $[x_{i-1}, x_i]$, где $i = 1, 2, ..., n$, называется **мелкостью разбиения**.

Длина каждого получившегося в результате разбиения отрезка $[x_{i-1}, x_i]$ определяется как

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}.$$

*Определение*

Длина наибольшего из отрезков $[x_{i-1}, x_i]$, где $i = 1, 2, ..., n$, называется **мелкостью разбиения**.

Обозначение: $\delta_n$

Длина каждого получившегося в результате разбиения отрезка $[x_{i-1}, x_i]$ определяется как

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}.$$

*Определение*

Длина наибольшего из отрезков $[x_{i-1}, x_i]$, где $i = 1, 2, ..., n$, называется **мелкостью разбиения**.

Обозначение: $\delta_n = \max\limits_{1 \le i \le n} \Delta x_i$.

# Определенный интеграл

*Примеры:*

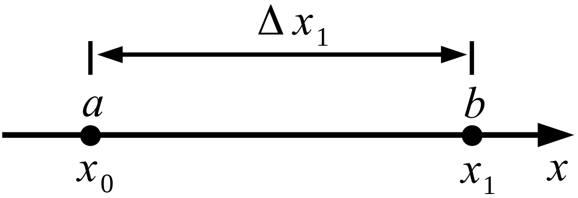
*Примеры:*

*Примеры:*


$$\tau_1 = \{x_0, x_1\}$$

# Определенный интеграл

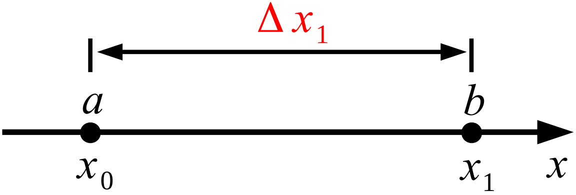
*Примеры:*




$$\tau_1 = \{x_0, x_1\}$$

# Определенный интеграл

*Примеры:*

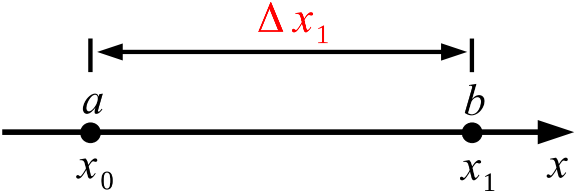



$$\tau_1 = \{x_0, x_1\}$$

$$\delta_1 = \Delta x_1$$

# Определенный интеграл

*Примеры:*

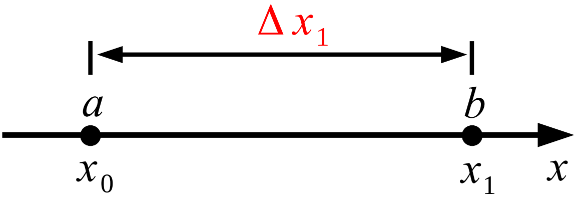



$$\tau_1 = \{x_0, x_1\}$$

$$\delta_1 = \Delta x_1$$

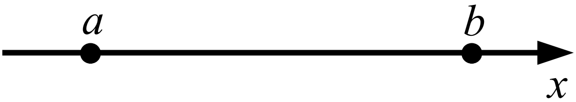
# Определенный интеграл

*Примеры:*

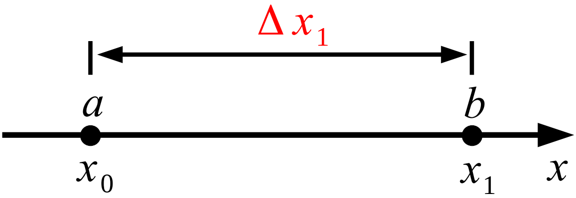



$$\tau_1 = \{x_0, x_1\}$$

$$\delta_1 = \Delta x_1$$

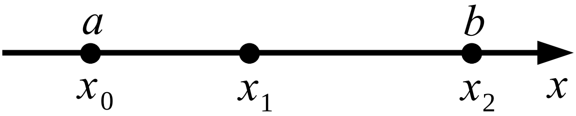


*Примеры:*




$$\tau_1 = \{x_0, x_1\}$$

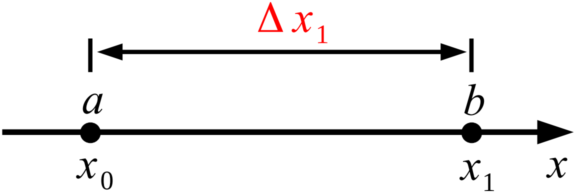
$$\delta_1 = \Delta x_1$$




$$\tau_2 = \{x_0, x_1, x_2\}$$

# Определенный интеграл

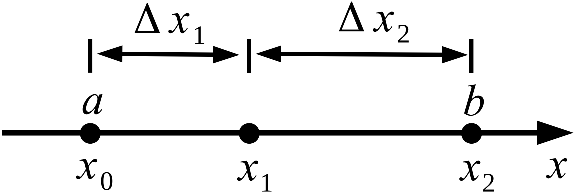
*Примеры:*




$$\tau_1 = \{x_0, x_1\}$$

$$\delta_1 = \Delta x_1$$

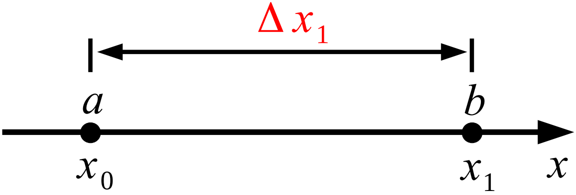
---




$$\tau_2 = \{x_0, x_1, x_2\}$$

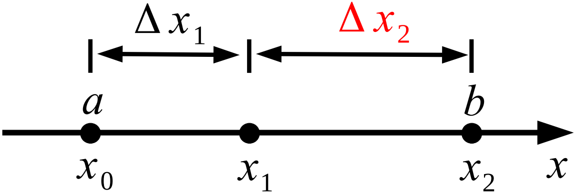
# Определенный интеграл

*Примеры:*




$$\tau_1 = \{x_0, x_1\}$$

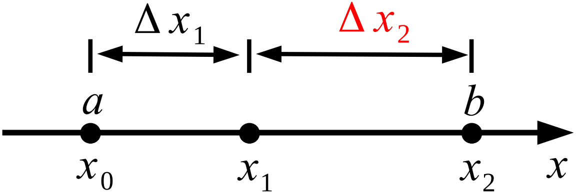
$$\delta_1 = \Delta x_1$$




$$\tau_2 = \{x_0, x_1, x_2\}$$

$$\delta_2 = \Delta x_2$$

*Примеры:*

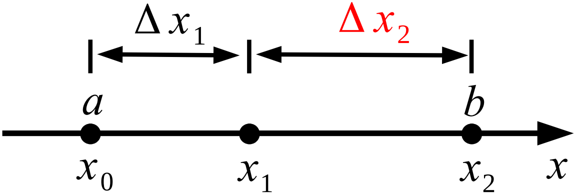



$$\tau_2 = \{x_0, x_1, x_2\}$$

$$\delta_2 = \Delta x_2$$

# Определенный интеграл

*Примеры:*

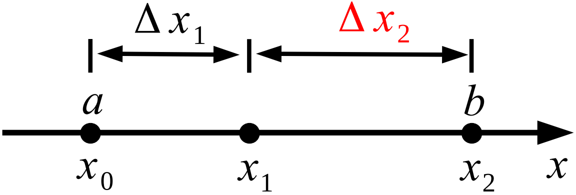



$$\tau_2 = \{x_0, x_1, x_2\}$$

$$\delta_2 = \Delta x_2$$

# Определенный интеграл

*Примеры:*

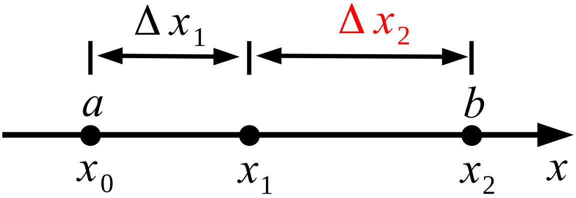



$$\tau_2 = \{x_0, x_1, x_2\}$$

$$\delta_2 = \Delta x_2$$

# Определенный интеграл

*Примеры:*

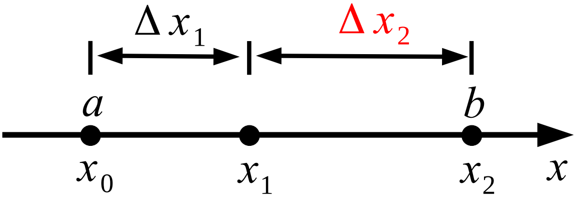



$$\tau_2 = \{x_0, x_1, x_2\}$$

$$\delta_2 = \Delta x_2$$

# Определенный интеграл

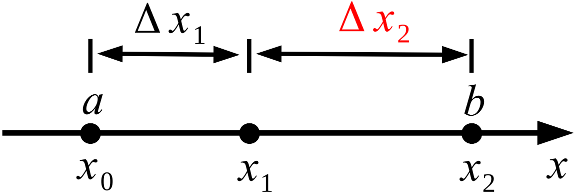
*Примеры:*




$$\tau_2 = \{x_0, x_1, x_2\}$$

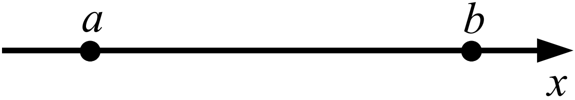
$$\delta_2 = \Delta x_2$$

*Примеры:*



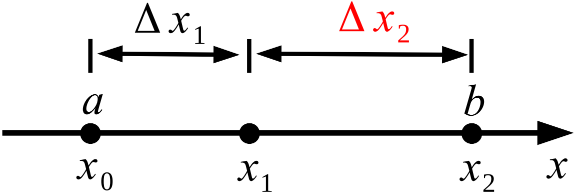

$$\tau_2 = \{x_0, x_1, x_2\}$$

$$\delta_2 = \Delta x_2$$



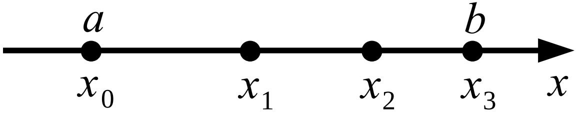
# Определенный интеграл

*Примеры:*



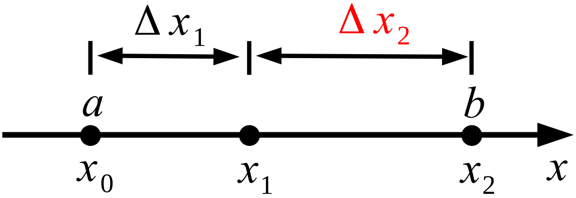

$\tau_2 = \{x_0, x_1, x_2\}$

$\delta_2 = \Delta x_2$



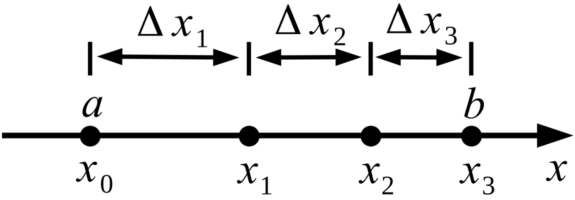

$\tau_3 = \{x_0, x_1, x_2, x_3\}$

*Примеры:*



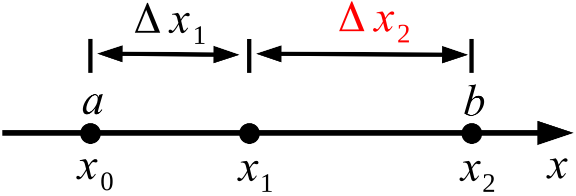

$$\tau_2 = \{x_0, x_1, x_2\}$$

$$\delta_2 = \Delta x_2$$



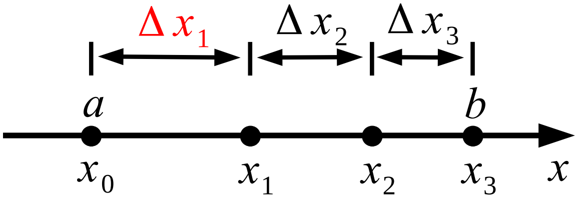

$$\tau_3 = \{x_0, x_1, x_2, x_3\}$$

*Примеры:*




$$\tau_2 = \{x_0, x_1, x_2\}$$

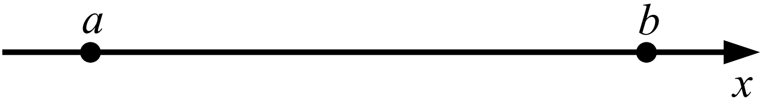
$$\delta_2 = \Delta x_2$$




$$\tau_3 = \{x_0, x_1, x_2, x_3\}$$

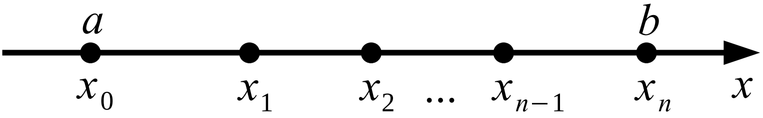
$$\delta_3 = \Delta x_1$$

# Определенный интеграл



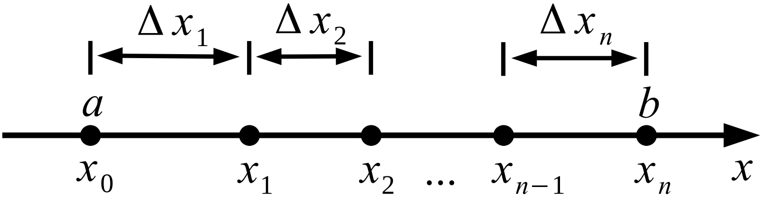

Рассмотрим отрезок $[a, b]$.

# Определенный интеграл



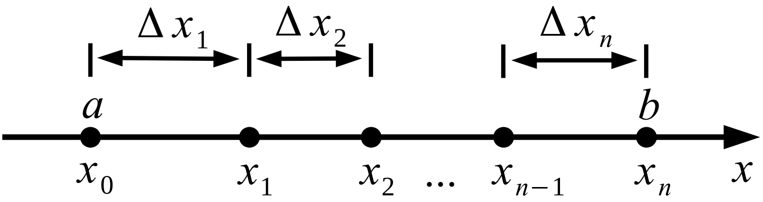

Пусть дано некоторое разбиение $\tau_n$ отрезка $[a, b]$.

# Определенный интеграл



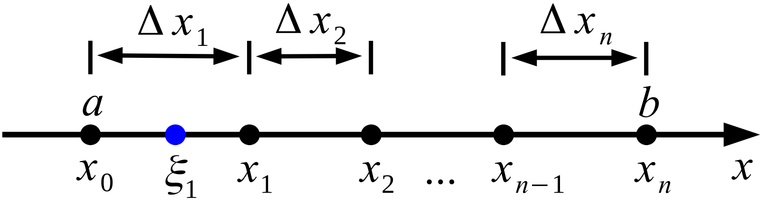

Пусть дано некоторое разбиение $\tau_n$ отрезка $[a, b]$.

# Определенный интеграл

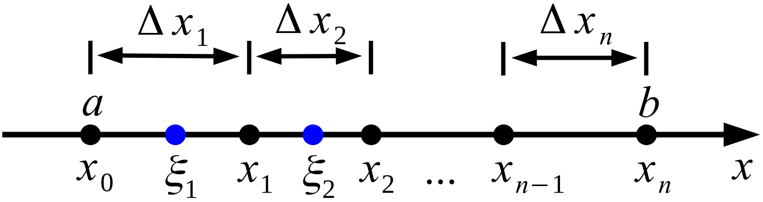



На каждом отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ выберем произвольную точку $\xi_i$

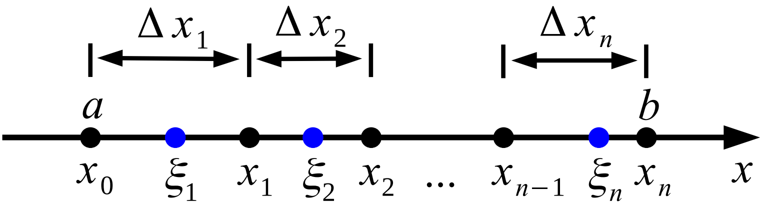
# Определенный интеграл




На каждом отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ выберем произвольную точку $\xi_i$

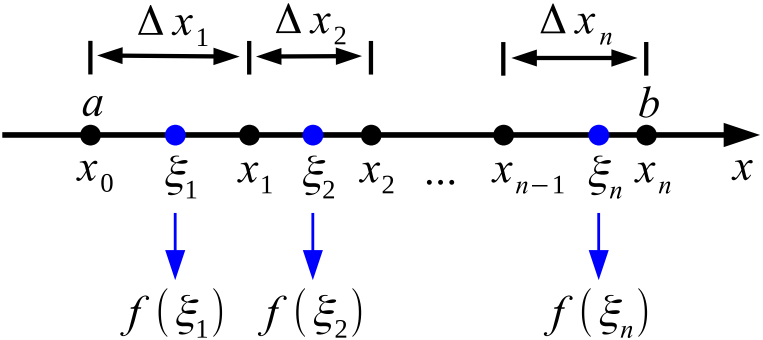



На каждом отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ выберем произвольную точку $\xi_i$

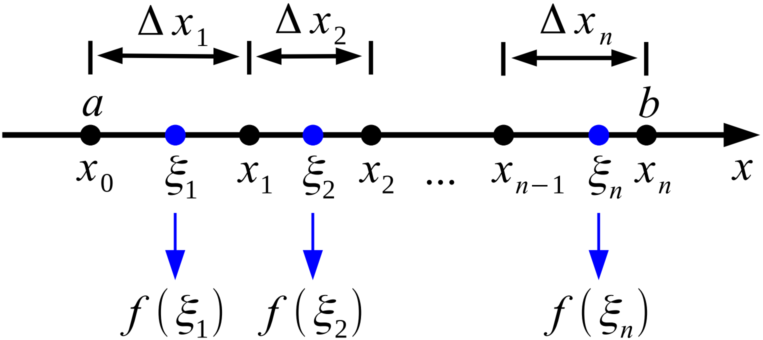



На каждом отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ выберем произвольную точку $\xi_i$

# Определенный интеграл

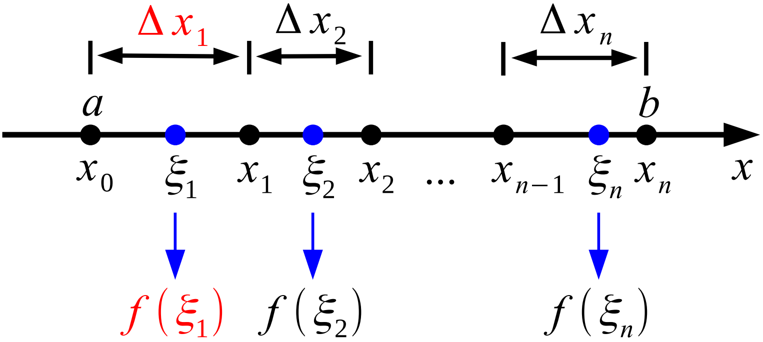



и для каждой $\xi_i$ вычислим значение $f(\xi_i)$ функции $f(x)$, заданной на отрезке $[a, b]$.



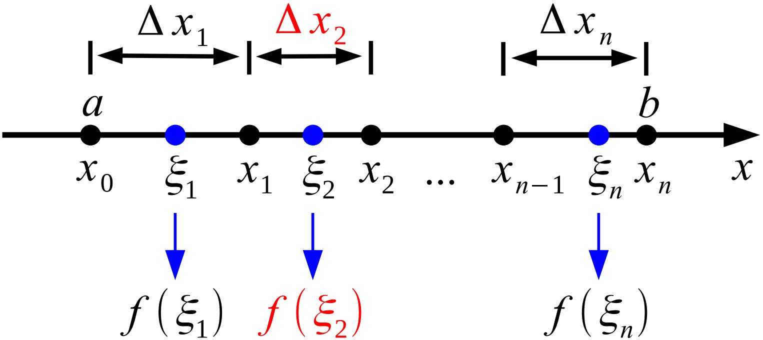

Составим сумму:

# Определенный интеграл




Составим сумму:

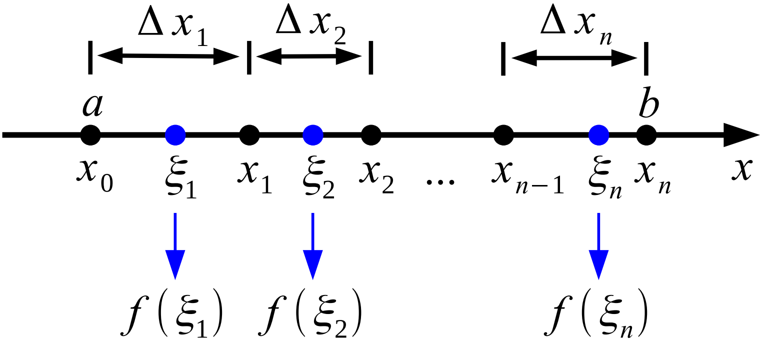
$$f(\xi_1)\Delta x_1$$




Составим сумму:

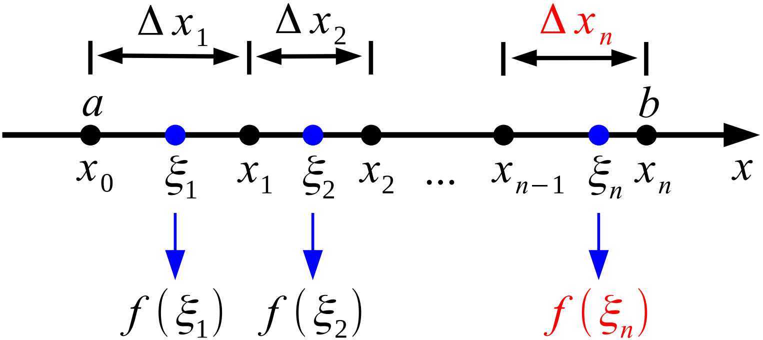
$$f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2$$

# Определенный интеграл




Составим сумму:

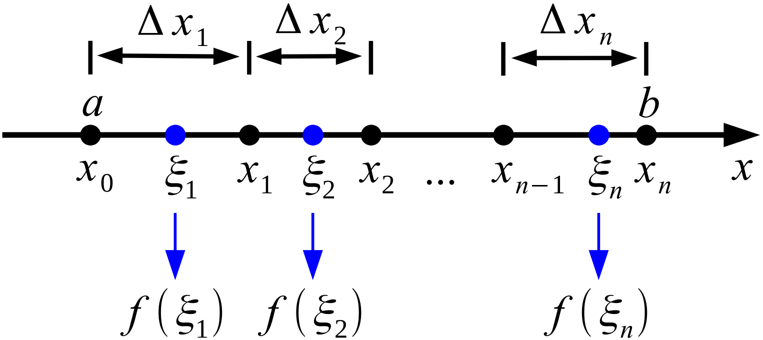
$$f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots$$




Составим сумму:

$$f(\xi_1)\Delta x_1+f(\xi_2)\Delta x_2+\ldots+f(\xi_n)\Delta x_n$$

# Определенный интеграл




Составим сумму:

$$f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

*Определение*

Сумма

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

называется **интегральной суммой Римана** функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

*Определение*

Сумма

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

называется **интегральной суммой Римана** функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Обозначение: $\sigma_n$.

*Замечание*

*Замечание*

Любой последовательности разбиений

$$\tau_1,\ \tau_2,\ \tau_3,\ \ldots$$

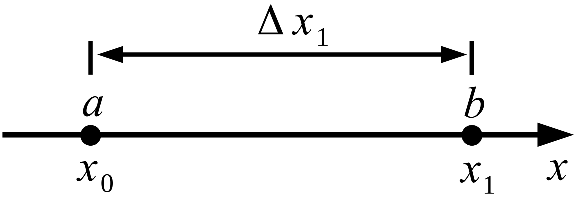
соответствует своя последовательность интегральных сумм

$$\sigma_1,\ \sigma_2,\ \sigma_3,\ \ldots\ .$$

*Пример:*

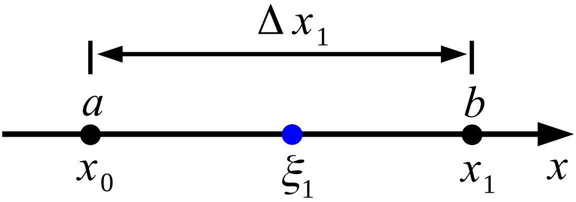
*Пример:*

*Пример:*



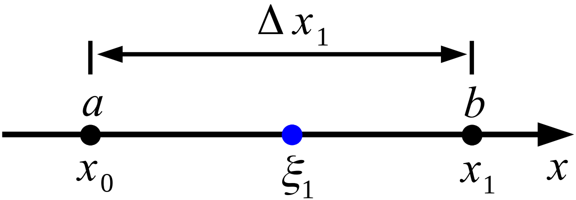

$\tau_1 = \{x_0, x_1\}$

*Пример:*



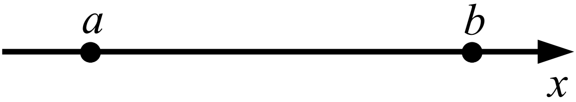

$\tau_1 = \{x_0, x_1\}$

*Пример:*



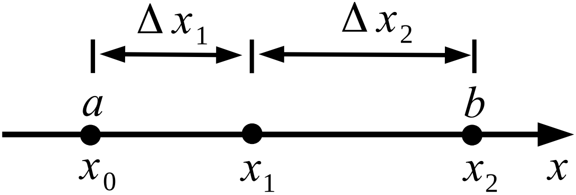

$$\tau_1 = \{x_0, x_1\} \to \sigma_1 = f(\xi_1)\Delta x_1,$$

*Пример:*




$$\tau_1 = \{x_0, x_1\} \to \sigma_1 = f(\xi_1)\Delta x_1,$$

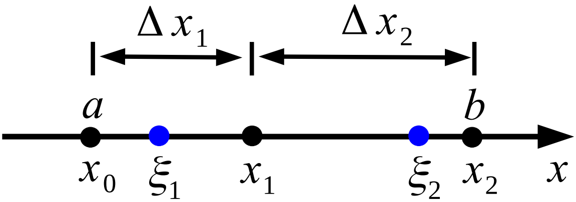
*Пример:*




$\tau_1 = \{x_0, x_1\} \to \sigma_1 = f(\xi_1)\Delta x_1,$

$\tau_2 = \{x_0, x_1, x_2\}$

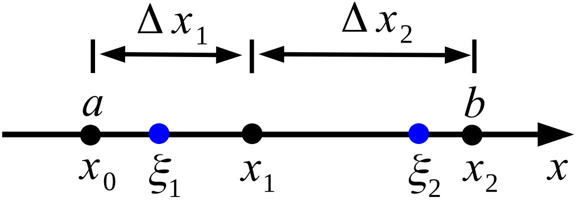
*Пример:*




$\tau_1 = \{x_0, x_1\} \to \sigma_1 = f(\xi_1)\Delta x_1,$

$\tau_2 = \{x_0, x_1, x_2\}$

*Пример:*




$$\tau_1 = \{x_0, x_1\} \to \sigma_1 = f(\xi_1)\Delta x_1,$$

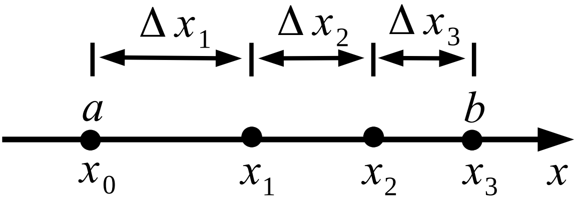
$$\tau_2 = \{x_0, x_1, x_2\} \ \to \sigma_2 = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2,$$

# Определенный интеграл

*Пример:*


$$\tau_1 = \{x_0, x_1\} \to \sigma_1 = f(\xi_1)\Delta x_1,$$
$$\tau_2 = \{x_0, x_1, x_2\} \ \to \sigma_2 = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2,$$

*Пример:*

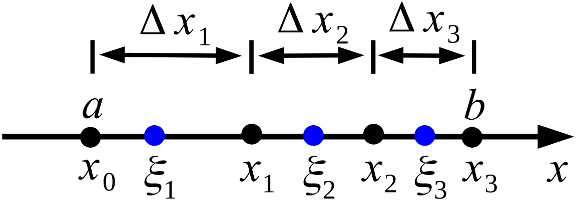



$\tau_1 = \{x_0, x_1\} \to \sigma_1 = f(\xi_1)\Delta x_1,$

$\tau_2 = \{x_0, x_1, x_2\} \ \to \sigma_2 = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2,$

$\tau_3 = \{x_0, x_1, x_2, x_3\}$

*Пример:*



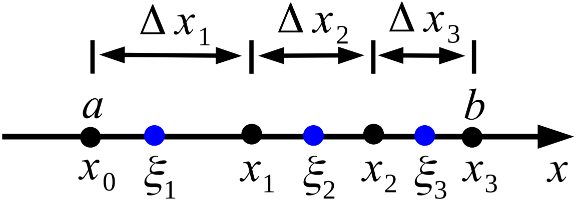

$$\tau_1 = \{x_0, x_1\} \to \sigma_1 = f(\xi_1)\Delta x_1,$$

$$\tau_2 = \{x_0, x_1, x_2\} \ \to \sigma_2 = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2,$$

$$\tau_3 = \{x_0, x_1, x_2, x_3\}$$

# Определенный интеграл

*Пример:*



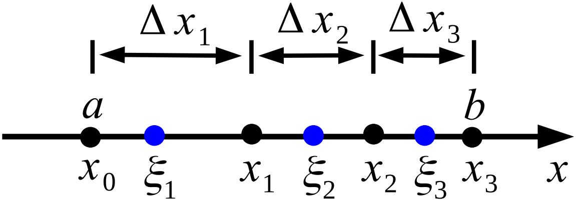

$$\tau_1 = \{x_0, x_1\} \to \sigma_1 = f(\xi_1)\Delta x_1,$$

$$\tau_2 = \{x_0, x_1, x_2\} \to \sigma_2 = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2,$$

$$\tau_3 = \{x_0, x_1, x_2, x_3\} \to$$

$$\sigma_3 = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + f(\xi_3)\Delta x_3.$$

*Пример:*




$$\tau_1 = \{x_0, x_1\} \to \sigma_1 = f(\xi_1)\Delta x_1,$$
$$\tau_2 = \{x_0, x_1, x_2\} \to \sigma_2 = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2,$$
$$\tau_3 = \{x_0, x_1, x_2, x_3\} \to$$
$$\sigma_3 = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + f(\xi_3)\Delta x_3.$$

*Определение*

Число $A$ называется **определенным интегралом Римана** функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$,

# Определенный интеграл

*Определение*

Число $A$ называется **определенным интегралом Римана** функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, если для любой последовательности разбиений $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots$ этого отрезка, когда $\delta_n \to 0$ при $n \to \infty$,

# Определенный интеграл

*Определение*

Число $A$ называется **определенным интегралом Римана** функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, если для любой последовательности разбиений $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \ldots$ этого отрезка, когда $\delta_n \to 0$ при $n \to \infty$, и при любом выборе точек $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots$

# Определенный интеграл

*Определение*

Число $A$ называется **определенным интегралом Римана** функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, если для любой последовательности разбиений $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \ldots$ этого отрезка, когда $\delta_n \to 0$ при $n \to \infty$, и при любом выборе точек $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots$ имеем

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = A.$$

*Определение*

Число $A$ называется **определенным интегралом Римана** функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, если для любой последовательности разбиений $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots$ этого отрезка, когда $\delta_n \to 0$ при $n \to \infty$, и при любом выборе точек $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots$ имеем

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = A.$$

Обозначение: $\int\limits_a^b f(x)dx$.

# Определенный интеграл

$$\int\limits_a^b f(x)dx$$

# Определенный интеграл

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$$

*Определение*

Число $a$ называется **нижним пределом интегрирования**.

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$$

*Определение*

Число $a$ называется **нижним пределом интегрирования**.

*Определение*

Число $b$ называется **верхним пределом интегрирования**.

*Определение*

Если у функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ существует определенный интеграл, то она называется **интегрируемой по Риману** на этом отрезке.

*Свойства определенного интеграла:*

*Свойства определенного интеграла:*

1) свойство аддитивности:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx,\ a < c < b,$$

# Определенный интеграл

*Свойства определенного интеграла:*

1) свойство аддитивности:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,\ a < c < b,$$

2) свойство линейности:

$$\int_a^b (\alpha f(x) \pm \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx \pm \beta \int_a^b g(x)dx,$$

$$\alpha, \beta \in R$$

*Свойства определенного интеграла:*

3) $\int\limits_a^a f(x)dx = 0,$

# Определенный интеграл

*Свойства определенного интеграла:*

3) $\int\limits_a^a f(x)dx = 0,$

4) $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx,$

*Свойства определенного интеграла:*

3) $\int\limits_a^a f(x)dx = 0,$

4) $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx,$

5) $\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| \leq \int\limits_a^b |f(x)|\, dx.$

*Теорема (об оценке)*

# Определенный интеграл

*Теорема (об оценке)*

$$m(b-a) \leq \int\limits_a^b f(x)dx \leq M(b-a),$$

где $m = \min\limits_{[a,b]} f(x)$, $M = \max\limits_{[a,b]} f(x)$

*Теорема (о среднем значении)*

*Теорема (о среднем значении)*

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то на интервале $(a, b)$ существует такая точка $\xi$, что

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).$$

*Теорема (о среднем значении)*

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то на интервале $(a, b)$ существует такая точка $\xi$, что

$$\int\limits_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).$$

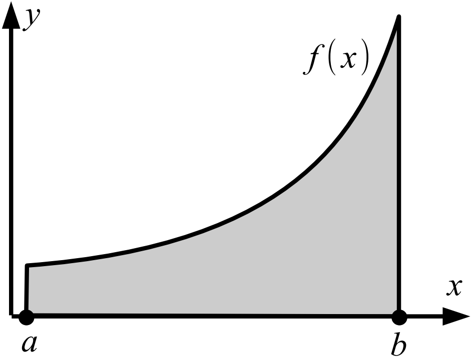
*Определение*

Значение $f(\xi)$ называется **средним значением** функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

# Геометрический смысл определенного интеграла

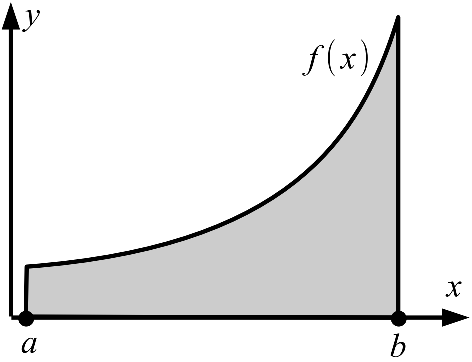
# Геометрический смысл определенного интеграла

# Геометрический смысл определенного интеграла



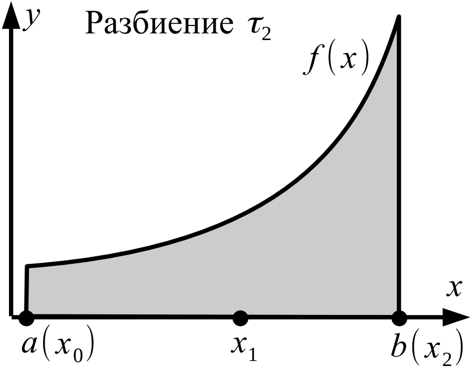

Рассмотрим криволинейную трапецию, ограниченную сверху графиком функции $f(x)$ и снизу осью $Ox$ на отрезке $[a, b]$.

# Геометрический смысл определенного интеграла




Пусть $S$ – площадь этой криволинейной трапеции.

# Геометрический смысл определенного интеграла

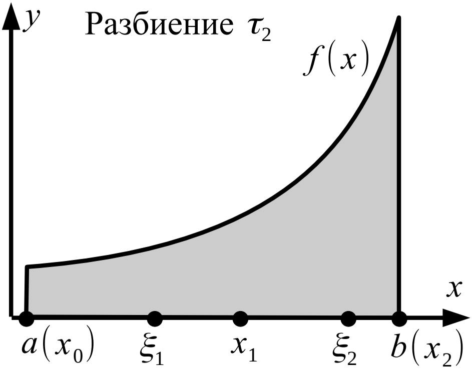



Проведем разбиение

$$\tau_2 = \{x_0 = a, x_1, x_2 = b\}$$

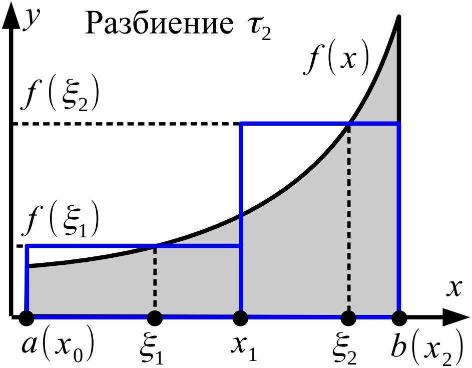
отрезка $[a, b]$.

# Геометрический смысл определенного интеграла




На получившихся отрезках $[x_0, x_1]$ и $[x_1, x_2]$ выберем произвольно точки $\xi_1$ и $\xi_2$

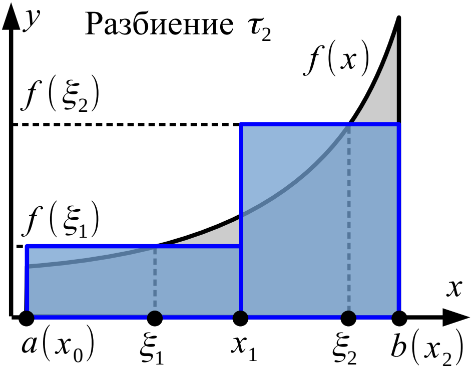
# Геометрический смысл определенного интеграла




и построим прямоугольники высотой

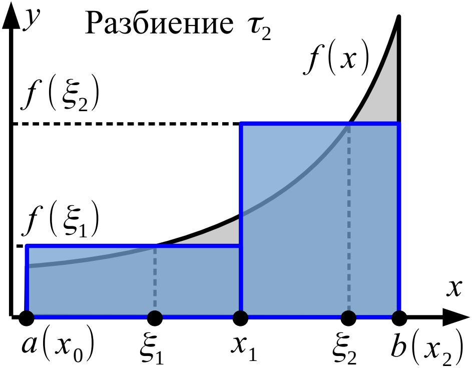
$f(\xi_1)$ и $f(\xi_2)$.

# Геометрический смысл определенного интеграла



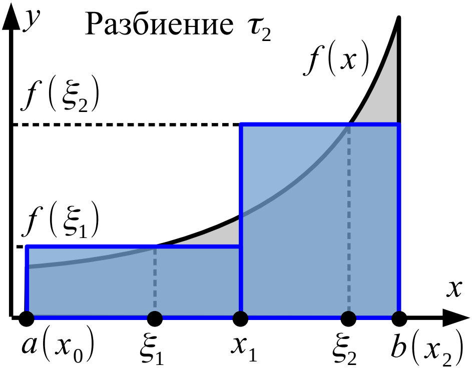

Эти прямоугольники образуют ступенчатую фигуру

# Геометрический смысл определенного интеграла



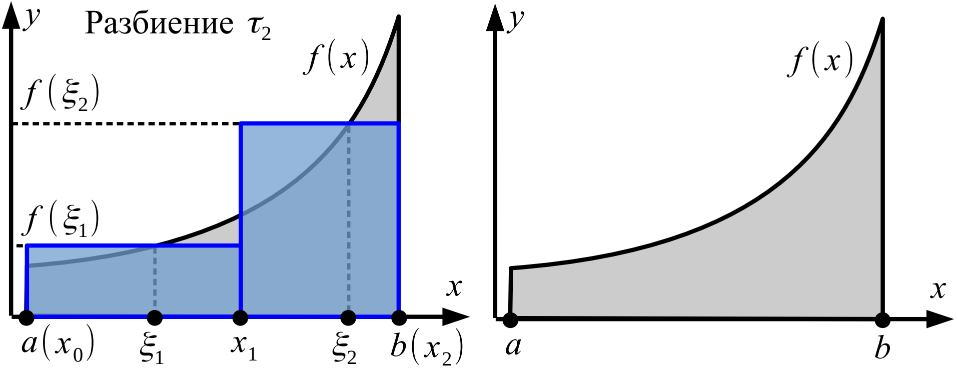

Эти прямоугольники образуют ступенчатую фигуру с площадью

$$\sigma_2 = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 = \sum_{i=1}^{2} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

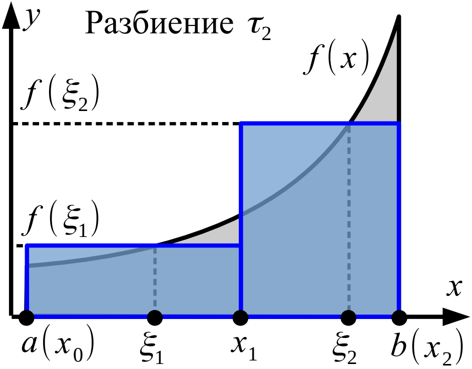

y
Разбиение $\tau_2$
$f(x)$
$f(\xi_2)$
$f(\xi_1)$
x
$a(x_0)$
$\xi_1$
$x_1$
$\xi_2$
$b(x_2)$

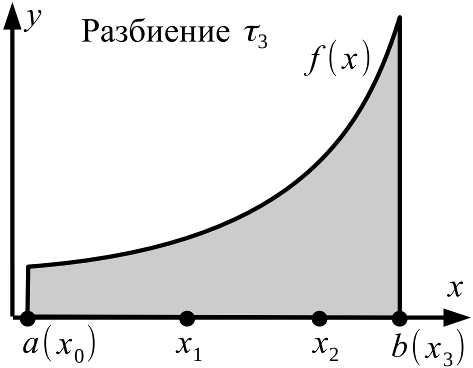

y
x

# Геометрический смысл определенного интеграла



# Геометрический смысл определенного интеграла



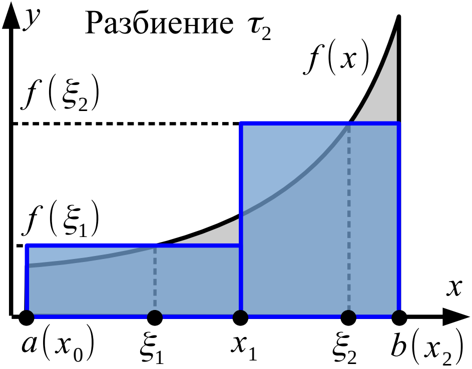



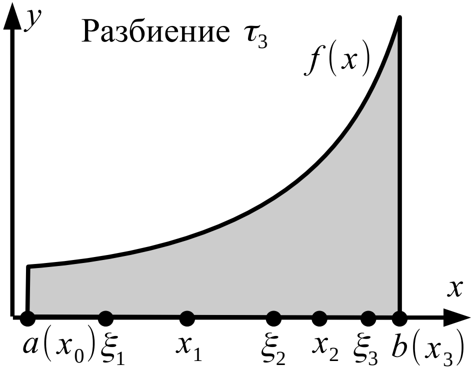

Теперь проведем разбиение

$$\tau_3 = \{x_0 = a, x_1, x_2, x_3 = b\}$$

отрезка $[a, b]$.

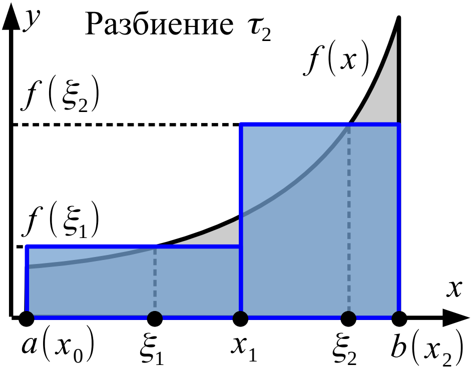
# Геометрический смысл определенного интеграла

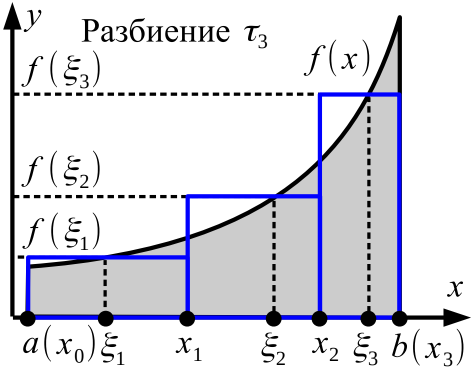



На получившихся отрезках $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$ и $[x_2, x_3]$ выберем произвольно точки $\xi_1$, $\xi_2$ и $\xi_3$

# Геометрический смысл определенного интеграла

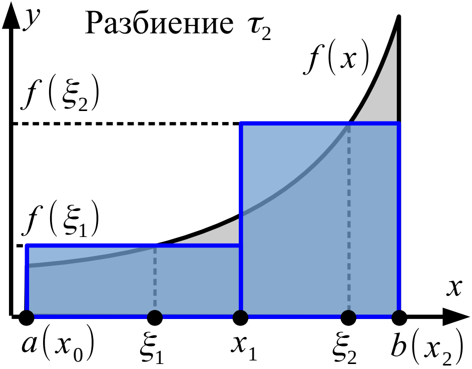


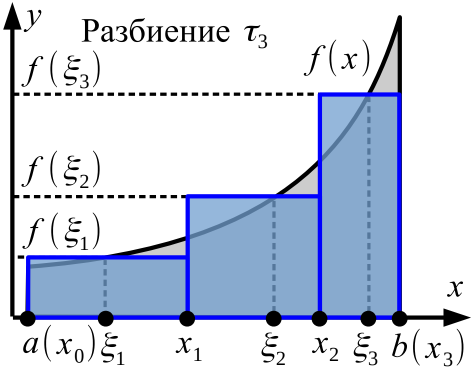




и построим прямоугольники высотой

$f(\xi_1)$, $f(\xi_2)$ и $f(\xi_3)$.

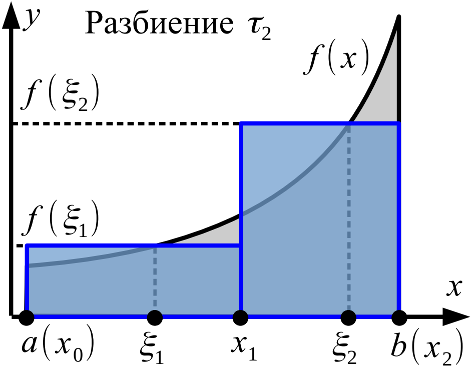
# Геометрический смысл определенного интеграла

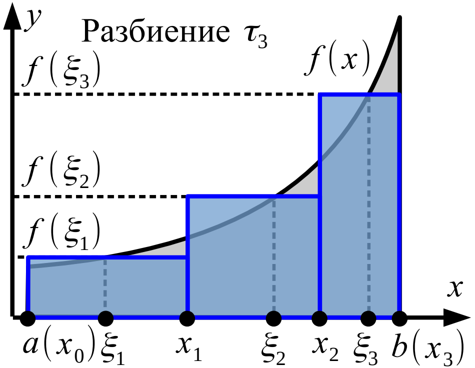



Эти прямоугольники образуют ступенчатую фигуру

# Геометрический смысл определенного интеграла

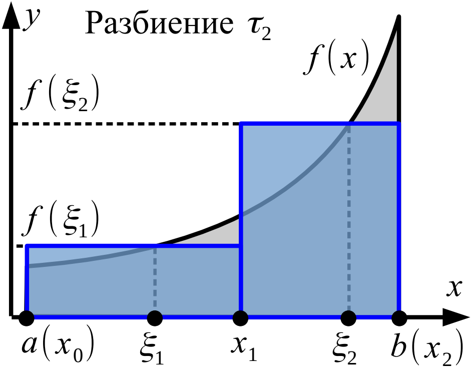


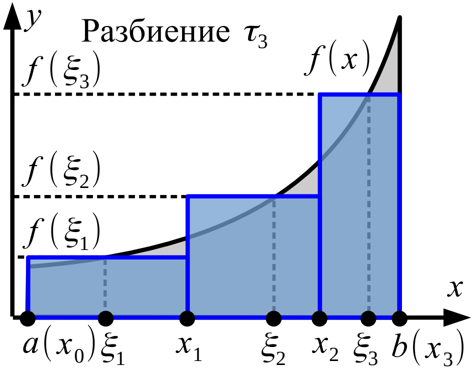




Эти прямоугольники образуют ступенчатую фигуру с площадью

$$\sigma_3 = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + f(\xi_3)\Delta x_3 = \sum_{i=1}^{3} f(\xi_i)\Delta x_i$$

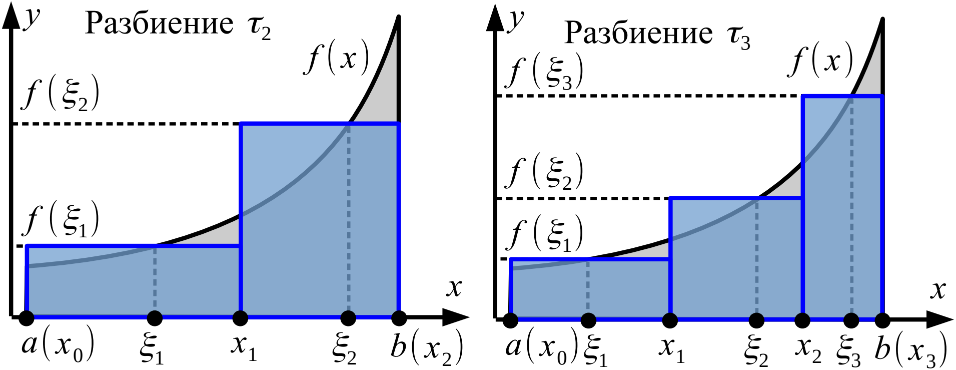
# Геометрический смысл определенного интеграла




Ступенчатая фигура на правом рисунке точнее отражает форму криволинейной трапеции, чем на левом.

# Геометрический смысл определенного интеграла




Следовательно, ее площадь $\sigma_3$ по значению ближе к площади криволинейной трапеции $S$, чем площадь $\sigma_2$.

Далее, ступенчатая фигура, построенная по разбиению $\tau_4$, будет по форме еще ближе к криволинейной трапеции,

# Геометрический смысл определенного интеграла

Далее, ступенчатая фигура, построенная по разбиению $\tau_4$, будет по форме еще ближе к криволинейной трапеции, а значит, ее площадь $\sigma_4$ будет отличаться от $S$ еще меньше, чем $\sigma_3$.

Таким образом, увеличивая количество точек в разбиении отрезка $[a, b]$, мы получаем последовательность $\{\sigma_n\}$, члены которой постепенно приближаются к $S$, Таким образом, увеличивая количество точек в разбиении отрезка $[a, b]$, мы получаем последовательность $\{\sigma_n\}$, члены которой постепенно приближаются к $S$, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = S.$$

## Геометрический смысл определенного интеграла

Таким образом, увеличивая количество точек в разбиении отрезка $[a, b]$, мы получаем последовательность $\{\sigma_n\}$, члены которой постепенно приближаются к $S$, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = S.$$

С другой стороны, $\sigma_n$ является интегральной суммой Римана,

# Геометрический смысл определенного интеграла

Таким образом, увеличивая количество точек в разбиении отрезка $[a, b]$, мы получаем последовательность $\{\sigma_n\}$, члены которой постепенно приближаются к $S$, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = S.$$

С другой стороны, $\sigma_n$ является интегральной суммой Римана, а значит, по определению определенного интеграла

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \int_a^b f(x)dx.$$

# Геометрический смысл определенного интеграла

Тогда получаем, что

$$\int_a^b f(x)dx = S,$$

# Геометрический смысл определенного интеграла

Тогда получаем, что

$$\int\limits_a^b f(x)dx = S,$$

т.е. определенный интеграл от функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ численно равен площади криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $f(x)$ и осью $Ox$ на этом же отрезке.

# Условия интегрируемости функций

# Условия интегрируемости функций

*Определение*

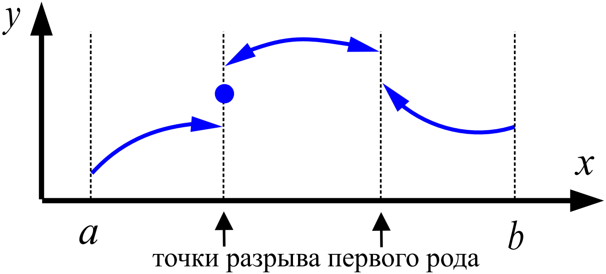
Функция называется **кусочно-непрерывной** на отрезке, если она задана и непрерывна во всех точках этого отрезка, кроме, быть может, конечного их числа, в которых она имеет конечные односторонние пределы.

# Условия интегрируемости функций

*Пример функции, кусочно-непрерывной на отрезке* $[a, b]$*:*

# Условия интегрируемости функций

*Пример функции, кусочно-непрерывной на отрезке* $[a, b]$*:*



# Условия интегрируемости функций

*Теорема (об интегрируемости кусочно-непрерывных функций)*

# Условия интегрируемости функций

*Теорема (об интегрируемости кусочно-непрерывных функций)*

Всякая кусочно-непрерывная на данном отрезке функция интегрируема по Риману на нем.

# Условия интегрируемости функций

*Теорема (об интегрируемости кусочно-непрерывных функций)*

Всякая кусочно-непрерывная на данном отрезке функция интегрируема по Риману на нем.

*Следствие*

# Условия интегрируемости функций

*Теорема (об интегрируемости кусочно-непрерывных функций)*

Всякая кусочно-непрерывная на данном отрезке функция интегрируема по Риману на нем.

*Следствие*

Всякая непрерывная на данном отрезке функция интегрируема по Риману на нем.